Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodetsko inženirstvo in upravljanje nepremičnin, 1. letnik

ANALIZA OPAZOVANJ V GEODEZIJI 1 - VAJE
Zakon o prenosu pravih pogreškov

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 11. februar 2026

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 Zakon o prenosu pravih pogreškov

Pri prenosu pravih pogreškov nas zanima, kakšen pogrešek smo naredili na izračunanih neznankah ($\mathbf{y}$), če smo jih računali iz pogrešenih opazovanj ($\mathbf{x}$). Pri opazovanjih poznamo vrednosti pravih pogreškov ($\mathbf{\Delta x}$), iščemo pa prave pogreške neznank ($\mathbf{\Delta y}$).

1.1 Opis metode

Količine, ki nastopajo pri prenosu pravih pogreškov so:

- Opazovanja / podatki:
  - $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$: n (približnih vrednosti) opazovanj / podatkov,
  - $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \ldots\ \overline{x}_n]^T$: prave vrednosti opazovanj / podatkov,
  - $\mathbf{\Delta x} = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$: pogreški opazovanj / podatkov (če poznamo vrednosti pogreškov, jih imenujemo "pravi pogreški")
- Neznanke / iskane količine:
  - $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ \ldots\ y_m]^T$: m približnih vrednosti neznank / iskanih količin, računane na osnovi približnih vrednosti opazovanj / podatkov ($\mathbf{x}$),
  - $\overline{\mathbf{y}} = [\overline{y}_1\ \overline{y}_2\ \ldots\ \overline{y}_m]^T$: prave vrednosti neznank / iskanih količin, računanih na osnovi pravih vrednosti opazovanj ($\overline{\mathbf{x}}$),
  - $\mathbf{\Delta y} = \overline{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$: pogreški neznank.

Povezava med neznankami in opazovanji je določena z vektorsko funkcijo $\mathbf{F}$:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{1–1}$$

Srednjo enačbo iz (1–1) zapišemo v skalarni obliki kot:

$$\begin{aligned}
y_1 + \Delta y_1 &= f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \\
y_2 + \Delta y_2 &= f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \\
y_3 + \Delta y_3 &= f_3(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n) \\
\vdots &= \quad \vdots \\
y_m + \Delta y_m &= f_m(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_n + \Delta x_n)
\end{aligned} \tag{1–2}$$

Izračun pravih pogreškov neznank $\mathbf{\Delta y}$ bomo izvedli preko linearizacije (Taylorjeva formula), kar matrično zapišemo v obliki :

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} \tag{1–3}$$

Matrika $\mathbf{J}$ je poimenovana kot Jakobijeva matrika in vsebuje parcialne odvode vseh funkcij ($y_i, i = 1, \ldots, m$) po vseh spremenljivkah ($x_i, i = 1, \ldots, n$). Vse parcialne odvode računamo na osnovi merjenih vrednostih količin x_i (ne v pravih vrednostih $\overline{x}_i$).

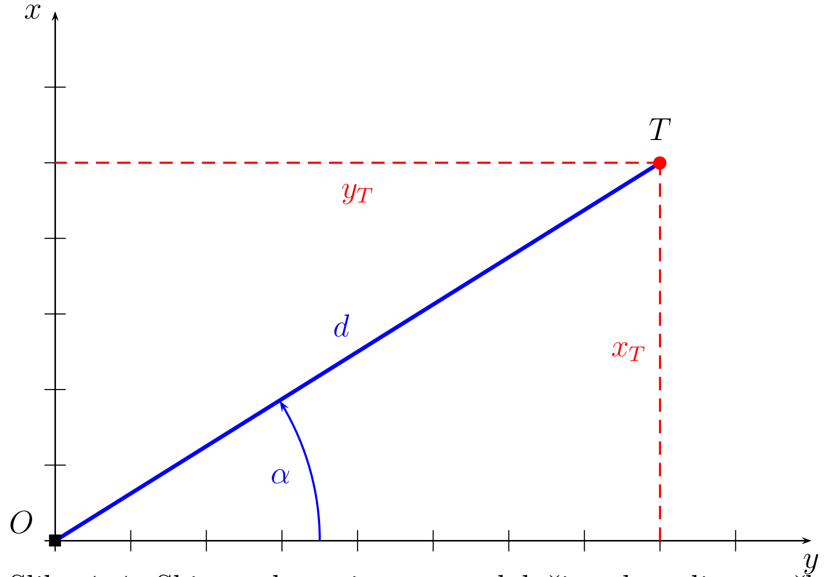
1.2 Postopek izračuna

Pri prenosu pravih pogreškov postopamo v naslednjem vrstnem redu:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ in doprinose $(\Delta_{x_i} y_j)$ posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}$.

1.3 Geometrijski prikaz na primeru – polarna izmera

Prikažimo prenos pravih pogreškov na preprostem primeru, in sicer pri določitvi koordinat točke T s postopkom polarne izmere. Imamo izhodiščno točko O, ki je v središču koordinatnega sistema, do nove točke T pa merimo dolžino d in kot α, kot prikazuje slika 1–1. Na sliki so v modri barvi opazovanja, v rdeči barvi neznanke in črno dane količine.



Slika 1–1: Skica polarne izmere za določitev koordinat točke T

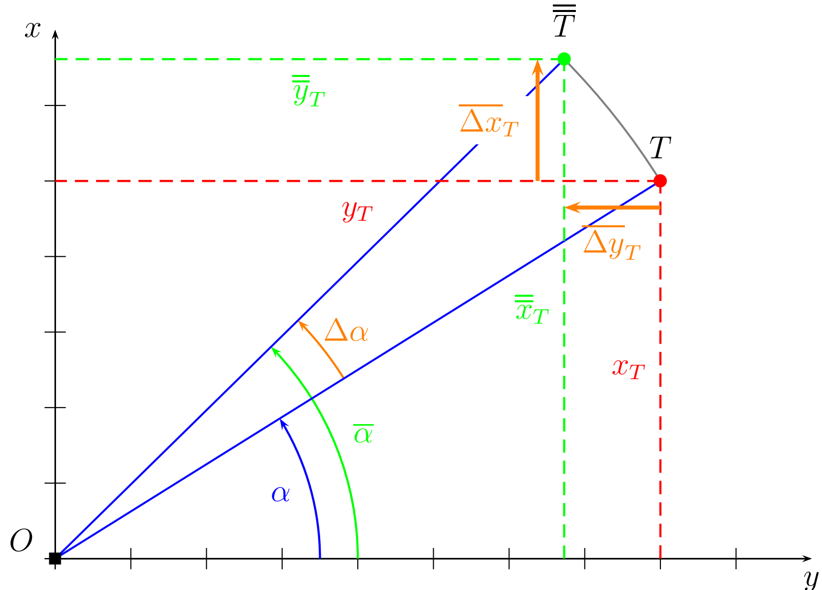
Enačbi za izračun koordinat točke T, y_T in x_T, dobimo s slike, rešujemo pravokotni trikotnik:

$$
\begin{aligned}
y_T &= d \cos \alpha \\
x_T &= d \sin \alpha
\end{aligned}
\tag{1–4}
$$

V nadaljevanju prikazujemo vpliv pravih pogreškov opazovanj na izračunane vrednosti neznank.

1.3.1 Vpliv pravega pogreška kota

Recimo, da imamo podan pravi pogrešek kota $\Delta\alpha$, ki ima pozitiven predznak. To pomeni, da je pravi kot $\overline{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha > \alpha$. Če bi neposredno upoštevali pravi pogrešek $\Delta\alpha$, dobimo situacijo, kot jo prikazuje slika 1–2. Pravi položaj točke, označen z $\overline{\overline{T}}$, dobimo tako, da točko T zasukamo za kot $\Delta\alpha$ okoli izhodišča O. Na sliki so z modro barvo označena opazovanja, z rdečo barvo približne vrednosti neznank (izračunane iz opazovanj), z oranžno barvo pravi pogreški neznank in z zeleno barvo prave vrednosti neznank (izračunane iz pravih opazovanj). Prava pogreška neznank sta označena kot $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$, pravi vrednosti neznank pa z $\overline{\overline{y}}_T$ in $\overline{\overline{x}}_T$, saj so določeni točno.



Slika 1–2: Vpliv pravega pogreška kota $\Delta\alpha$ na položaj točke T

S slike lahko vidimo, da sta točki T in $\overline{\overline{T}}$ isto oddaljeni od točke O, saj je dolžina d v tem primeru točna. Razvidno je tudi, da pravi pogrešek $\Delta\alpha$ povzroči pravi pogrešek na obeh koordinatah, povzroči tako $\overline{\Delta y_T}$, kakor tudi $\overline{\Delta x_T}$. Ker je točka $\overline{\overline{T}}$ glede na točko T "zgoraj" in "levo", ima $\overline{\Delta y_T}$ negativen predznak ($\overline{\Delta y_T} < 0$) in $\overline{\Delta x_T}$ pozitiven predznak ($\overline{\Delta x_T} > 0$), kar je na sliki predstavljeno z usmerjenostjo puščic.

Prave koordinate $\overline{\overline{T}}(\overline{\overline{y}}_T, \overline{\overline{x}}_T)$ dobimo tako, da uporabimo prave vrednosti opazovanj (d in $\overline{\alpha}$):

$$\begin{aligned} \overline{\overline{y}}_T &= d\cos(\overline{\alpha}) = d\cos(\alpha + \Delta\alpha) = d\cos(\alpha)\cos(\Delta\alpha) - d\sin(\alpha)\sin(\Delta\alpha) \\ \overline{\overline{x}}_T &= d\sin(\overline{\alpha}) = d\sin(\alpha + \Delta\alpha) = d\sin(\alpha)\cos(\Delta\alpha) + d\cos(\alpha)\sin(\Delta\alpha) \end{aligned} \tag{1–5}$$

Enačba (1–5) opisuje, kako pridemo od točke T do točke $\overline{\overline{T}}$. Prehod je po delu krožnega loka dolžine $l = d \cdot \Delta\alpha$. Če bi želeli izračunati prava pogreška neznank $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$, bi uporabili enačbi (1–4) in enačbi (1–5) in dobili:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_T} &= \overline{\overline{y}}_T - y_T \\ \overline{\Delta x_T} &= \overline{\overline{x}}_T - x_T \end{aligned} \tag{1–6}$$

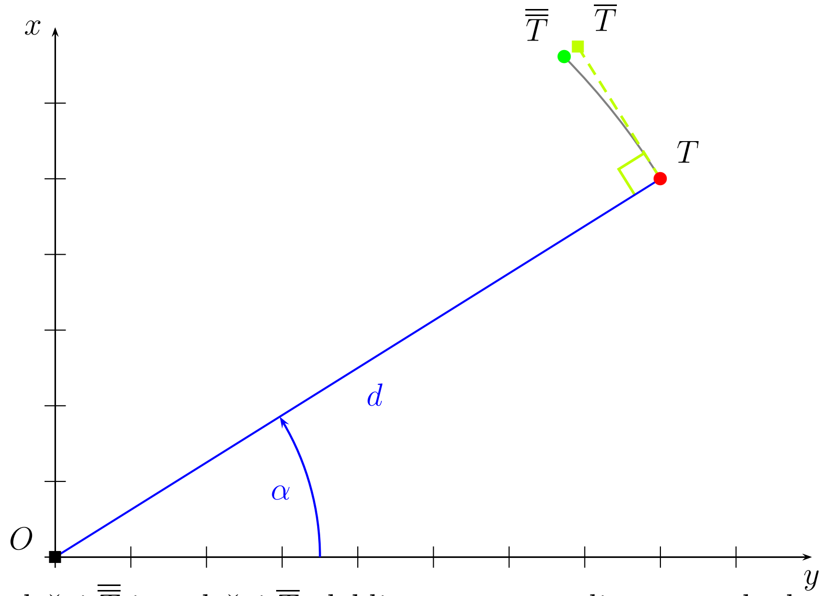
V geodezijo imamo, zaradi visoke kakovosti geodetskega inštrumentarija, pogreške opazovanj, ki so majhni v primerjavi z merjenimi vrednostmi. Zanima nas torej vpliv pogreškov na nivoju milimetrov za dolžine in sekund za kote. Če je pravi pogrešek $\Delta\alpha$ majhen, potem velja poenostavitev (izhajamo iz Taylorjeve formule):

$$\sin(\Delta\alpha) \approx \Delta\alpha \qquad \cos(\Delta\alpha) \approx 1 \tag{1–7}$$

Zanima nas, ali bi lahko poenostavitvi v enačbi (1–7) uporabili za enostavnejši izračun pravih pogreškov neznank, ki bi bil še vedno ustrezno točen. Če upoštevamo poenostavitvi iz enačbe (1–7) in ju vstavimo v enačbo (1–5), dobimo:

$$\begin{aligned} \overline{y}_T &= d\cos(\alpha) - d\sin(\alpha)\,\Delta\alpha \\ \overline{x}_T &= d\sin(\alpha) + d\cos(\alpha)\,\Delta\alpha \end{aligned} \tag{1–8}$$

V enačbi (1–8) smo pravi koordinati označili z $\overline{y}_T$ in $\overline{x}_T$, dobili pa smo točko $\overline{T}$, saj ta ni popolnoma enaka kot točka $\overline{\overline{T}}$. Vzrok je v tem, da smo uporabili poenostavitvi iz enačbe (1–7), ali povedano drugače, ko smo funkciji sinus in kosinus razvili v Taylorjevo vrsto, smo zanemarili vse člene višjih redov (2., 3. in tako naprej). Geometrično opisano prikazuje slika 1–3.



