PRENOS PRAVIH POGREŠKOV – Trigonometrično višinomerstvo:

S postopkom trigonometričnega višinomerstva želimo določiti višino H_B točke B, pri tem, da imamo podano višino $H_A = 321.00$ m točke A, na katero smo prisilno centrirali tahimeter in izmerili njegovo višino $i = 25$ cm. Na točko B smo postavili reflektor na višino $l = 2.00$ m, za katero vemo pravi pogrešek $\Delta l = 5\,\mathrm{mm}$. S tahimetrom smo izmerili poševno dolžino $s = 100.00\,\mathrm{m}$, s pravim pogreškov $\Delta s = -1\,\mathrm{cm}$, in zenitno razdaljo $z = 85°$, s pravim pogreškom $\Delta z = -15''$.

Izračunajte višino točke H_B točke B, s postopkom prenosa pravih pogreškov izračunajte pravi pogrešek višine ΔH_B in njeno pravo višino $\overline{H_B}$. Izračunajte, kakšen je doprinos posameznega pravega pogreška opazovanj (Δs, Δz in Δl) na izračunano vrednost pravega pogreška ΔH_B.

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Ko sestavljamo vektor opazovanj $\mathbf{x}$, moramo razlikovati med opazovanji in konstantami. Kot opazovanja obravnavamo vse podatke, za katere imamo podane prave pogreške. Iz naloge je razvidno, da imajo prave pogreške podana opazovanja s, z in l, medtem ko H_A in i nimata podanega pravega pogreška, zato sta obravnavana kot konstanti. Število opazovanj je $n = 3$, dimenzija vekorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{\Delta x}$ pa je zato 3×1. Vanju vstavimo numerične vrednosti opazovanj, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati višino H_B točke B, zato imamo eno samo neznanko $(m = 1)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} H_B \end{bmatrix}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izraziti moramo, kako se izračunajo naše neznanke iz opazovanj in konstant, torej, kako izračunamo H_B iz opazovanj s, z in l ter iz konstant H_A in i:

$$H_B = H_A + s \cos z + i - l$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank y_j in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).

Uporabimo numerične vrednosti iz vektorja $\mathbf{x}$, vrednosti konstant iz navodil naloge in izračunamo H_B, če uporabimo zgornjo enačbo:

$$H_B = H_A + s\cos z + i - l = \underline{\hspace{2em}}\,\text{m}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
Izračunamo vse parcialne odvode neznanke H_B po vseh treh opazovanjih in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Ker imamo eno samo neznanko ($m = 1$) in tri opazovanja ($n = 3$) je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 1×3 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_B}{\partial s} & \frac{\partial H_B}{\partial z} & \frac{\partial H_B}{\partial l} \end{bmatrix}$$

Zelo pomembno je, da je vrstni red opazovanj, po katerih odvajamo v matriki $\mathbf{J}$, enak vrstnemu redu opazovanj iz vektorja $\mathbf{x}$. Parcialni odvodi in matrika $\mathbf{J}$ so:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos z & -s\sin z & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
Ker imamo eno samo neznanko, bo tudi izračunan en sam pravi pogrešek, torej $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \Delta H_B$. Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ ima obliko:

$$\Delta H_B = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \frac{\partial H_B}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial H_B}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial H_B}{\partial l}\Delta l = \underline{\hspace{1em}}\text{m} + \underline{\hspace{1em}}\text{m} + \underline{\hspace{1em}}\text{m} = \underline{\hspace{1em}}\text{m}$$

Produkte parcialnih odvodov neznanke po opazovanjih in pripadajočih pravih pogreškov opazovanj lahko označimo z $\Delta_s H_B$, $\Delta_z H_B$ in $\Delta_l H_B$ in imajo obliko ter vrednosti:

$$\Delta_s H_B = \frac{\partial H_B}{\partial s}\Delta s = \cos z \cdot \Delta s = \underline{\hspace{1em}}\text{m}$$
$$\Delta_z H_B = \frac{\partial H_B}{\partial z}\Delta z = -s\sin z \cdot \Delta z = \underline{\hspace{1em}}\text{m}$$
$$\Delta_l H_B = \frac{\partial H_B}{\partial l}\Delta l = -1 \cdot \Delta l = \underline{\hspace{1em}}\text{m}$$

Količine $\Delta_s H_B$, $\Delta_z H_B$ in $\Delta_l H_B$ prikazujejo doprinos posameznega pravega pogreška opazovanj (Δs, Δz in Δl) k pravemu pogrešku neznanke ΔH_B. Na ta način lahko ugotavljamo, pravi pogrešek katerega opazovanja povzroči največji prirast pravi pogrešek neznanke. In oblike enačbe tudi, kako geometrija problema vpliva na prenos pravega pogreška posameznega opazovanja k pravemu pogrešku neznanke.

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}$.
Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{H_B} = H_B + \Delta H_B = \underline{\hspace{2em}}\,\text{m}$$

NUMERIČNA ANALIZA PRENOSA PRAVIH POGREŠKOV:

Pri numerični analizi postopka prenosa pravih pogreškov nas zanima, kako točno dobimo rezultate postopka. To preverimo preprosto tako, da izračunamo pravo vrednost neznanke $\overline{\overline{H_B}}$, in sicer tako, da jo izračunamo na osnovi pravih vrednosti opazovanj ($\overline{s}$, $\overline{z}$ in $\overline{l}$):

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{s} \\ \overline{z} \\ \overline{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \Delta s \\ z + \Delta z \\ l + \Delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

Izračunana prava vrednost neznanke $\overline{\overline{H_B}}$ na osnovi pravih vrednosti opazovanj $\overline{\mathbf{x}}$ je:

$$\overline{\overline{H_B}} = H_A + \overline{s}\cos\overline{z} + i - \overline{l} = \underline{\qquad}\mathrm{m}$$

Razlika $\Delta\overline{H_B}$ med pravo vrednostjo $\overline{\overline{H_B}}$ iz pravih opazovanj in pravo vrednostjo $\overline{H_B}$ s prenosom pravih pogreškov je:

$$\Delta\overline{H_B} = \overline{\overline{H_B}} - \overline{H_B} = \underline{\qquad}\mathrm{m}$$

Doprinos pravega pogreška posameznega opazovanja k končnemu izračunu neznanke izračunamo tako, da namesto prave vrednosti opazovanja uporabimo približno, torej:

$$\Delta_s\overline{\overline{H_B}} = \overline{\overline{H_B}} - (H_A + s\cos\overline{z} + i - \overline{l}) = \underline{\qquad}\mathrm{m}$$

$$\Delta_z\overline{\overline{H_B}} = \overline{\overline{H_B}} - (H_A + \overline{s}\cos z + i - \overline{l}) = \underline{\qquad}\mathrm{m}$$

$$\Delta_l\overline{\overline{H_B}} = \overline{\overline{H_B}} - (H_A + \overline{s}\cos\overline{z} + i - l) = \underline{\qquad}\mathrm{m}$$