PRENOS PRAVIH POGREŠKOV – Slepi poligon:

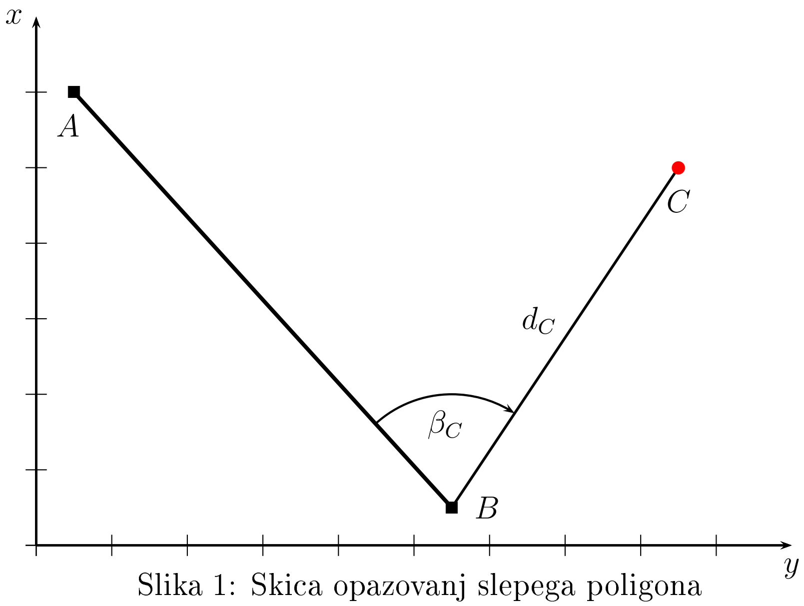
Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi pravimi pogreški, in sicer:

- $A(y_A, x_A) = (461\,300\,\mathrm{m}, 100\,600\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_A = 0.1\,\mathrm{m}$, $\Delta x_A = -0.075\,\mathrm{m}$) in
- $B(y_B, x_B) = (461\,400\,\mathrm{m}, 100\,550\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_B = -0.08\,\mathrm{m}$, $\Delta x_B = 0.05\,\mathrm{m}$).

Do nove točke $C(y_C, x_C)$ smo izmerili obe opazovanji poligona, in sicer:

- priklepni kot $\beta_C = 90°$ ($\Delta\beta_C = 2'$) in
- dolžino $d_C = 75.00\,\mathrm{m}$ ($\Delta d_C = 0.05\,\mathrm{m}$).

Prikaz izmere je podan na sliki 1. Izračunaj koordinate točke (y_C, x_C), njuna prava pogreška $(\Delta y_C, \Delta x_C)$ in njuni pravi vrednosti $(\overline{y_C}, \overline{x_C})$.



Slika 1: Skica opazovanj slepega poligona

Preden se lotimo izračuna, pokažimo, kako se izračuna položaj točke C glede na podatke in skico 1. Iz izračuna poligona vemo, da gre postopek takole:

- Izračun smernega kota ν_B^C, ki ga izračunamo na osnovi smernega kota ν_A^B in priklepnega kota β_C. Enačba se glasi:

$$\nu_B^C = \nu_A^B + \beta_C - 180°$$

  Smerni kot na izbrani točki v poligonu proti njeni naslednjici izračunamo tako, da uporabimo smerni kot na točki predhodnici in priklepni kota na izbrani točki do naslednjice. Začetni smerni kot poligona izračunamo iz danih točk A in B, tako da se zgornja enačba v celoti zapiše kot:

$$\nu_B^C = \nu_A^B + \beta_C - 180° = \arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°$$

Tu je pomembno, da vidimo, da se smerni kot ν_B^C izračuna iz številnih količin, to so: koordinate točke $A(y_A, x_A)$ in $B(y_B, x_B)$ ter priklepnega kota β_C.

- Izračun razlik koordinat od točke B do točke $C(y_B^C, x_B^C)$, ki sledi pretvorbi iz geodetskega polarnega v geodetski kartezični koordinatni sistem. Velja:

$$y_B^C = d_C \sin \nu_B^C$$
$$x_B^C = d_C \cos \nu_B^C$$

(Oznaki za razliko koordinat sta podani brez znaka Δ, da se ne zamenja s pravim pogreškom.)

- Izračun koordinat točke C (y_C, x_C):

$$y_C = y_B + y_B^C \qquad x_C = x_B + x_B^C$$

Če sedaj vse skupaj sestavimo in zapišemo koordinate točke C (y_C, x_C) tako, da bomo na desni strani enačaja imeli samo osnovne podatke (iz naloge), potem velja:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180^\circ\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Zgornji dve enačbi predstavljata izhodišče za izračun rezultatov podane naloge. Rešili pa jo bomo na dva načina, v enem koraku in v dveh korakih. Razlike bodo pojasnjene sproti.