Slika 1–3: Pravi položaj $\overline{\overline{T}}$ in položaj $\overline{T}$, dobljen s poenostavljeno metodo, kot posledica prisotnosti pravega pogreška $\Delta\alpha$

Na sliki 1–3 vidimo, da točki $\overline{\overline{T}}$ (iz enačbe (1–5)) in $\overline{T}$ (iz enačbe (1–8)) nimata enakega položaja (koordinat), a razlika med njima ni velika. Če točko $\overline{\overline{T}}$ dobimo tako, da točko T zasukamo za kot $\Delta\alpha$ okoli središča O in je s tem oddaljena za razdaljo $d \cdot \Delta\alpha$ **po krožnici**, točko $\overline{T}$ dobimo tako, da točko T premaknemo v isto smer, za razdaljo $d \cdot \Delta\alpha$ **po premici**, ki je pravokotna na daljico OT. Preden pokažemo, kako veliko napako δ (razdalja med $\overline{\overline{T}}$ in $\overline{T}$) smo naredili, opišimo še matematično poenostavljeno rešitev iz enačbe (1–8). Če pogledamo enačbi (1–4) in enačbi (1–8), lahko ugotovimo, da:

$$\begin{aligned} \overline{y}_T &= \overbrace{d\cos(\alpha)}^{y_T}\overbrace{-d\sin(\alpha)}^{y'_T(\alpha)}\Delta\alpha = y_T + y'_T(\alpha)\Delta\alpha \\ \overline{x}_T &= \underbrace{d\sin(\alpha)}_{x_T} + \underbrace{d\cos(\alpha)}_{x'_T(\alpha)}\Delta\alpha = x_T + x'_T(\alpha)\Delta\alpha \end{aligned} \tag{1–9}$$

V enačbi (1–9) količini $y'_T(\alpha)$ in $x'_T(\alpha)$ predstavljata odvoda koordinat po kotu α. Velja torej:

$$\begin{aligned} \Delta y_T &= -d\sin(\alpha)\,\Delta\alpha = y'_T(\alpha)\Delta\alpha \\ \Delta x_T &= d\cos(\alpha)\,\Delta\alpha = x'_T(\alpha)\Delta\alpha \end{aligned} \tag{1–10}$$

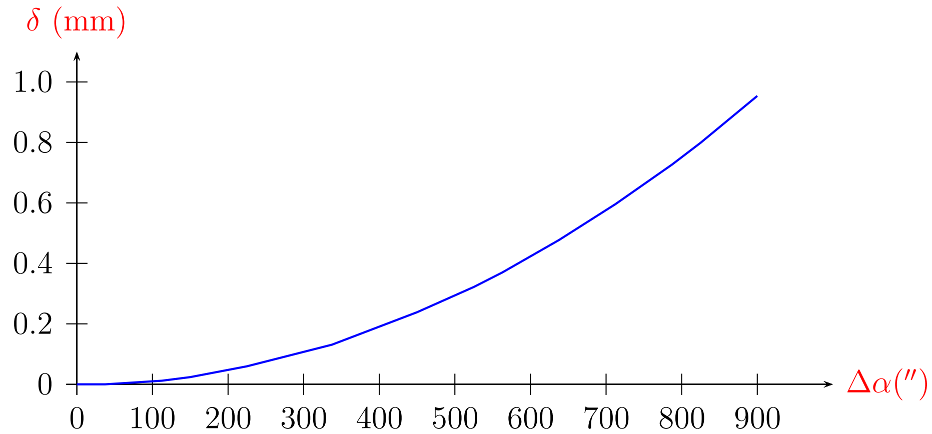
Če enačbi (1–9) in (1–10) zapišemo v matrični obliki, pa dobimo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{y}_T \\ \overline{x}_T \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta y_T \\ \Delta x_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Delta y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} y'_T(\alpha) \\ x'_T(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{[\Delta\alpha]}_{\mathbf{\Delta x}} \tag{1–11}$$

Dobili smo točno enačbo zakona o prenosu pravih pogreškov (glej poglavje 1 in enačbo (1–3)):

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \mathbf{J}\mathbf{\Delta x} \tag{1–12}$$

Pokažimo še, kako veliko napako δ naredimo, ker smo uporabili približen izračun (bolj enostaven) – zakon o prenosu pravih pogreškov. Situacija je izrisana na grafu na sliki 1–4.



Slika 1–4: Velikost napake δ [mm] (razdalja $\overline{\overline{T}} - \overline{T}$) v odvisnosti od pravega pogreška $\Delta\alpha$ [″]

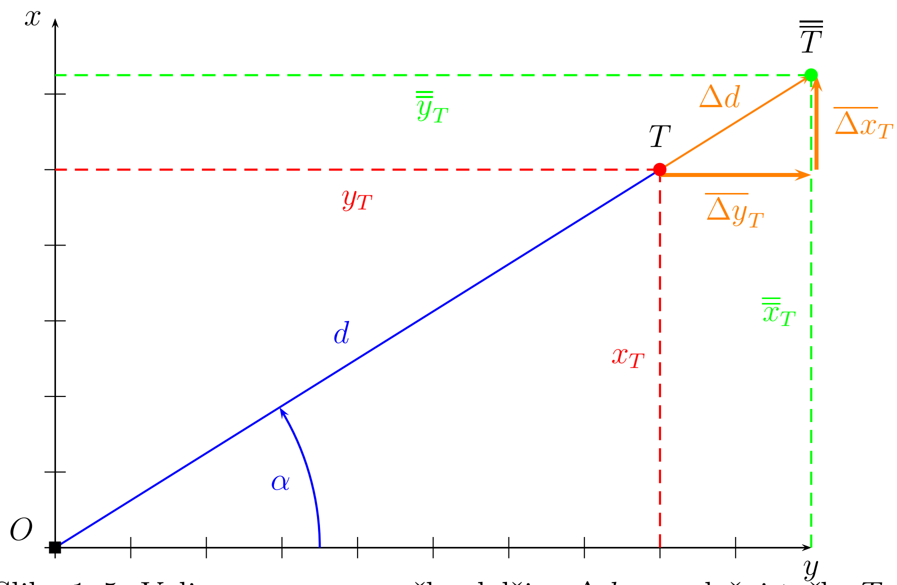
Slika 1–4 prikazuje vpliv napake δ v odvisnosti od pravega pogreška $\Delta\alpha$. Točka T je od izhodišča oddaljena 100 m. Enote za δ so milimetri, medtem ko so enote za $\Delta\alpha$ sekunde. Vidimo, da do napake okoli 1 mm pridemo šele pri pravem pogrešku $\Delta\alpha$ velikosti približno 900″ (15′). Velikosti pravih pogreškov neznank sta $\Delta y_T = -0{,}22\,\mathrm{m}$ in $\Delta x_T = 0{,}38\,\mathrm{m}$ (pri kotu $\alpha = 30°$). Torej, razlika pri izračunu pravih pogreškov neznank, ki sta na nivoju nekaj decimetrov, je pod 1 mm. To je zares zanemarljivo.

Kaj ugotovimo s slike 1–4 in analize napake δ? Postopek prenosa pravih pogreškov je poenostavljen izračun pravih pogreškov neznank, ampak je napaka, ki jo naredimo zaradi poenostavitve dejansko zanemarljivo majhna, še posebej če upoštevamo natančnosti modernih intštrumentov. Inštrumenta, ki bi imel natančnost merjenih smeri/kotov na nivoju 15′ že dolgo (dooolgo) ni v uporabi. Moderni tahimetri imajo pogreške velikosti nekaj sekund, za tako majhen pogrešek $\Delta\alpha$ pa je napaka δ na nivoju 1/1000 milimetra (mikrometra).

1.3.2 Vpliv pravega pogreška dolžine

Pokažimo tu še, kako vpliva pravi pogrešek dolžine Δd na izračun pravih vrednosti koordinat točk $\overline{\overline{T}}$ in točke $\overline{T}$ ter na prava pogreška obeh točk, torej na $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$ ter Δy_T in Δx_T. Grafično, kot pri pogrešku $\Delta\alpha$ na sliki 1–2, vpliv pogreška Δd prikazujemo na sliki 1–5. Tudi tu so z modro barvo označena opazovanja, z rdečo barvo približne vrednosti neznank (izračunane z opazovanji), z oranžno barvo pravi pogreški neznank in z zeleno barvo prave vrednosti neznank (izračunane s pravimi vrednostmi opazovanj).

S slike vidimo, da točka $\overline{\overline{T}}$ leži na isti premici kot točki T in O, le da je za vrednost pravega pogreška Δd oddaljena od točke T. In tudi tu pravi pogrešek Δd povzroči prava pogreška obeh koordinat,



Slika 1–5: Vpliv pravega pogreška dolžine Δd na položaj točke T

$\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$. Za izračun koordinat točke $\overline{\overline{T}}$ izhajamo iz enačb (1–4) za izračun koordinat točke T, le da uporabimo prava opazovanja:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{y}}_T &= \overline{d}\cos(\alpha) = (d+\Delta d)\cos(\alpha) = d\cos(\alpha) + \Delta d\cos(\alpha)\\ \overline{\overline{x}}_T &= \overline{d}\sin(\alpha) = (d+\Delta d)\sin(\alpha) = d\sin(\alpha) + \Delta d\sin(\alpha)\end{aligned} \tag{1–13}$$

Enačba (1–13) opisuje, kako pridemo od točke T do točke $\overline{\overline{T}}$. Točko T "potisnemo" v smeri $O \to T$ za vrednost Δd. Izračun pravih pogreškov neznank $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$ je:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta y_T} &= \overline{\overline{y}}_T - y_T = \Delta d\cos(\alpha)\\ \overline{\Delta x_T} &= \overline{\overline{x}}_T - x_T = \Delta d\sin(\alpha)\end{aligned} \tag{1–14}$$

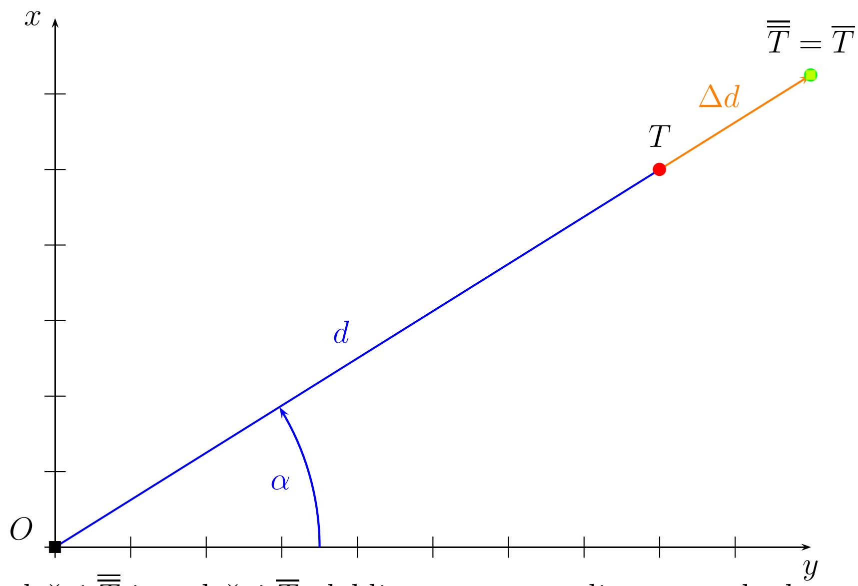
Iz enačb (1–14) vidimo, da sta oba prava pogreška $\overline{\Delta y_T}$ in $\overline{\Delta x_T}$ v linearni povezavi (odvisnosti) od pravega pogreška Δd, zato lahko enačbi (1–13) zapišemo kot:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{y}}_T &= \overbrace{d\cos(\alpha)}^{y_T} + \overbrace{\cos(\alpha)}^{y'_T(d)}\Delta d = y_T + y'_T(d)\Delta d = \overline{y}_T\\ \overline{\overline{x}}_T &= \underbrace{d\sin(\alpha)}_{x_T} + \underbrace{\sin(\alpha)}_{x'_T(d)}\Delta d = x_T + x'_T(d)\Delta d = \overline{x}_T\end{aligned} \tag{1–15}$$

Na osnovi enačbe (1–15) ugotovimo, da je pravilen izračun položaja točke $\overline{\overline{T}}$ povsem enak poenostavljenemu izračunu položaja točke $\overline{T}$, ki temelji na prenosu pravih pogreškov. To je mogoče samo zato, ker sta prava pogreška koordinat Δy_T in Δx_T linearno odvisna od pravega pogreška dolžine Δd. V tem primeru pri zakonu o prenosu pravih pogreškov pridemo do povsem točnih rezultatov.

