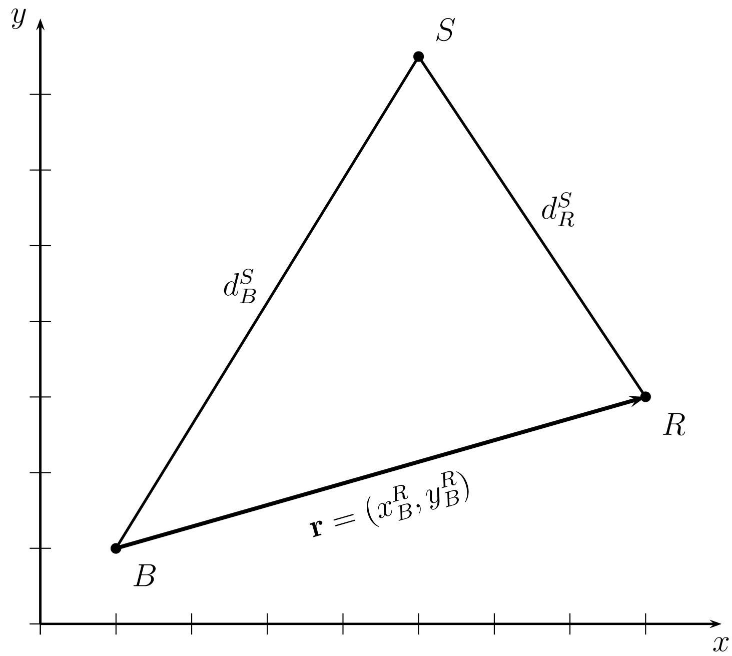
Prenos pravih pogreškov – Pogrešek položaja satelita GNSS

Podane imamo koordinate bazne točke B v ravninskem koordinatnem sistemu, in sicer $B(x_B, y_B) = (100\,\mathrm{m}, 100\,\mathrm{m})$, do nove točke R pa imamo podani komponenti baznega vektorja $\mathbf{r} = (x_B^R, y_B^R) = (1000\,\mathrm{m}, 1000\,\mathrm{m})$. Podane pa imamo tudi koordinate satelita S, ki je oddaljen od obeh točk približno 22 000 km, in sicer $S(x_S, y_S) = (500\,\mathrm{m}, 22\,000\,000\,\mathrm{m})$. Če poznamo pravi pogrešek koordinat satelita $\Delta x_S = 20\,\mathrm{m}$ in $\Delta y_S = 15\,\mathrm{m}$, izračunaj razdalji d_B^S in d_R^S in njuna prava pogreška Δd_B^S in Δd_R^S. Izračunaj tudi razliko $D = d_R^S - d_R^S$ in njen pravi pogrešek ΔD.



Slika 1: Prikaz položajev točk B, R in S in iskanih neznank

Naloga prikazuje poenostavljeno situacijo pri izmeri GNSS, ko upoštevamo opazovanja GNSS na dveh točkah (baza B in nova točka "rover" R) z enega satelita S. Vse tri točke lahko obravnavamo v ravnini, v kateri ležijo. Sama naloga je enostavna, imamo dolžini od satelita do obeh točk, njuna razlika, ki jo boste v višjih letnikih pri obravnavi GNSS označili kot enojna razlika, pa ima zelo pomembno vlogo v obdelavi opazovanj GNSS za kakovostno določitev koordinat točk.

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Iz naloge vidimo, da so podatki koordinate treh točk, to so B, R in S, a pravi pogreški so podani le za koordinati točke S, zato imamo $n =$ ___. Vse ostale koordinate (točk B in R) obravnavamo kot konstante. Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajoči vektor pravih pogreškov opazovanj $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_S \\ \Delta y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \dots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Zanimata nas dve dolžini, to sta d_B^S in d_R^S ter njuna razlika $D = d_R^S - d_R^S$. Število neznank je zato enako $m =$ ___, vektor neznank pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_B^S \\ d_R^S \\ D \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \dots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \dots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
   Izračun vseh neznank na osnovi opazovanj je podan z:

$$\begin{aligned} d_B^S &= \sqrt{(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2} \\ d_R^S &= \sqrt{(x_S - (x_B + x_B^R))^2 + (y_S - (y_B + y_B^R))^2} \\ D = d_R^S - d_B^S &= \sqrt{(x_S - (x_B + x_B^R))^2 + (y_S - (y_B + y_B^R))^2} - \sqrt{(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

   V enačbi 3 je položaj točke R podan preko položaja točke B in komponent baznega vektorja $\mathbf{r}$.

