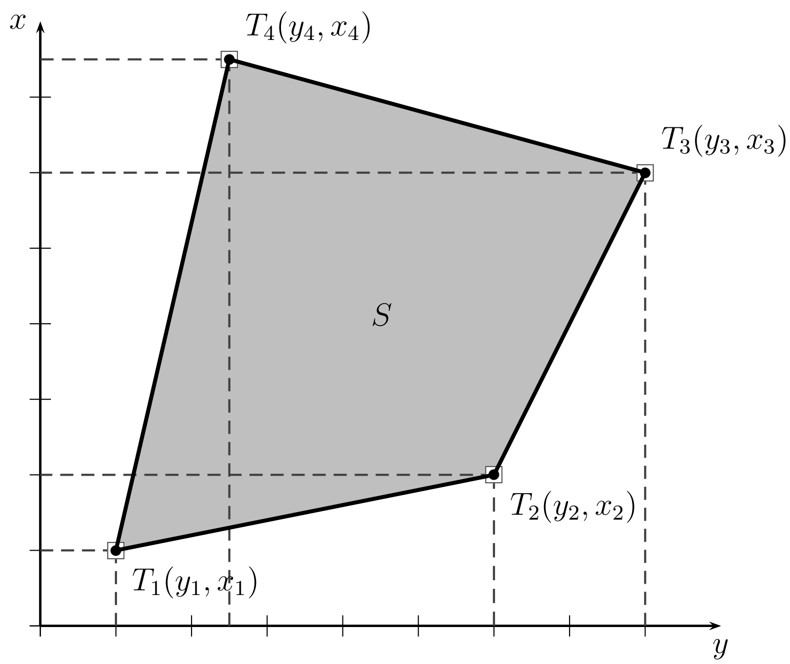
Prenos pravih pogreškov – Površina zaključenega poligona

Določiti želimo površino parcele S, kjer smo z geodetskimi metodami določili koordinate štirih točk, kot to prikazuje slika 1. Koordinate točk so $T_1(y_1, x_1) = (10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m})$, $T_2(y_2, x_2) = (60\,\mathrm{m}, 20\,\mathrm{m})$, $T_3(y_3, x_3) = (80\,\mathrm{m}, 60\,\mathrm{m})$ in $T_4(y_4, x_4) = (25\,\mathrm{m}, 75\,\mathrm{m})$, podane pa imamo tudi prave pogreške vseh koordinat, in sicer $(\Delta y_1, \Delta x_1) = (0.010\,\mathrm{m}, -0.020\,\mathrm{m})$, $(\Delta y_2, \Delta x_2) = (-0.015\,\mathrm{m}, 0.020\,\mathrm{m})$, $(\Delta y_3, \Delta x_3) = (0.005\,\mathrm{m}, -0.005\,\mathrm{m})$ in $(\Delta y_4, \Delta x_4) = (-0.020\,\mathrm{m}, 0.010\,\mathrm{m})$. Izračunaj površino parcele S, njen pravi pogrešek ΔS in pravo površino $\bar{S}$. Kakšni so doprinosi pogreškov posameznih opazovanj (koordinat točk) na izračunano povšino?



Slika 1: Določitev površine iz koordinat točk poligona

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Iz podatkov je razvidno, da moramo izračunati površino S iz koordinat štirih točk, torej $n =$ ___. Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajoči vektor pravih pogreškov opazovanj $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \\ y_3 \\ x_3 \\ y_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta x_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_4 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \dots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati površino parcele (poligona) S, zato je število neznank enako $m =$ ___. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \left[\; S \; \right] \tag{2}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \dots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \dots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
   Za rešitev naloge moramo prvo vedeti, kako se izračuna površina zaključenega poligona na osnovi koordinat točk poligona. Pa podan primer, ko imamo 4 točke, se enačba glasi:

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_2 - y_3)(x_2 + x_3) + \\ & \frac{1}{2}(y_3 - y_4)(x_3 + x_4) + \frac{1}{2}(y_4 - y_1)(x_4 + x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

   Kako pridemo do rešitve iz enačbe 3?

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Za izračun površine S iz enačbe 3 uporabimo numerične vrednosti opazovanj iz enačbe 1 in dobimo:

$$S = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{4}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Parcialni odvodi enačbe 3 po vseh koordinatah (opazovanjih) imajo, po krajši matematični akrobaciji, obliko:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y_1} &= \frac{x_2 - x_4}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_1} &= -\frac{y_2 - y_4}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_2} &= \frac{x_3 - x_1}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_2} &= -\frac{y_3 - y_1}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_3} &= \frac{x_4 - x_2}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_3} &= -\frac{y_4 - y_2}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_4} &= \frac{x_1 - x_3}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_4} &= -\frac{y_1 - y_3}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{5}$$

   Matrika $\mathbf{J}$ je velikosti $m \times n =$ ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = {} & \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial S}{\partial y_1} & \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial S}{\partial y_2} & \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial S}{\partial y_3} & \frac{\partial S}{\partial x_3} & \frac{\partial S}{\partial y_4} & \frac{\partial S}{\partial x_4} \end{array} \right] = \\ & \left[\begin{array}{cccccccc} \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} & \_\_\mathrm{m} \end{array} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = \Delta S = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{7}$$

Produkti posameznih parcialnih odvodov iz enačbe 5 s pripadajočimi pravimi pogreški iz enačbe 1 predstavljajo doprinos posameznega pravega pogreška opazovanja k končnemu pravemu pogrešku neznanke. Za vsako opazovanje tako dobimo:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} & \Delta x_1 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} \\ \Delta y_2 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} & \Delta x_2 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} \\ \Delta y_3 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} & \Delta x_3 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} \\ \Delta y_4 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} & \Delta x_4 S &= \underline{\qquad}\mathrm{m} \end{aligned} \tag{8}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Za izračun prave vrednosti površine $\bar{S}$ približni površini S iz enačbe 4 prištejemo pravi pogrešek ΔS iz enačbe 7 in dobimo:

$$\bar{S} = S + \Delta S = \underline{\quad}\mathrm{m}^2 \tag{9}$$