1.3.3 Vpliv pravega pogreška kota in dolžine

Uporabimo zakon o prenosu pravih pogreškov še za izračun pravih pogreškov Δy_T in Δx_T, če imamo pogrešen tako kot α kot tudi dolžino d. Seveda gre za kombinacijo obeh zgornjih dveh poglavij, 1.3.1 in 1.3.2. Prava pogreška opazovanj sta $\Delta\alpha$ in Δd, opazovanji pa α in d. Sestavimo vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov opazovanj $\mathbf{\Delta x}$:



Slika 1–6: Pravi položaj $\overline{\overline{T}}$ in položaj $\overline{T}$, dobljen s poenostavljeno metodo, kot posledica prisotnosti pravega pogreška Δd

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} \tag{1–16}$$

Neznaki sta koordinati točke T, ki se izračunata kot (funkcijska povezava):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{1–17}$$

Po zakonu o prenosu pravih pogreškov, sestavimo matriko $\mathbf{J}$, ki ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial d} & \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_T}{\partial d} & \frac{\partial x_T}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -d\sin\alpha \\ \sin\alpha & d\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1–18}$$

Izračun pravih pogreškov neznank je podan z:

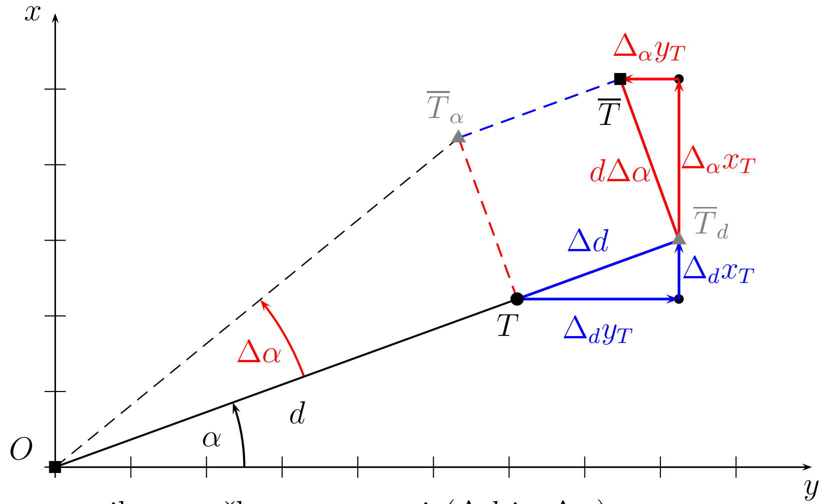
$$\begin{bmatrix} \Delta y_T \\ \Delta x_T \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -d\sin\alpha \\ \sin\alpha & d\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} \tag{1–19}$$

Glede na enačbo (1–19) lahko oba pogreška koordinat zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \Delta y_T &= \Delta d\cos\alpha + \Delta\alpha(-d\sin\alpha) = \Delta_d y_T + \Delta_\alpha y_T \\ \Delta x_T &= \Delta d\sin\alpha + \Delta\alpha\cos\alpha = \Delta_d x_T + \Delta_\alpha x_T \end{aligned} \tag{1–20}$$

V enačbi (1–20) $\Delta_d y_T$ in $\Delta_d x_T$ prikazujeta vpliv ali doprinos pravega pogreška dolžine Δd na prava pogreška Δy_T in Δx_T. Po drugi strani pa $\Delta_\alpha y_T$ in $\Delta_\alpha x_T$ prikazujeta doprinos pravega pogreška kota $\Delta\alpha$ na prava pogreška Δy_T in Δx_T. Slika 1–7 grafično prikazuje elemente $\Delta_d y_T$, $\Delta_d x_T$, $\Delta_\alpha y_T$ in $\Delta_\alpha x_T$.

Izračun pravih pogreškov neznank na osnovi zakona o prenosu pravih pogreškov nam omogoča enostavno izračunati tudi doprinose vseh pravih pogreškov opazovanj na prave pogreške vseh neznank. Na sliki 1–7 je prikazan vpliv obeh pravih pogreškov (Δd in $\Delta\alpha$) na prave pogreške neznank (Δy_T in Δx_T), kjer je razčlenjeno, kako pravi pogrešek vsakega opazovanja vpliva na pravi pogrešek vsake

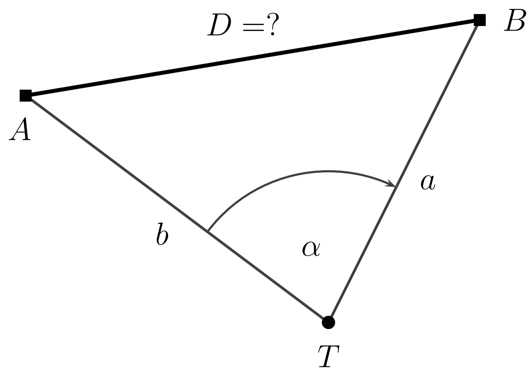


Slika 1–7: Doprinos pravih pogreškov opazovanj (Δd in $\Delta\alpha$) na prave pogreške neznank (Δy_T in Δx_T), preko elementov $\Delta_d y_T$, $\Delta_\alpha y_T$, $\Delta_d x_T$ in $\Delta_\alpha x_T$

neznanke. Na sliki so s črno predstavljena opazovanja (d in α) in položaj točke T iz merjenih vrednosti opazovanj. Točki $\overline{T}_d$ in $\overline{T}_\alpha$ prikazujeta prave koordinate točke, če imamo pogrešeno samo dolžino za Δd ali samo kot za $\Delta\alpha$. Točka $\overline{T}$ pa prikazuje prave koordinate točke, če imamo pogrešeni obe opazovanji. Z modro barvo je označen doprinos pravega pogreška Δd na prava pogreška obeh koordinat, to sta $\Delta_d y_T$ in $\Delta_d x_T$, z usmerjenostjo puščic sta prikazana tudi predznaka obeh doprinosov. Po drugi strani pa je z rdečo barvo označen doprinos pravega pogreška $\Delta\alpha$ na prava pogreška obeh koordinat, to sta $\Delta_\alpha y_T$ in $\Delta_\alpha x_T$. Tudi tu usmerjenosti puščic predstavljata predznak obeh elementov. Vidimo, da se doprinosa pravih pogreškov opazovanj v smeri osi x seštejeta, medtem ko se v smeri osi y odštejeta.

1.4 Primer 1 –Dolžina med točkama posredno

Določiti želimo dolžino D med točkama A in B. Ker pa je med točkama ovira, dolžine neposredno ne moremo izmeriti, zato smo stabilizirali začasno točko T, na kateri smo izmerili dve stranici (a in b) in en kot (α). Situacijo prikazuje slika 1–8. Opazovanja s pripadajočimi pravimi pogreški so: $a = 40{,}00\,\mathrm{m}$ ($\Delta a = 0{,}03\,\mathrm{m}$), $b = 60{,}00\,\mathrm{m}$ ($\Delta b = -0{,}05\,\mathrm{m}$) in $\alpha = 45°$ ($\Delta\alpha = 2{,}5'$). Izračunajte dolžino D, njen pravi pogrešek ΔD in pravo vrednost $\overline{D}$. Prikažite tudi, kakšni so doprinosi pravih pogreškov posameznih opazovanj (Δa, Δb in $\Delta\alpha$) na pravi pogrešek neznanke ($\Delta_a D$, $\Delta_b D$ in $\Delta_\alpha D$).



Slika 1–8: Prikaz meritev za določitev dolžine D

Postopamo po korakih izračuna, ki so predstavljeni v poglavju 1.2.

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   V navodilih so podana tri opazovanja, to sta stranici a in b ter kot α, saj imamo za vsa tri opazovanja podane tudi prave pogreške ($n = 3$). Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ sta velikosti 3×1. Vanju vstavimo numerične vrednosti opazovanj, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40{,}00\,\mathrm{m} \\ 60{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}7853982 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}05\,\mathrm{m} \\ 0{,}0007272 \end{bmatrix} \tag{1–21}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Zanima nas dolžina D med točkama A in B. Neznanka je torej ena ($m = 1$). Vektor neznank $\mathbf{y}$ je velikosti 1×1 in je podan z:
$$\mathbf{y} = [D] \tag{1–22}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Dolžino D moramo izraziti z stranicama a in b ter kotom α. S slike 1–8 vidimo, da imamo trikotnik, kjer imamo izmerjeni dve stranici in vmesni kot, računamo pa tretjo stranico. Uporabimo torej kosinusni izrek in dobimo:
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \tag{1–23}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Uporabimo enačbo (1–23) v katero vstavimo vrednosti opazovanj iz enačbe (1–21) in izračunamo:
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = 42{,}496\,\mathrm{m} \tag{1–24}$$
   V enačbi (1–24) smo dobili "približno" vrednost dolžine D, saj je le-ta izračunana iz pogrešenih vrednosti opazovanj.

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Ker imamo eno neznanko ($m = 1$) in tri opazovanja ($n = 3$), moramo izračunati tri parcialne odvode in jih damo v matriko $\mathbf{J}$, velikosti 1×3 in oblike:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial a} & \frac{\partial D}{\partial b} & \frac{\partial D}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \tag{1–25}$$
   Zelo pomembno je, da je vrstni red opazovanj, po katerih odvajamo v matriki $\mathbf{J}$, enak vrstnemu redu opazovanj iz vektorja $\mathbf{x}$. Parcialni odvodi so enaki:
$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{a - b\cos\alpha}{D} = -0{,}05710 \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{a - b\cos\alpha}{D} = 0{,}74633 \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha} &= \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{ab\sin\alpha}{D} = 39{,}935\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–26}$$
   Matrika $\mathbf{J}$ je zato:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0{,}05710 & 0{,}74633 & 39{,}935\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–27}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose ($\Delta_{x_i} y_j$) posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J\Delta x}$ ima obliko:
$$\mathbf{\Delta y} = [\Delta D] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \left[\frac{\partial D}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial D}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial D}{\partial \alpha}\Delta\alpha \right] \tag{1–28}$$
   Obliko pravega pogreška ΔD iz enačbe (1–28) dobimo z upoštevanjem pravil množenja matrike ($\mathbf{J}$) z vektorjem ($\mathbf{\Delta x}$). Vse tri količine v vsoti na desni lahko označimo z:
$$\begin{aligned} \Delta_a D &= \frac{\partial D}{\partial a}\Delta a = -0{,}002\,\mathrm{m} \\ \Delta_b D &= \frac{\partial D}{\partial b}\Delta b = -0{,}037\,\mathrm{m} \\ \Delta_\alpha D &= \frac{\partial D}{\partial \alpha}\Delta \alpha = 0{,}029\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–29}$$
   Produkti parcialnih odvodov neznank po opazovanjih s pripadajočimi pravimi pogreški opazovanj smo označili z $\Delta_a D$, $\Delta_b D$ in $\Delta_\alpha S$ in predstavljajo doprinose pravih pogreškov opazovanja k pravemu pogrešku neznanke. Končna vrednost pravega pogreška ΔD je:
$$\mathbf{\Delta y} = [\Delta D] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = [\Delta_a D + \Delta_b D + \Delta_\alpha D] = -0{,}010\,\mathrm{m} \tag{1–30}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = [D] + [\Delta D] = 42{,}486\,\mathrm{m} \tag{1–31}$$

1.5 Primer 2 – Trigonometrično višinomerstvo:

S postopkom trigonometričnega višinomerstva želimo določiti višino H_B točke B, pri tem, da imamo podano višino $H_A = 321{,}00$ m točke A, na katero smo prisilno centrirali tahimeter in izmerili njegovo višino $i = 25$ cm. Na točko B smo postavili reflektor na višino $l = 2{,}00$ m, ki ima pravi pogrešek $\Delta l = 5\,\mathrm{mm}$. S tahimetrom smo izmerili poševno dolžino $s = 100{,}00\,\mathrm{m}$, s pravim pogreškov $\Delta s = -1\,\mathrm{cm}$, in zenitno razdaljo $z = 85°$, s pravim pogreškom $\Delta z = -15''$. Izračunajte višino točke H_B točke B, s postopkom prenosa pravih pogreškov izračunajte pravi pogrešek višine ΔH_B in njeno pravo višino $\overline{H_B}$. Izračunajte, kakšen je doprinos posameznega pravega pogreška opazovanj (Δs, Δz in Δl) na izračunano vrednost pravega pogreška ΔH_B.