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Da izračunamo "približne" vrednosti neznank iz enačbe 3 uporabimo merjene vrednosti opazovanj iz enačbe 1. Dobimo:

$$\begin{aligned} d_B^S &= \_\_\_\mathrm{m} \\ d_R^S &= \_\_\_\mathrm{m} \\ D &= \_\_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{4}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Vse enačbe (neznanke) iz enačb 3 odvajamo po obeh opazovanjih in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Parcialni odvodi imajo na koncu obliko:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_B^S}{\partial x_S} &= \frac{x_S - x_B}{d_B^S} & \frac{\partial d_B^S}{\partial y_S} &= \frac{y_S - y_B}{d_B^S} \\ \frac{\partial d_R^S}{\partial x_S} &= \frac{x_S - (x_B + x_B^R)}{d_R^S} & \frac{\partial d_R^S}{\partial y_S} &= \frac{y_S - (y_B + y_B^R)}{d_R^S} \\ \frac{\partial D}{\partial x_S} &= \frac{\partial d_R^S}{\partial x_S} - \frac{\partial d_B^S}{\partial x_S} & \frac{\partial D}{\partial y_S} &= \frac{\partial d_R^S}{\partial y_S} - \frac{\partial d_B^S}{\partial y_S} \end{aligned} \tag{5}$$

   Matrika $\mathbf{J}$ je velikosti $m \times n =$ ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J}\mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta d_B^S \\ \Delta d_R^S \\ \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.000\,36\,\mathrm{m} \\ 14.999\,45\,\mathrm{m} \\ -0.000\,91\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\mathbf{\overline{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Prave vrednosti neznank nas tu ne zanimajo.

Da ugotovimo, zakaj je ta naloga pri GNSS tako pomembna, je potrebno analizirati rezultate iz enačbe 7. Ko računamo dolžino med dvema točkama (kot sta to d_B^S in d_R^S), se pravi pogreški koordinat točk neposredno prenesejo na prave pogreške dolžin. Če bodo pogreški koordinat na nivoju metrov, potem bodo tudi pravi pogreški izračunanih dolžin na nivoju metrov. Pri tretji neznanki, ki predstavlja razliko dolžin d_R^S in d_B^S od obeh točk na Zemlji do satelita, pa vidimo, da je pravi pogrešek manjši od milimetra. Pogrešek položaja satelita se je s tem, ko smo izračunali razliko $D = d_R^S - d_B^S$ skoraj izničil. A to je možno zato, ker so sateliti zelo oddaljeno od površja Zemlje (okoli 22 000 km) in ko sta točki B in R relativno blizu (to pomeni pod 100 km). Ko so točke narazen za več kot 1000 km, se napaka v položaju satelita izkaže tudi pri količini D.

V primeru izmere GNSS merimo razdalje med sateliti in točkami na Zemlji (na katere postavimo inštrumente GNSS). Položaje satelitov je zelo zahtevno določiti z natančnostjo na nivoju centimetrov, zato so ti podatki znani šele pri naknadni obdelavi, z zakasnitvijo treh tednov. V realnem času dobimo položaje satelitov na nivoju nekaj metrov. A vseeno lahko z geodetskimi inštrumenti GNSS določimo koordinate točk na centimetrskem, celo milimetrskem nivoju natančnosti. To je možno le, ko za določitev (relativnih) koordinat (med točkami) uporabimo razlike izmerjenih razdalj med točkami in sateliti. Temu se reče relativna določitev položajev in je standard pri uporabi GNSS že od začetka 80-ih let prejšnjega stoletja.