Rešitev v enem koraku:

Izhajamo iz postopka prenosa pravih pogreškov, kot smo ga vajeni:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
Pregledamo, kateri podatki imajo podane prave pogreške in ugotovimo, da jih je 6 $(n = 6)$, in sicer; koordinate obeh danih točk A in B ter obe opazovanji v poligonu, priklepni kot β_C in dolžina d_C. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ sta zato velikosti 6×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_C \\ \beta_C \\ y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta d_C \\ \Delta \beta_C \\ \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
Naloga od nas zahteva, da izračunamo dve koordinati $(m = 2)$ točke C, torej y_C in x_C. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izhajamo iz obeh enačb 1 za izračun koordinat točke C, torej:

$$y_C = y_B + d_C \sin\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°\right)$$
$$x_C = x_B + d_C \cos\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°\right)$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za smerni kot pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.541\,\mathrm{m} \\ 100\,617.082\,\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in šest opazovanja ($n = 6$), je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×6 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_C}{\partial d_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial y_C}{\partial y_A} & \frac{\partial y_C}{\partial x_A} & \frac{\partial y_C}{\partial y_B} & \frac{\partial y_C}{\partial x_B} \\ \frac{\partial x_C}{\partial d_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial x_C}{\partial y_A} & \frac{\partial x_C}{\partial x_A} & \frac{\partial x_C}{\partial y_B} & \frac{\partial x_C}{\partial x_B} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.44721 & 67.08204 & 0.26833 & 0.53666 & 0.73167 & -0.53666 \\ 0.89443 & -33.54102 & -0.13416 & -0.26833 & 0.13416 & 1.26833 \end{bmatrix}$$

   Na kratko o tem, kako se poračunajo parcialni odvodi. Enostavna sta prva dva parcialna odvoda v prvi vrstici, saj velja:

$$\frac{\partial y_C}{\partial d_C} = \sin \nu_B^C \qquad \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} = d_C \cos \nu_B^C$$

   pri ostalih se pa malo zakomplicira, uporabiti je potrebno ti, "čebulno" pravilo, saj npr. odvod po y_A pomeni prvo odvod sin, nato arctan, potem pa še ulomka, kjer je naša spremenljivka v števcu (predznak pa je minus):

$$\frac{\partial y_C}{\partial y_A} = d_C \cos \nu_B^C \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x_B - x_A}$$

   Podobno se odvaja še po ostalih spremenljivkah, vidi pa se, da se odvodi po vseh štirih koordinatah točk A in B spreminajajo samo po zadnjem členu (preverite sami).

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
   Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} -0.037\,\mathrm{m} \\ 0.085\,\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.504\,\mathrm{m} \\ 100\,617.167\,\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

Rešitev v dveh korakih:

Pri rešitvi v dveh korakih, bomo v prvem koraku izračunali smerni kot ν_A^B in njegov pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B$. V drugem koraku pa bomo izračunali koordinati y_C in x_C ter pripadajoča prava pogreška Δy_C in Δx_C. Kaj s tem pridobimo, ko računamo v dveh korakih? Odvodi obeh koordinat po opazovanjih bodo veliko bolj enostavni.

Korak 1: Izračun ν_A^B in $\Delta\nu_A^B$

Prenos pravih pogreškov za izračunan smerni kot je detajlno opisan v datoteki `Naloga3_-gKartPolar.pdf`, ki opisuje primer *Delo od doma: Geodetski kartezični / polarni koordinatni sistem*, zato bomo tu zapisali samo rezultate:

1. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ sta velikosti 4×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$$

2. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je:

$$\mathbf{y} = \left[\nu_A^B\right]$$

3. Smerni kot ν_A^B se izračuna kot:

$$\nu_A^B = \arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

4. Izračunana neznanka je:

$$\mathbf{y} = \nu_A^B = 116°33'54.2''$$

5. Matrika $\mathbf{J}$ je dimenzije 1×4:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial\nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial\nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial\nu_A^B}{\partial x_B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.004 & 0.008 & -0.004 & -0.008 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

6. Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:

$$\mathbf{\Delta y} = \Delta\nu_A^B = -57.8''$$

Končni rezultat koraka 1 je torej: $\nu_A^B = 116°33'54.2''$, ki ima pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B = -57.8''$.

Korak 2: Izračun koordinat točke $C(y_C, x_C)$ s pripadajočimi pravimi pogreški $(\Delta y_C, \Delta x_C)$

Pri prenosu pravih pogreškov izhajamo iz enačb 1, ki jih lahko poenostavimo, saj smo v koraku 1 izračunali smerni kot ν_A^B in pripadajoč pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B$:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ\right) \end{aligned} \tag{2}$$

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Pogledamo, kaj nastopa v enačbah 2, kar ima podane prave pogreške. Ugotovimo, da jih je 5 ($n = 5$), in sicer; koordinate točke B, smerni kot ν_A^B ter obe opazovanji v poligonu, priklepni kot β_C in dolžina d_C. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta zato velikosti 5×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_C \\ \beta_C \\ \nu_A^B \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta d_C \\ \Delta\beta_C \\ \Delta\nu_A^B \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Naloga od nas še vedno zahteva, da izračunamo koordinati ($m = 2$) točke C, torej y_C in x_C. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izhajamo iz obeh enačb 2 za izračun koordinat točke C, torej:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\nu_A^B + \beta_C - 180^\circ\right) \end{aligned}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za smerni kot pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.541\,\mathrm{m} \\ 100\,617.082\,\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.

Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in pet opazovanja ($n = 5$), je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×5 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_C}{\partial d_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \nu_A^B} & \frac{\partial y_C}{\partial y_B} & \frac{\partial y_C}{\partial x_B} \\ \frac{\partial x_C}{\partial d_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \nu_A^B} & \frac{\partial x_C}{\partial y_B} & \frac{\partial x_C}{\partial x_B} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.44721 & 67.08204 & 67.08204 & 1 & 0 \\ 0.89443 & -33.54102 & -33.54102 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parcialni odvodi so tu veliko bolj enostavni, po koordinatah sta po zadnja dva v vsaki vrstici. Ker v oklepaju funkcij sin in cos ni več koordinat, je dela veliko manj, kot v primeru, ko vse delamo v enem koraku.

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
   Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} -0.037\,\mathrm{m} \\ 0.085\,\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433.504\,\mathrm{m} \\ 100\,617.167\,\mathrm{m} \end{bmatrix}$$