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Ko sestavljamo vektor opazovanj $\mathbf{x}$, moramo razlikovati med opazovanji in konstantami. Kot opazovanja obravnavamo vse podatke, za katere imamo podane prave pogreške. Iz naloge je razvidno, da imajo prave pogreške podana opazovanja s, z in l, medtem ko H_A in i nimata podanega pravega pogreška, zato sta obravnavana kot konstanti. Število opazovanj je $n = 3$, dimenzija vekorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{\Delta x}$ pa je zato 3×1. Vanju vstavimo numerične vrednosti opazovanj, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100{,}000\,\mathrm{m} \\ 1{,}48352986 \\ 2{,}000\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta z \\ \Delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}010\,\mathrm{m} \\ -0{,}00007272 \\ 0{,}005\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–32}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati višino H_B točke B, zato imamo eno samo neznanko $(m = 1)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} H_B \end{bmatrix} \tag{1–33}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Enačba za izračun višine H_B s tremi opazovanji s, z in l ter dvema konstantama H_A in i je:
$$H_B = H_A + s\cos z + i - l \tag{1–34}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Uporabimo numerične vrednosti iz vektorja $\mathbf{x}$, vrednosti konstant iz navodil naloge in izračunamo H_B in zgornjo enačbo (1–34):
$$H_B = H_A + s\cos z + i - l = 327{,}9656\,\mathrm{m} \tag{1–35}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunamo vse parcialne odvode neznanke H_B po vseh treh opazovanjih in sestavimo matriko

$\mathbf{J}$. Ker imamo eno samo neznanko ($m = 1$) in tri opazovanja ($n = 3$) je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 1×3 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_B}{\partial s} & \frac{\partial H_B}{\partial z} & \frac{\partial H_B}{\partial l} \end{bmatrix} \tag{1–36}$$

Zelo pomembno je, da je vrstni red opazovanj, po katerih odvajamo v matriki $\mathbf{J}$, enak vrstnemu redu opazovanj iz vektorja $\mathbf{x}$. Parcialni odvodi in matrika $\mathbf{J}$ so:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos z & -s \sin z & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}087156 & -99{,}61947 & -1{,}00 \end{bmatrix} \tag{1–37}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose $(\Delta_{x_i} y_j)$ posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Ker imamo eno samo neznanko, bo tudi izračunan en sam pravi pogrešek, torej $\mathbf{\Delta y} = \Delta H_B$. Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\begin{aligned} \Delta H_B = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} &= \frac{\partial H_B}{\partial s}\Delta s + \frac{\partial H_B}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial H_B}{\partial l}\Delta l \\ &= -0{,}00087\,\text{m} + 0{,}00724\,\text{m} - 0{,}005\,\text{m} = 0{,}0014\,\text{m} \end{aligned} \tag{1–38}$$

   Produkte parcialnih odvodov neznanke po opazovanjih in pripadajočih pravih pogreškov opazovanj lahko označimo z $\Delta_s H_B$, $\Delta_z H_B$ in $\Delta_l H_B$ in imajo obliko ter vrednosti:

$$\begin{aligned} \Delta_s H_B &= \frac{\partial H_B}{\partial s}\Delta s = \cos z \cdot \Delta s = -0{,}00087\,\text{m} \\ \Delta_z H_B &= \frac{\partial H_B}{\partial z}\Delta z = -s \sin z \cdot \Delta z = 0{,}00724\,\text{m} \\ \Delta_l H_B &= \frac{\partial H_B}{\partial l}\Delta l = -1 \cdot \Delta l = -0{,}005\,\text{m} \end{aligned} \tag{1–39}$$

   Količine $\Delta_s H_B$, $\Delta_z H_B$ in $\Delta_l H_B$ prikazujejo doprinos posameznega pravega pogreška opazovanj (Δs, Δz in Δl) pravemu pogrešku neznanke ΔH_B. Na ta način lahko ugotovimo, pravi pogrešek katerega opazovanja povzroči največji prirastek pravega pogreška neznanke. Iz oblike enačbe lahko ugotovimo tudi, kako geometrija problema vpliva na prenos pravega pogreška posameznega opazovanja k pravemu pogrešku neznanke.

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{H_B} = H_B + \Delta H_B = 327{,}9669\,\text{m} \tag{1–40}$$

1.5.1 Numerična analiza prenosa pravih pogreškov

Pri numerični analizi postopka prenosa pravih pogreškov nas zanima, kako točno dobimo rezultate postopka. To preverimo preprosto tako, da izračunamo pravo vrednost neznanke $\overline{\overline{H_B}}$, in sicer tako, da jo izračunamo na osnovi pravih vrednosti opazovanj ($\overline{s}$, $\overline{z}$ in $\overline{l}$):

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{s} \\ \overline{z} \\ \overline{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \Delta s \\ z + \Delta z \\ l + \Delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99{,}990\,\text{m} \\ 1{,}48345714 \\ 2{,}005\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–41}$$

Izračunana prava vrednost neznanke $\overline{\overline{H_B}}$ na osnovi pravih vrednosti opazovanj $\overline{\mathbf{x}}$ je:

$$\overline{\overline{H_B}} = H_A + \overline{s}\cos\overline{z} + i - \overline{l} = 327{,}9669\,\mathrm{m} \tag{1–42}$$

Razlika $\Delta\overline{H_B}$ med pravo vrednostjo $\overline{\overline{H_B}}$ iz pravih opazovanj in pravo vrednostjo $\overline{H_B}$ s prenosom pravih pogreškov je:

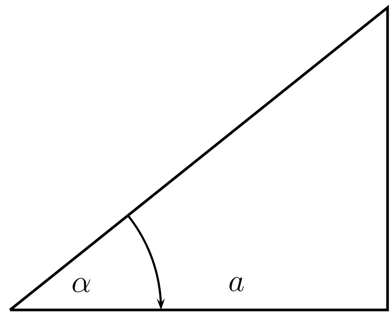
$$\Delta\overline{H_B} = \overline{\overline{H_B}} - \overline{H_B} = -7{,}475 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \tag{1–43}$$

Doprinos pravega pogreška posameznega opazovanja k končnemu izračunu neznanke izračunamo tako, da namesto prave vrednosti opazovanja uporabimo približno, torej:

$$\begin{aligned}
\Delta_s\overline{\overline{H_B}} &= \overline{\overline{H_B}} - (H_A + s\cos\overline{z} + i - \overline{l}) = -0{,}00087\,\mathrm{m}\\
\Delta_z\overline{\overline{H_B}} &= \overline{\overline{H_B}} - (H_A + \overline{s}\cos z + i - \overline{l}) = 0{,}0072\,\mathrm{m}\\
\Delta_l\overline{\overline{H_B}} &= \overline{\overline{H_B}} - (H_A + \overline{s}\cos\overline{z} + i - l) = 0{,}005\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{1–44}$$

1.6 Primer 3 – Pravokotni trikotnik

Parcela ima obliko pravokotnega trikotnika, kot to prikazuje slika 1–9. Da bi določili površino S in obseg O parcele, smo opazovali kateto a in kot α ter dobili: $a = 25{,}00\,\mathrm{m}$ ($\Delta a = -25\,\mathrm{mm}$) in $\alpha = 30°$ ($\Delta\alpha = 2'$). Izračunajte povšino S in obseg O parcele, njuna prava pogreška ΔS in ΔO ter njuni pravi vrednosti $\overline{S}$ in $\overline{O}$.



Slika 1–9: Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \dots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   V navodilih sta podani dve opazovanji, to sta stranica a in kot α, saj imamo za obe opazovanji podana tudi prava pogreška. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta velikosti 2×1. Vanju vstavimo numerične vrednosti opazovanj, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}52359878 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}025\,\mathrm{m} \\ 0{,}00058178 \end{bmatrix} \tag{1–45}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \dots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati površino S in obseg O parcele, zato imamo dve neznanki $(m = 2)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} \tag{1–46}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \dots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \dots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
   Pokazati moramo, kako se obe neznanki izračunata na osnovi opazovanj. Za izračun obeh neznank prvo potrebujemo izračun ostalih dveh stranic, druge katete b (nasproti kota α) in hipotenuze c. Iz definicij kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku lahko ugotovimo, da:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \tan\alpha \quad \rightarrow \quad b = a\tan\alpha \\ \frac{a}{c} &= \cos\alpha \quad \rightarrow \quad c = \frac{a}{\cos\alpha} \end{aligned} \tag{1–47}$$

Izračun obeh neznank je torej dan z:

$$S = \frac{ab(a,\alpha)}{2} \qquad O = a + b(a,\alpha) + c(a,\alpha) \tag{1–48}$$

V zgornjih enačbah je izredno pomembno, da vemo, da sta obe ostali stranici, b in c, odvisni od obeh opazovanj, a in α, zato moramo enačbi za izračun obeh neznank zapisati tako, da bodo na desni strani enačbe le opazovanja:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2 \tan\alpha}{2} \\ O &= a + a\tan\alpha + \frac{a}{\cos\alpha} \end{aligned} \tag{1–49}$$

Tako zapisani enačbi sta podani v končni obliki. Dejansko sta enačbi (1–48) in (1–49) enakovredni, a je pomembno, da končne enačbe zapišemo tako, da na desni strani nastopajo le še opazovanja in ne kakšna izpeljana količina. Tako bomo lažje odvajali po vseh opazovanjih in dobili prave vrednosti odvodov.

