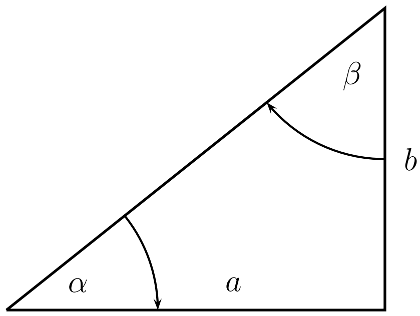
PRENOS PRAVIH POGREŠKOV – Parcela, stranice merjene z merskim trakom:

Parcela ima obliko pravokotnega trikotnika, kot to prikazuje slika 1. Z merskim trakom dolžine $l = 30.00\,\mathrm{m}$ smo izmerili obe kateti in dobili $a = 61.090\,\mathrm{m}$ in $b = 50.170\,\mathrm{m}$. Naknadno smo ugotovili, da je merski trak 3 cm prekratek, zato sta obe meritvi pogrešeni. Izračunajte oba notranja kota α in β, njuna prava pogreška $\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$ ter njuni pravi vrednosti $\overline{\alpha}$ in $\overline{\beta}$.



Slika 1: Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Izmera obeh stranic a in b se je izvedla z merskim trakom, za katerega pa vemo, da je pogrešen, zato je prvo potrebno določiti pravi pogrešek merskega traku Δl. Merjena (približna) vrednost je $l = 30.00\,\mathrm{m}$, podano pa imamo informacijo, "da je merski trak 3 cm prekratek". Izjava pomeni, da če bi naš merski trak položili poleg točnega merskega traku, bi naš merski trak prišel le do dolžine $\overline{l} = 29.97\,\mathrm{m}$ na tem točnem merskem traku. Pravi pogrešek našega merskega traku tako dobimo kot:

   $$\Delta l = \overline{l} - l = 29.97\,\mathrm{m} - 30.00\,\mathrm{m} = \_\_\mathrm{m}$$

   Ključno pri zgornji enačbi je, da določimo pravi predznak pravega pogreška Δl, izhajamo pa iz osnovne definicije pravega pogreška, ki predstavlja razliko; *prava vrednost - merjena vrednost.*

   Sedaj, ko vemo, kakšen je pravi pogrešek Δl lahko izračunamo tudi prava pogreška obeh opazovanj Δa in Δb. Razmislek gre takole. Če bi bila stranica a dolga točno $30.00\,\mathrm{m}$, potem velja $\Delta a = \Delta l$. V primeru, ko pa bi bila stranica a dolga točno $2 \cdot 30.00\,\mathrm{m} = 60.00\,\mathrm{m}$, pa bi bil $\Delta a = 2\Delta l$. Gre torej za premo sorazmerje, ki ga lahko zapišemo kot:

   $$\frac{\Delta a}{\Delta l} = \frac{a}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta a = \frac{a}{l}\Delta l$$

Oba prava pogreška opazovanih stranic sta tako:

$$\Delta a = \frac{a}{l}\Delta l = \underline{\quad}\text{m} \qquad \Delta b = \frac{b}{l}\Delta l = \underline{\quad}\text{m}$$

Sedaj lahko sestavimo vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ (oba velikosti 2×1):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\text{m} \\ \underline{\quad}\text{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\text{m} \\ \underline{\quad}\text{m} \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati oba notranja kota, α in β parcele, zato imamo dve neznanki $(m = 2)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izračun obeh kotov iz obeh katet izhaja iz osnovnih kotnih funkcij pravokotnega trikotnika:

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a} \qquad \beta = \arctan\frac{a}{b}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj, uporabimo zgornji enačbi za izračun neznank in izračunamo:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\frac{b}{a} \\ \arctan\frac{a}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad}^{o} \\ \underline{\qquad}^{o} \end{bmatrix}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunamo vse parcialne odvode obeh neznank po obeh opazovanjih in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Ker imamo dve neznanki $(m = 2)$ in dve opazovanji $(n = 2)$ je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×2 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial a} & \frac{\partial\alpha}{\partial b} \\ \frac{\partial\beta}{\partial a} & \frac{\partial\beta}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$.
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}'' \\ \underline{\quad}'' \end{bmatrix}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}^{o} \\ \underline{\quad}^{o} \end{bmatrix}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Prikažite, kakšni so doprinosi pogreškov posameznih opazovanj (Δa in Δb) na prave pogreške neznank ($\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$).
- Kaj lahko rečemo za prava pogreška $\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$? Zakaj imata tako vrednost? Ali bi take rezultate lahko pričakovali v naprej?