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor **y**. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj (**x**).
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj, uporabimo zgornji enačbi za izračun neznank in izračunamo:
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2\tan\alpha}{2} \\ a + a\tan\alpha + \frac{a}{\cos\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180{,}422\,\mathrm{m}^2 \\ 68{,}301\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–50}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko **J** velikosti $m \times n$.
   Izračunamo vse parcialne odvode obeh neznank po obeh opazovanjih in sestavimo matriko **J**. Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in dve opazovanji ($n = 2$) je matrika **J** dimenzije 2×2 in ima obliko:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial a} & \frac{\partial S}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial O}{\partial a} & \frac{\partial O}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \tag{1–51}$$
   Zelo pomembno je, da je vrstni red opazovanj, po katerih odvajamo v matriki **J**, enak vrstnemu redu opazovanj iz vektorja **x**. Parcialni odvodi in matrika **J** so:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a\tan\alpha & \frac{a^2}{2\cos^2\alpha} \\ 1 + \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} & \frac{a}{\cos^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}43376 & 416{,}66666667 \\ 2{,}73205 & 50{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–52}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose $(\Delta_{x_i} y_j)$ posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:
$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta O \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial S}{\partial \alpha}\Delta\alpha \\ \frac{\partial O}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial O}{\partial \alpha}\Delta\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}118\,\mathrm{m}^2 \\ -0{,}039\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–53}$$
   Produkte parcialnih odvodov neznanke po opazovanjih in pripadajočih pravih pogreškov opazovanj lahko označimo z $\Delta_a S$, $\Delta_\alpha S$, $\Delta_a O$ in $\Delta_\alpha O$ in predstavljajo doprinose pravega pogreška

posameznega opazovanja k pravemu pogrešku obeh neznank. Določeni so z:

$$\begin{aligned} \Delta_a S &= \frac{\partial S}{\partial a}\Delta a = -0{,}361\,\mathrm{m}^2 & \Delta_\alpha S &= \frac{\partial S}{\partial \alpha}\Delta \alpha = 0{,}242\,\mathrm{m}^2 \\ \Delta_a O &= \frac{\partial O}{\partial a}\Delta a = -0{,}068\,\mathrm{m} & \Delta_\alpha O &= \frac{\partial O}{\partial \alpha}\Delta \alpha = 0{,}029\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–54}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta S \\ \Delta O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180{,}304\,\mathrm{m}^2 \\ 68{,}262\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–55}$$

1.7 Primer 4 – Geodetski kartezični / polarni koordinatni sistem

Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi pravimi pogreški, in sicer $A(y_A, x_A) = (461\,300\,\mathrm{m}, 100\,600\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_A = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\Delta x_A = -0{,}075\,\mathrm{m}$) in $B(y_B, x_B) = (461\,500\,\mathrm{m}, 100\,500\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_B = -0{,}08\,\mathrm{m}$, $\Delta x_B = 0{,}05\,\mathrm{m}$). Izračunaj komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, to so: dolžina med točkama d_{AB} in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A. Ker so koordinate točk A in B pogrešene, izračunaj tudi prave pogreške vseh iskanih količin (Δd_{AB}, $\Delta\nu_A^B$ in $\Delta\nu_B^A$) ter njihove prave vrednosti ($\overline{d_{AB}}$, $\overline{\nu_A^B}$ in $\overline{\nu_B^A}$).

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Podana imamo štiri opazovanja ($n = 4$), vse koordinate obeh točk, zato sta vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ velikosti 4×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,300\,\mathrm{m} \\ 100\,600\,\mathrm{m} \\ 461\,500\,\mathrm{m} \\ 100\,500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}100\,\mathrm{m} \\ -0{,}075\,\mathrm{m} \\ -0{,}080\,\mathrm{m} \\ 0{,}050\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–56}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati tri neznanke ($m = 3$), vse tri komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} \tag{1–57}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izračun neznank izhaja iz enačb pretvorbe med geodetskim kartezičnim in geodetskim polarnim koordinatnim sistemom. Velja (za oba kota pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \\ \nu_A^B &= \arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ \nu_B^A &= \arctan\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{aligned} \tag{1–58}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za oba kota pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 223{,}607\,\mathrm{m} \\ 116^\circ 33' 54'' \\ 296^\circ 33' 54'' \end{bmatrix} \tag{1–59}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$
   Ker imamo tri neznanke ($m = 3$) in štiri opazovanja ($n = 4$), je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 3×4 in ima obliko (parcialne odvode izpeljite sami za vajo):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8944 & 0{,}4472 & 0{,}8944 & -0{,}4472 \\ 0{,}002 & 0{,}004 & -0{,}002 & -0{,}004 \\ 0{,}002 & 0{,}004 & -0{,}002 & -0{,}004 \end{bmatrix} \quad (1\text{–}60)$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose ($\Delta_{x_i} y_j$) posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:

$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta d_{AB} \\ \Delta \nu_A^B \\ \Delta \nu_B^A \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} -0{,}217\,\mathrm{m} \\ -29'' \\ -29'' \end{bmatrix} \quad (1\text{–}61)$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta d_{AB} \\ \Delta \nu_A^B \\ \Delta \nu_B^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 223{,}390\,\mathrm{m} \\ 116^\circ 33' 25'' \\ 296^\circ 33' 25'' \end{bmatrix} \quad (1\text{–}62)$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

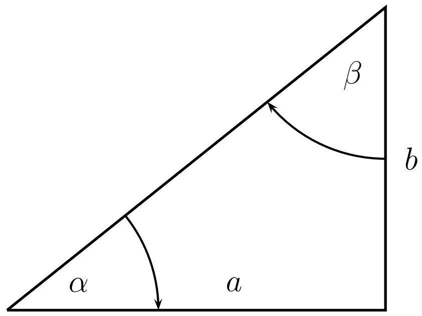
- Ali je pravi pogrešek Δd_{AB} odvisen od dolžine d_{AB} med točkama A in B? Če bi razdaljo daljšali/krajšali, ali se s tem spreminja pravi pogrešek d_{AB}? Kako bi to lahko pokazali?
  Pravi pogrešek Δd_{AB} je neodvisen od razdalje med točkama. To pokažemo tako, da ugotovimo, da so parcialni odvodi d_{AB} po vseh opazovanjih brez enot, torej brez-dimenzijska števila, izkaže se, da so enaka ali $\pm \cos \nu_A^B$ ali $\pm \sin \nu_A^B$.

- Ali sta prava pogreška $\Delta \nu_A^B$ in $\Delta \nu_B^A$ odvisna od dolžine d_{AB}? Kako bi to lahko pokazali?
  V primeru pravih pogreškov $\Delta \nu_A^B$ in $\Delta \nu_B^A$ je pa ravno obratno. Oba sta odvisna od razdalje d_{AB}. Spet pogledamo parcialne odvode obeh smernih kotov po vseh koordinatah in ugotovimo, da so enaki $\pm \cos \nu_A^B / d_{AB}$ ali $\pm \sin \nu_A^B / d_{AB}$. Iz tega sledi, da večja kot je razdalja d_{AB}, manjši bo pravi pogrešek smernega kota.

- Kaj lahko rečemo za prava pogreška $\Delta \nu_A^B$ in $\Delta \nu_B^A$? Zakaj imata tako vrednost? Ali bi lahko $\Delta \nu_B^A$ izračunali iz $\Delta \nu_A^B$ in tako imeli v zgornjem računu samo dve neznanki (d_{AB} in ν_A^B) in si s tem prihranili številne račune?
  Prava pogreška $\Delta \nu_A^B$ in $\Delta \nu_B^A$ sta enaka in to vedno. Enaka sta zato, ker velja $\nu_B^A = \nu_A^B + 180^\circ$. Med smernima kotoma velja linearna zveza in ko se spreminja eden, se v isti meri spreminja tudi drugi. To znanje bi lahko uporabili vnaprej in nastavili le dve neznanki (d_{AB} in ν_A^B), na koncu pa samo zaključili z $\Delta \nu_B^A = \Delta \nu_A^B$.

1.8 Primer 5 – Parcela, stranice merjene z merskim trakom

Parcela ima obliko pravokotnega trikotnika, kot to prikazuje slika 1–10. Z merskim trakom dolžine $l = 30{,}00\,\mathrm{m}$ smo izmerili obe kateti in dobili $a = 61{,}090\,\mathrm{m}$ in $b = 50{,}170\,\mathrm{m}$. Naknadno smo ugotovili, da je merski trak 3 cm prekratek, zato sta obe meritvi pogrešeni. Izračunajte oba notranja kota α in β, njuna prava pogreška $\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$ ter njuni pravi vrednosti $\overline{\alpha}$ in $\overline{\beta}$.



Slika 1–10: Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \dots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Obe stranici, a in b, smo izvedli z merskim trakom, ki vemo, da je pogrešen, zato moramo prvo določiti pravi pogrešek merskega traku Δl. Merjena (približna) vrednost je $l = 30{,}00\,\mathrm{m}$, podano pa imamo informacijo, "*da je merski trak* 3 cm *prekratek*". Izjava pomeni, da če bi naš merski trak položili poleg točnega merskega traku, bi naš merski trak prišel le do dolžine $\overline{l} = 29{,}97\,\mathrm{m}$ na tem točnem merskem traku. Pravi pogrešek našega merskega traku tako dobimo kot:

$$\Delta l = \overline{l} - l = 29{,}97\,\mathrm{m} - 30{,}00\,\mathrm{m} = -0{,}03\,\mathrm{m} \tag{1–63}$$

   Ključno pri enačbi (1–63) je, da določimo pravi predznak pravega pogreška Δl, izhajamo pa iz osnovne definicije pravega pogreška, ki predstavlja razliko; *prava vrednost - merjena vrednost.*

   Sedaj, ko vemo kakšen je pravi pogrešek Δl lahko izračunamo tudi prava pogreška obeh opazovanj Δa in Δb. Razmislek gre takole. Če bi bila stranica a dolga točno 30,00 m, potem velja $\Delta a = \Delta l$. V primeru, ko pa bi bila stranica a dolga točno $2 \cdot l = 60{,}00\,\mathrm{m}$, pa bi bil $\Delta a = 2\Delta l$. Gre torej za premo sorazmerje, ki ga lahko zapišemo kot:

$$\frac{\Delta a}{\Delta l} = \frac{a}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta a = \frac{a}{l}\Delta l \tag{1–64}$$

   Oba prava pogreška opazovanih stranic sta tako:

$$\Delta a = \frac{a}{l}\Delta l = -0{,}061\,\mathrm{m} \qquad \Delta b = \frac{b}{l}\Delta l = -0{,}050\,\mathrm{m} \tag{1–65}$$

   Sedaj lahko sestavimo vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ (oba velikosti 2×1):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61{,}090\,\mathrm{m} \\ 50{,}170\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}061\,\mathrm{m} \\ -0{,}050\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–66}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \dots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati oba notranja kota, α in β parcele, zato imamo dve neznanki $(m = 2)$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{1–67}$$
3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \dots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \dots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
   Izračun obeh kotov iz obeh katet izhaja iz osnovnih kotnih funkcij pravokotnega trikotnika:
$$\alpha = \arctan\frac{b}{a} \qquad \beta = \arctan\frac{a}{b} \tag{1–68}$$
4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj, uporabimo zgornji enačbi za izračun neznank in izračunamo:
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\frac{b}{a} \\ \arctan\frac{a}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39°23'40'' \\ 50°36'20'' \end{bmatrix} \tag{1–69}$$
5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunamo vse parcialne odvode obeh neznank po obeh opazovanjih in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Ker imamo dve neznanki $(m = 2)$ in dve opazovanji $(n = 2)$ je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×2 in ima obliko:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial a} & \frac{\partial\alpha}{\partial b} \\ \frac{\partial\beta}{\partial a} & \frac{\partial\beta}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}00803 & 0{,}00978 \\ 0{,}00803 & -0{,}00978 \end{bmatrix} \tag{1–70}$$
6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose $(\Delta_{x_i} y_j)$ posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:
$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} 0{,}0'' \\ 0{,}0'' \end{bmatrix} \tag{1–71}$$
7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:
$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39°23'40'' \\ 50°36'20'' \end{bmatrix} \tag{1–72}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Prikažite, kakšni so doprinosi pogreškov posameznih opazovanj (Δa in Δb) na prave pogreške neznank ($\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$).
  Doprinosi so sledeči: pri α velja $\Delta_a\alpha = 0°1'41{,}1''$, $\Delta_b\alpha = -0°1'41{,}1''$ (velja $\Delta_b\alpha = -\Delta_a\alpha$). Podobno še za β, $\Delta_a\beta = -0°1'41{,}1''$, $\Delta_b\beta = 0°1'41{,}1''$ (velja $\Delta_b\beta = -\Delta_a\beta$).

- Kaj lahko rečemo za prava pogreška $\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$? Zakaj imata tako vrednost? Ali bi take rezultate lahko pričakovali v naprej?
  Razvidno je, da za oba prava pogreška velja $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0°0'0{,}0''$. *Prava pogreška sta oba enaka in točno enaka nič, kar pomeni, da v takem merskem postopku ne naredimo nobene napake na izračunana notranja kota trikotnika. Zakaj to velja? Ker sta prava pogreška obeh stranic* Δa *in* Δb *vedno v enakem razmerju, v razmerju* $\Delta a/\Delta b = a/b$ *in odvisna le od* Δl, *se oblika parcele (pravokotnega trikotnika) ne spreminja, spreminja se le njegova velikost. Vsi ti trikotniki so si med seboj podobni. To znanje bi seveda lahko predhodno uporabili in že takoj ugotovili, da na notranja kota pravi pogreški opazovanj ne vplivajo. Ima pa ta naloga pomemben zaključek. Zaradi geometrijskih lastnosti nalog se lahko zgodi, da imamo pogreške v opazovanjih, ki pa nimajo nobenega vpliva na izračunane neznanke. Podoben primer je tudi, če določamo višino točke s trigonometričnim višinomerstvom. Ko je zenitna razdalja z točno* $90°$, *pogrešek izmerjene dolžine* Δs *nič ne vpliva na pravi pogrešek višine končne točke.*

1.9 Primer 6 – Slepi poligon

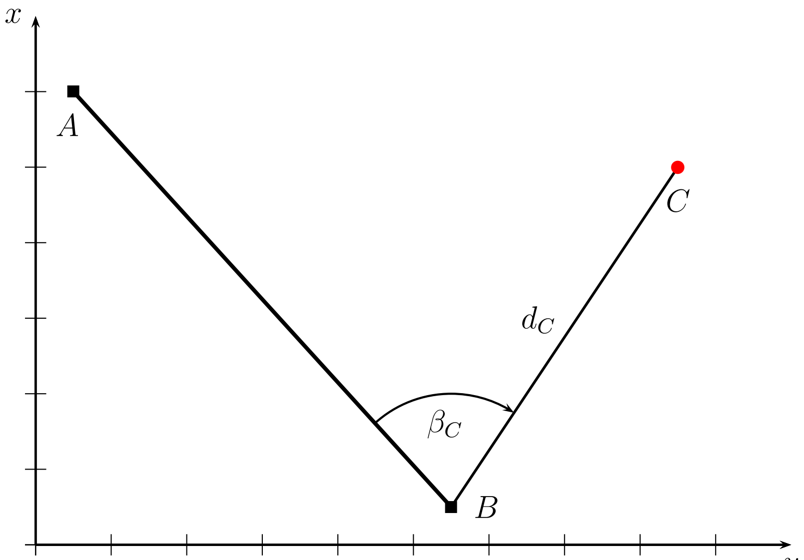
Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi pravimi pogreški, in sicer:

- $A(y_A, x_A) = (461\,300\,\mathrm{m}, 100\,600\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_A = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\Delta x_A = -0{,}075\,\mathrm{m}$) in
- $B(y_B, x_B) = (461\,400\,\mathrm{m}, 100\,550\,\mathrm{m})$ ($\Delta y_B = -0{,}08\,\mathrm{m}$, $\Delta x_B = 0{,}05\,\mathrm{m}$).

Do nove točke $C(y_C, x_C)$ smo izmerili obe opazovanji poligona, in sicer:

- priklepni kot $\beta_C = 90°$ ($\Delta\beta_C = 2'$) in
- dolžino $d_C = 75{,}00\,\mathrm{m}$ ($\Delta d_C = 0{,}05\,\mathrm{m}$).

Prikaz izmere je podan na sliki 1–11. Izračunaj koordinate točke (y_C, x_C), njuna prava pogreška $(\Delta y_C, \Delta x_C)$ in njuni pravi vrednosti $(\overline{y_C}, \overline{x_C})$.



Slika 1–11: Skica opazovanj slepega poligona

Preden se lotimo izračuna, pokažimo, kako se izračuna položaj točke C glede na podatke in skico 1–11. Iz izračuna poligona vemo, da gre postopek takole:

- Izračun smernega kota ν_B^C, ki ga izračunamo na osnovi smernega kota ν_A^B in priklepnega kota β_C. Enačba se glasi:

$$\nu_B^C = \nu_A^B + \beta_C - 180° \tag{1–73}$$

Smerni kot na izbrani točki v poligonu proti njeni naslednjici izračunamo tako, da uporabimo smerni kot na točki predhodnici in priklepni kot na izbrani točki do naslednjice. Začetni smerni kot poligona izračunamo iz danih točk A in B, tako da se zgornja enačba v celoti zapiše kot:

$$\nu_B^C = \nu_A^B + \beta_C - 180° = \arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180° \tag{1–74}$$

Tu je pomembno, da vidimo, da se smerni kot ν_B^C izračuna iz številnih količin, to so: koordinate točke $A(y_A, x_A)$ in $B(y_B, x_B)$ ter priklepnega kota β_C.

- Izračun razlik koordinat od točke B do točke $C(y_B^C, x_B^C)$, ki sledi pretvorbi iz geodetskega polarnega v geodetski kartezični koordinatni sistem. Velja:

$$\begin{aligned} y_B^C &= d_C \sin \nu_B^C \\ x_B^C &= d_C \cos \nu_B^C \end{aligned} \tag{1–75}$$

(Oznaki za razliko koordinat sta podani brez znaka Δ, da se ne zamenja s pravim pogreškom.)

- Izračun koordinat točke C (y_C, x_C):

$$y_C = y_B + y_B^C \qquad x_C = x_B + x_B^C \tag{1–76}$$

Če sedaj vse skupaj sestavimo in zapišemo koordinate točke C (y_C, x_C) tako, da bomo na desni strani enačaja imeli samo osnovne podatke (iz naloge), potem velja:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°\right) \end{aligned} \tag{1–77}$$

Zgornji dve enačbi predstavljata izhodišče za izračun rezultatov podane naloge. Rešili pa jo bomo na dva načina, v enem koraku in v dveh korakih. Razlike bodo pojasnjene sproti.

1.9.1 Rešitev v enem koraku:

Izhajamo iz postopka prenosa pravih pogreškov, kot smo ga vajeni:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Pregledamo, kateri podatki imajo podane prave pogreške in ugotovimo, da jih je 6 $(n = 6)$, in sicer; koordinate obeh danih točk A in B ter obe opazovanji v poligonu, priklepni kot β_C in dolžina d_C. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ sta zato velikosti 6×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_C \\ \beta_C \\ y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta d_C \\ \Delta \beta_C \\ \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix} \tag{1–78}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Naloga od nas zahteva, da izračunamo dve koordinati $(m = 2)$ točke C, torej y_C in x_C. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} \tag{1–79}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izhajamo iz obeh enačb (1–77) za izračun koordinat točke C, torej:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\arctan\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \beta_C - 180°\right) \end{aligned} \tag{1–80}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za smerni kot pravilno upoštevajte kvadrante!):
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433{,}541\,\mathrm{m} \\ 100\,617{,}082\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–81}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Ker imamo dve neznanki ($m = 2$) in šest opazovanja ($n = 6$), je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×6 in ima obliko:
$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_C}{\partial d_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial y_C}{\partial y_A} & \frac{\partial y_C}{\partial x_A} & \frac{\partial y_C}{\partial y_B} & \frac{\partial y_C}{\partial x_B} \\ \frac{\partial x_C}{\partial d_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial x_C}{\partial y_A} & \frac{\partial x_C}{\partial x_A} & \frac{\partial x_C}{\partial y_B} & \frac{\partial x_C}{\partial x_B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}44721 & 67{,}08204 & 0{,}26833 & 0{,}53666 & 0{,}73167 & -0{,}53666 \\ 0{,}89443 & -33{,}54102 & -0{,}13416 & -0{,}26833 & 0{,}13416 & 1{,}26833 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1–82}$$
   Na kratko o tem, kako se računa parcialne odvode. Enostavna sta prva dva parcialna odvoda v prvi vrstici, saj velja:
$$\frac{\partial y_C}{\partial d_C} = \sin \nu_B^C \qquad \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} = d_C \cos \nu_B^C \tag{1–83}$$
   pri ostalih se pa malo zakomplicira, uporabiti je potrebno ti, "čebulno" pravilo, saj npr. odvod po y_A pomeni prvo odvod sin, nato arctan, potem pa še ulomka, kjer je naša spremenljivka v števcu (predznak pa je minus):
$$\frac{\partial y_C}{\partial y_A} = d_C \cos \nu_B^C \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x_B - x_A} \tag{1–84}$$
   Podobno se odvaja še po ostalih spremenljivkah, vidi pa se, da se odvodi po vseh štirih koordinatah točk A in B spreminajajo samo po zadnjem členu (preverite sami).

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose ($\Delta_{x_i} y_j$) posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:
$$\mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} -0{,}037\,\mathrm{m} \\ 0{,}085\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–85}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:
$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433{,}504\,\mathrm{m} \\ 100\,617{,}167\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–86}$$

1.9.2 Rešitev v dveh korakih:

Pri rešitvi v dveh korakih, bomo v prvem koraku izračunali smerni kot ν_A^B in njegov pravi pogrešek $\Delta \nu_A^B$. V drugem koraku pa bomo izračunali koordinati y_C in x_C ter pripadajoča prava pogreška Δy_C in Δx_C. Kaj s tem pridobimo, ko računamo v dveh korakih? Odvodi obeh koordinat po opazovanjih bodo veliko bolj enostavni.

Korak 1: Izračun ν_A^B in $\Delta\nu_A^B$

Prenos pravih pogreškov za izračunan smerni kot je detajlno opisan v primeru poglavja 1.7, z naslovom Primer 6 – Geodetski kartezični / polarni koordinatni sistem, zato bomo tu zapisali samo rezultate:

1. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ sta velikosti 4×1:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta y_A \\ \Delta x_A \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix} \tag{1–87}$$
2. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je:
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \nu_A^B \end{bmatrix} \tag{1–88}$$
3. Smerni kot ν_A^B se izračuna kot:
$$\nu_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{1–89}$$
4. Izračunana neznanka je:
$$\mathbf{y} = \nu_A^B = 116°33'54{,}2'' \tag{1–90}$$
5. Matrika $\mathbf{J}$ je dimenzije 1×4:
$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}004 & 0{,}008 & -0{,}004 & -0{,}008 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–91}$$
6. Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in dobimo:
$$\mathbf{\Delta y} = \Delta\nu_A^B = -57{,}8'' \tag{1–92}$$

Končni rezultat koraka 1 je torej: $\nu_A^B = 116°33'54{,}2''$, ki ima pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B = -57{,}8''$.

Korak 2: Izračun koordinat točke $C(y_C, x_C)$ s pripadajočimi pravimi pogreški $(\Delta y_C, \Delta x_C)$

Pri prenosu pravih pogreškov izhajamo iz enačb (1–77), ki jih lahko poenostavimo, saj smo v koraku 1 izračunali smerni kot ν_A^B in pripadajoč pravi pogrešek $\Delta\nu_A^B$:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\nu_A^B + \beta_C - 180°\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\nu_A^B + \beta_C - 180°\right) \end{aligned} \tag{1–93}$$

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Pogledamo, kaj nastopa v enačbah (1–93), kar ima podane prave pogreške. Ugotovimo, da jih je 5 ($n = 5$), in sicer; koordinate točke B, smerni kot ν_A^B ter obe opazovanji v poligonu,

priklepni kot β_C in dolžina d_C. Vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta zato velikosti 5×1:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_C \\ \beta_C \\ \nu_A^B \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta d_C \\ \Delta \beta_C \\ \Delta \nu_A^B \\ \Delta y_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix} \tag{1–94}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Naloga od nas še vedno zahteva, da izračunamo koordinati $(m = 2)$ točke C, torej y_C in x_C. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} \tag{1–95}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \ldots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izhajamo iz obeh enačb (1–93) za izračun koordinat točke C, torej:

$$\begin{aligned} y_C &= y_B + d_C \sin\left(\nu_A^B + \beta_C - 180°\right) \\ x_C &= x_B + d_C \cos\left(\nu_A^B + \beta_C - 180°\right) \end{aligned} \tag{1–96}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj $(\mathbf{x})$.
   Uporabimo numerične vrednosti opazovanj in uporabimo zgornje enačbe za izračun neznank (za smerni kot pravilno upoštevajte kvadrante!):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433{,}541\,\mathrm{m} \\ 100\,617{,}082\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–97}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Ker imamo dve neznanki $(m = 2)$ in pet opazovanja $(n = 5)$, je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije 2×5 in ima obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_C}{\partial d_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial y_C}{\partial \nu_A^B} & \frac{\partial y_C}{\partial y_B} & \frac{\partial y_C}{\partial x_B} \\ \frac{\partial x_C}{\partial d_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \beta_C} & \frac{\partial x_C}{\partial \nu_A^B} & \frac{\partial x_C}{\partial y_B} & \frac{\partial x_C}{\partial x_B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}44721 & 67{,}08204 & 67{,}08204 & 1 & 0 \\ 0{,}89443 & -33{,}54102 & -33{,}54102 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–98}$$

   Parcialni odvodi so tu veliko bolj enostavni, po koordinatah sta po zadnja dva v vsaki vrstici. Ker v oklepaju funkcij sinus in kosinus ni več koordinat, je dela veliko manj kot v primeru, ko vse delamo v enem koraku.

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ in doprinose $(\Delta_{x_i} y_j)$ posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Naredimo matrični produkt $\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ in dobimo:

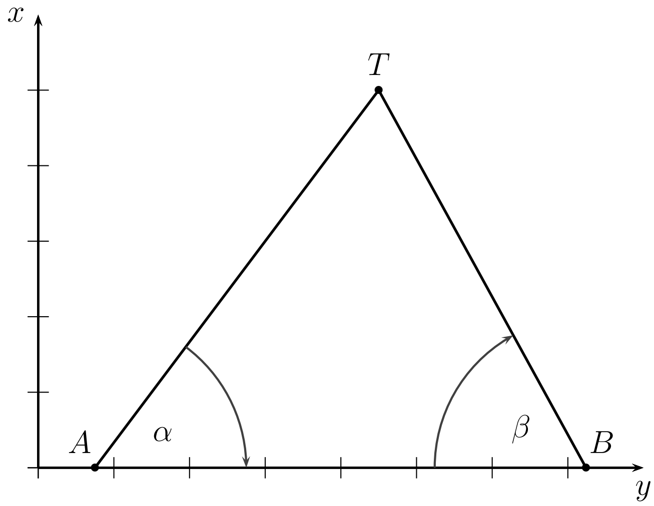
$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0{,}037\,\mathrm{m} \\ 0{,}085\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–99}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}$.
   Na koncu samo še seštejemo:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_C \\ x_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y_C \\ \Delta x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,433{,}504\,\mathrm{m} \\ 100\,617{,}167\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–100}$$

1.10 Primer 7 – Zunanji urez

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A; x_A) = (10\,\mathrm{m}; 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B; x_B) = (100\,\mathrm{m}; 0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T; x_T)$ smo izmerili dva kota, in sicer $\alpha = 30°$ in $\beta = 45°$, za oba pa imamo podana tudi prava pogreška ($\Delta\alpha = -45''$ in $\Delta\beta = 30''$), kot to prikazuje slika 1–12. Izračunajte koordinati (y_T in x_T) točke T, prava pogreška koordinat (Δy_T in Δx_T), prave koordinate ($\overline{y_T}$ in $\overline{x_T}$) točke T in doprinose pogreškov obeh opazovanj na obe koordinati ($\Delta_\alpha y_T$, $\Delta_\beta y_T$, $\Delta_\alpha x_T$, $\Delta_\beta x_T$).



Slika 1–12: Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat točke T

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \dots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Podani sta dve opazovanji, oba merjena kota α in β, saj imamo samo za njiju podana prava pogreška $\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$. Vse količine moramo pretvoriti v radiane, vektorja opazovanj $\mathbf{x}$ in pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$ sta velikosti 2×1 in imata obliko, kot prikazuje enačba (1–101).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5235988 \\ 0{,}7853982 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0002182 \\ 0{,}0001454 \end{bmatrix} \tag{1–101}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \dots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Izračunati moramo koordinate točke T, torej imamo $m = 2$ neznanki. Vektor neznank $\mathbf{y}$ ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \tag{1–102}$$

3. Za vsako neznanko y_j $(j = 1, \dots, m)$ določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i $(i = 1, \dots, n)$. Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.
   Izračun neznank sledi poteku izračuna zunanjega ureza. Ker pa imamo poenostavljen primer, saj točki A in B ležita na osi y (imata enako koordinato x), je postopek malo lažji. Prvo izračunamo stranico a, ki predstavlja dolžino med točkama A in T. Iz sinusnega izreka dobimo:

$$a = d_{AB} \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 65{,}885\,\mathrm{m} \tag{1–103}$$

Koordinate točke T izračunamo tako, da izhajamo s točke A, uporabimo stranico a in kot α. Velja:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + a\cos\alpha = d_{AB}\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \\ x_T &= x_A + a\sin\alpha = d_{AB}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{1–104}$$

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Uporabimo enačbi (1–103) in (1–104) ter vrednosti opazovanj iz navodil in dobimo:

$$\begin{aligned} y_T &= 67{,}058\,\mathrm{m} \\ x_T &= 32{,}942\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–105}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunati moramo vseh 2×2 parcialnih odvodov. Oblike parcialnih odvodov so enake (preverite samo, da so pravilni!):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial\alpha} &= \frac{-d_{AB}}{2}\frac{\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} & \frac{\partial y_T}{\partial\beta} &= \frac{d_{AB}}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \\ \frac{\partial x_T}{\partial\alpha} &= d_{AB}\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} & \frac{\partial x_T}{\partial\beta} &= d_{AB}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{1–106}$$

   Jakobijeva matrika $\mathbf{J}$ je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial\alpha} & \frac{\partial y_T}{\partial\beta} \\ \frac{\partial x_T}{\partial\alpha} & \frac{\partial x_T}{\partial\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48{,}231 & 41{,}769 \\ 48{,}231 & 24{,}115 \end{bmatrix} \tag{1–107}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{\Delta x}$ in doprinose ($\Delta_{x_i} y_j$) posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Uporabimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba (1–107)) in vektor pogreškov opazovanj $\mathbf{\Delta x}$ (enačba (1–101)) in dobimo:

$$\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} 0{,}0166\,\mathrm{m} \\ -0{,}0070\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–108}$$

   Doprinose pravih pogreškov posameznih opazovanj na vse neznanke dobimo s produkti parcialnih odvodov in pravih pogreškov opazovanj. Vse kombinacije imajo vrednosti:

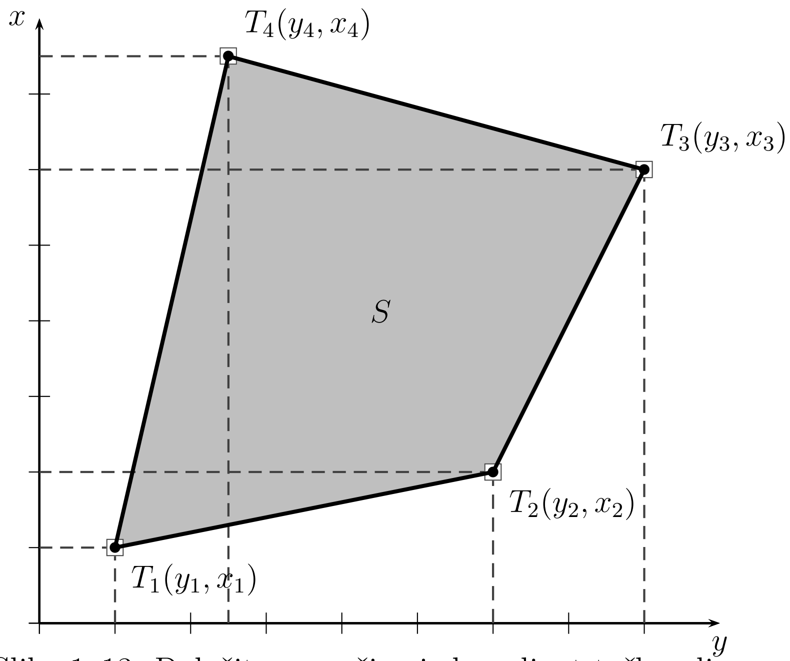
$$\begin{aligned} \Delta_\alpha y_T &= \frac{\partial y_T}{\partial\alpha}\Delta\alpha = 0{,}0105\,\mathrm{m} & \Delta_\beta y_T &= \frac{\partial y_T}{\partial\beta}\Delta\beta = 0{,}0061\,\mathrm{m} \\ \Delta_\alpha x_T &= \frac{\partial x_T}{\partial\alpha}\Delta\alpha = -0{,}0105\,\mathrm{m} & \Delta_\beta x_T &= \frac{\partial x_T}{\partial\beta}\Delta\beta = 0{,}0035\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–109}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Na koncu izračunamo še končne, prave vrednosti neznank:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} = \begin{bmatrix} \overline{y_T} \\ \overline{x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67{,}074\,\mathrm{m} \\ 32{,}935\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–110}$$

1.11 Primer 8 – Površina zaključenega poligona

Določiti želimo površino parcele S, kjer smo z geodetskimi metodami določili koordinate štirih točk, kot to prikazuje slika 1–13. Koordinate točk so $T_1(y_1; x_1) = (10\,\mathrm{m}; 10\,\mathrm{m})$, $T_2(y_2; x_2) = (60\,\mathrm{m}; 20\,\mathrm{m})$, $T_3(y_3; x_3) = (80\,\mathrm{m}; 60\,\mathrm{m})$ in $T_4(y_4; x_4) = (25\,\mathrm{m}; 75\,\mathrm{m})$, podane pa imamo tudi prave pogreške vseh koordinat, in sicer $(\Delta y_1; \Delta x_1) = (0{,}010\,\mathrm{m}; -0{,}020\,\mathrm{m})$, $(\Delta y_2; \Delta x_2) = (-0{,}015\,\mathrm{m}; 0{,}020\,\mathrm{m})$, $(\Delta y_3; \Delta x_3) = (0{,}005\,\mathrm{m}; -0{,}005\,\mathrm{m})$ in $(\Delta y_4; \Delta x_4) = (-0{,}020\,\mathrm{m}; 0{,}010\,\mathrm{m})$. Izračunaj površino parcele S, njen pravi pogrešek ΔS in pravo površino $\bar{S}$. Kakšni so doprinosi pogreškov posameznih opazovanj (koordinat točk) na izračunano povšino?



Slika 1–13: Določitev površine iz koordinat točk poligona

Postopek izračuna pri prenosu pravih pogreškov:

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\mathbf{\Delta x}$.
   Iz podatkov je razvidno, da moramo izračunati površino S iz koordinat štirih točk, torej $n = 8$. Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajoči vektor pravih pogreškov opazovanj $\mathbf{\Delta x}$ sta:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \\ y_3 \\ x_3 \\ y_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}0\,\mathrm{m} \\ 10{,}0\,\mathrm{m} \\ 60{,}0\,\mathrm{m} \\ 20{,}0\,\mathrm{m} \\ 80{,}0\,\mathrm{m} \\ 60{,}0\,\mathrm{m} \\ 25{,}0\,\mathrm{m} \\ 75{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta x_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_3 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_4 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}010\,\mathrm{m} \\ -0{,}020\,\mathrm{m} \\ -0{,}015\,\mathrm{m} \\ 0{,}020\,\mathrm{m} \\ 0{,}005\,\mathrm{m} \\ -0{,}005\,\mathrm{m} \\ -0{,}020\,\mathrm{m} \\ 0{,}010\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–111}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Iz naloge je razvidno, da je potrebno izračunati površino parcele (poligona) S, zato je število neznank enako $m = 1$. Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \tag{1–112}$$

3. Za vsako neznanko y_j ($j = 1, \ldots, m$) določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i ($i = 1, \ldots, n$). Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
Za rešitev naloge moramo prvo vedeti, kako se izračuna površina zaključenega poligona na osnovi koordinat točk poligona. Pa podan primer, ko imamo 4 točke, se enačba glasi:

$$\begin{aligned} S = &\frac{1}{2}(y_1 - y_2)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_2 - y_3)(x_2 + x_3) + \\ &\frac{1}{2}(y_3 - y_4)(x_3 + x_4) + \frac{1}{2}(y_4 - y_1)(x_4 + x_1) \end{aligned} \tag{1–113}$$

Kako pridemo do rešitve iz enačbe (1–113)?

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
Za izračun površine S iz enačbe (1–113) uporabimo numerične vrednosti opazovanj iz enačbe (1–111) in dobimo:

$$S = 2\,800{,}00\,\mathrm{m}^2 \tag{1–114}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
Parcialni odvodi enačbe (1–113) po vseh koordinatah (opazovanjih) imajo, po krajši matematični akrobaciji, obliko:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y_1} &= \frac{x_2 - x_4}{2} = -27{,}50\,\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_1} &= -\frac{y_2 - y_4}{2} = -17{,}50\,\mathrm{m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_2} &= \frac{x_3 - x_1}{2} = 25{,}00\,\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_2} &= -\frac{y_3 - y_1}{2} = -35{,}00\,\mathrm{m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_3} &= \frac{x_4 - x_2}{2} = 27{,}50\,\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_3} &= -\frac{y_4 - y_2}{2} = 17{,}50\,\mathrm{m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_4} &= \frac{x_1 - x_3}{2} = -25{,}00\,\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_4} &= -\frac{y_1 - y_3}{2} = 35{,}00\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–115}$$

Matrika $\mathbf{J}$ je velikosti $m \times n = 1 \times 8$ in ima obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = &\begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial y_1} & \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial S}{\partial y_2} & \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial S}{\partial y_3} & \frac{\partial S}{\partial x_3} & \frac{\partial S}{\partial y_4} & \frac{\partial S}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -27{,}50\,\mathrm{m} & -17{,}50\,\mathrm{m} & 25{,}00\,\mathrm{m} & -35{,}00\,\mathrm{m} & 27{,}50\,\mathrm{m} & 17{,}50\,\mathrm{m} & -25{,}00\,\mathrm{m} & 35{,}00\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–116}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose ($\Delta_{x_i} y_j$) posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = \Delta S = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x} = -0{,}10\,\mathrm{m}^2 \tag{1–117}$$

Produkti posameznih parcialnih odvodov iz enačbe (1–115) s pripadajočimi pravimi pogreški iz enačbe (1–111) predstavljajo doprinos posameznega pravega pogreška opazovanja k končnemu pravemu pogrešku neznanke. Za vsako opazovanje tako dobimo:

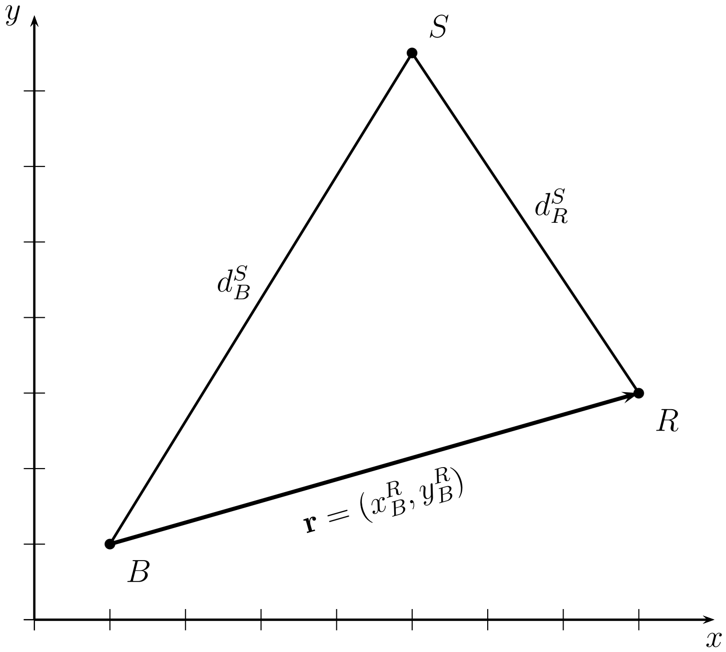
$$\begin{aligned} \Delta_{y_1} S &= -0{,}275\,\mathrm{m} & \Delta_{x_1} S &= 0{,}350\,\mathrm{m} \\ \Delta_{y_2} S &= -0{,}375\,\mathrm{m} & \Delta_{x_2} S &= -0{,}700\,\mathrm{m} \\ \Delta_{y_3} S &= 0{,}138\,\mathrm{m} & \Delta_{x_3} S &= -0{,}088\,\mathrm{m} \\ \Delta_{y_4} S &= 0{,}500\,\mathrm{m} & \Delta_{x_4} S &= 0{,}350\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–118}$$

7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Za izračun prave vrednosti površine $\bar{S}$ približni površini S iz enačbe (1–114) prištejemo pravi pogrešek ΔS iz enačbe (1–117) in dobimo:

$$\bar{S} = S + \Delta S = 2\,799{,}90\,\mathrm{m}^2 \tag{1–119}$$

1.12 Primer 9 – Pogrešek položaja satelita GNSS

Podane imamo koordinate bazne točke B v ravninskem koordinatnem sistemu, in sicer $B(x_B; y_B) = (100\,\text{m}; 100\,\text{m})$, do nove točke R pa imamo podani komponenti baznega vektorja $\mathbf{r} = (x_B^R; y_B^R) = (1\,000\,\text{m}; 1\,000\,\text{m})$. Podane pa imamo tudi koordinate satelita S, ki je oddaljen od obeh točk približno $22\,000\,\text{km}$, in sicer $S(x_S; y_S) = (500\,\text{m}; 22\,000\,000\,\text{m})$. Če poznamo pravi pogrešek koordinat satelita $\Delta x_S = 20\,\text{m}$ in $\Delta y_S = 15\,\text{m}$, izračunaj razdalji d_B^S in d_R^S in njuna prava pogreška Δd_B^S in Δd_R^S. Izračunaj tudi razliko $D = d_R^S - d_R^S$ in njen pravi pogrešek ΔD.



Slika 1–14: Prikaz položajev točk B, R in S in iskanih neznank

Naloga prikazuje poenostavljeno situacijo pri izmeri GNSS, ko upoštevamo opazovanja GNSS na dveh točkah (z B označimo dano, "*bazno*", točko in z R novo, "*rover*", točko) z enega satelita S. Vse tri točke lahko obravnavamo v ravnini, v kateri ležijo. Sama naloga je enostavna, imamo dolžini od satelita do obeh točk, njuna razlika, ki jo boste v višjih letnikih pri obravnavi GNSS označili kot enojna (fazna/kodna) razlika, pa ima zelo pomembno vlogo v obdelavi opazovanj GNSS za kakovostno določitev koordinat točk.

1. Pridobimo opazovanja x_i in njihove pogreške Δx_i, $(i = 1, \ldots, n)$. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in vektor pravih pogreškov $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$.
   Iz naloge vidimo, da so podatki koordinate treh točk, to so B, R in S, a pravi pogreški so podani le za koordinati točke S, zato imamo $n = 2$. Vse ostale koordinate (točk B in R) obravnavamo kot konstante. Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajoči vektor pravih pogreškov opazovanj $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ sta:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500{,}0\,\text{m} \\ 22\,000\,000{,}0\,\text{m} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_S \\ \Delta y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20{,}000\,\text{m} \\ 15{,}000\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–120}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Zanimata nas dve dolžini, to sta d_B^S in d_R^S ter njuna razlika $D = d_R^S - d_R^S$. Število neznank je zato enako $m = 3$, vektor neznank pa ima obliko:
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_B^S \\ d_R^S \\ D \end{bmatrix} \tag{1–121}$$

3. Za vsako neznanko y_j ($j = 1, \ldots, m$) določimo, kako se izračuna na osnovi opazovanj x_i ($i = 1, \ldots, n$). Določimo vse funkcijske povezave $y_j = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
   Izračun vseh neznank na osnovi opazovanj je podan z:

$$\begin{aligned} d_B^S &= \sqrt{(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2} \\ d_R^S &= \sqrt{(x_S - (x_B + x_B^R))^2 + (y_S - (y_B + y_B^R))^2} \\ D = d_R^S - d_B^S &= \sqrt{(x_S - (x_B + x_B^R))^2 + (y_S - (y_B + y_B^R))^2} - \sqrt{(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2} \end{aligned} \tag{1–122}$$

   V enačbi (1–122) je položaj točke R podan preko položaja točke B in komponent baznega vektorja $\mathbf{r}$.

4. Izračunamo "približne" vrednosti neznank in s tem dobimo vektor $\mathbf{y}$. Za izračun uporabimo približne vrednosti opazovanj ($\mathbf{x}$).
   Da izračunamo "približne" vrednosti neznank iz enačbe (1–122) uporabimo merjene vrednosti opazovanj iz enačbe (1–120). Dobimo:

$$\begin{aligned} d_B^S &= 21\,999\,900{,}0036\,\mathrm{m} \\ d_R^S &= 21\,998\,900{,}0082\,\mathrm{m} \\ D &= -999{,}9955\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–123}$$

5. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Vse enačbe (neznanke) iz enačb (1–122) odvajamo po obeh opazovanjih in sestavimo matriko $\mathbf{J}$. Parcialni odvodi imajo na koncu obliko:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_B^S}{\partial x_S} &= \frac{x_S - x_B}{d_B^S} & \frac{\partial d_B^S}{\partial y_S} &= \frac{y_S - y_B}{d_B^S} \\ \frac{\partial d_R^S}{\partial x_S} &= \frac{x_S - (x_B + x_B^R)}{d_R^S} & \frac{\partial d_R^S}{\partial y_S} &= \frac{y_S - (y_B + y_B^R)}{d_R^S} \\ \frac{\partial D}{\partial x_S} &= \frac{\partial d_R^S}{\partial x_S} - \frac{\partial d_B^S}{\partial x_S} & \frac{\partial D}{\partial y_S} &= \frac{\partial d_R^S}{\partial y_S} - \frac{\partial d_B^S}{\partial y_S} \end{aligned} \tag{1–124}$$

   Matrika $\mathbf{J}$ je velikosti $m \times n = 3 \times 2$ in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1{,}8181900824 \times 10^{-5} & 9{,}9999999983 \times 10^{-1} \\ -2{,}7274090967 \times 10^{-5} & 9{,}9999999963 \times 10^{-1} \\ -4{,}5455991791 \times 10^{-5} & -2{,}0664726200 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \tag{1–125}$$

6. Izračunamo prave pogreške neznank Δy_j za vse neznanke, $\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ in doprinose ($\Delta_{x_i} y_j$) posameznih pravih pogreškov opazovanj (Δx_i) na posamezen pravi pogrešek neznank (Δy_j).
   Rezultat z matričnim produktom $\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Delta x}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Delta y} = \mathbf{J\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta d_B^S \\ \Delta d_R^S \\ \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}00036\,\mathrm{m} \\ 14{,}99945\,\mathrm{m} \\ -0{,}00091\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–126}$$

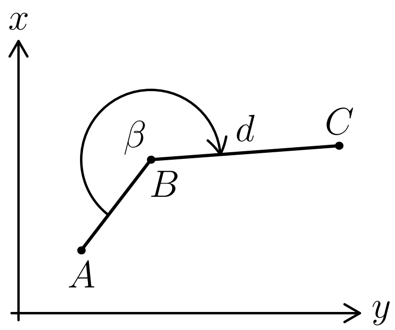
7. Izračunamo prave vrednosti neznank $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{\Delta y}$.
   Prave vrednosti neznank nas tu ne zanimajo.

Da ugotovimo, zakaj je ta naloga pri GNSS tako pomembna, je potrebno analizirati rezultate iz enačbe (1–126). Ko računamo dolžino med dvema točkama (kot sta to d_B^S in d_R^S), se pravi pogreški koordinat točk neposredno prenesejo na prave pogreške dolžin. Če bodo pogreški koordinat na nivoju metrov, potem bodo tudi pravi pogreški izračunanih dolžin na nivoju metrov. Pri tretji neznanki, ki predstavlja razliko dolžin d_R^S in d_B^S od obeh točk na Zemlji do satelita, pa vidimo, da je pravi pogrešek manjši od milimetra. Pogrešek položaja satelita se je s tem, ko smo izračunali razliko $D = d_R^S - d_B^S$ skoraj izničil. A to je možno samo zato, ker so sateliti zelo oddaljeno od površja Zemlje (okoli 22 000 km) in ko sta točki B in R relativno blizu (to pomeni pod 100 km). Ko so točke narazen za več kot 1 000 km, se napaka v položaju satelita izkaže tudi pri količini D, a še vedno v manjši meri kot pri obeh dolžinah (d_R^S in d_B^S).

V primeru izmere GNSS merimo razdalje med sateliti in točkami na Zemlji (na katere postavimo inštrumente GNSS). Položaje satelitov je zelo zahtevno določiti z natančnostjo na nivoju centimetrov, zato so ti podatki znani šele pri naknadni obdelavi, z zakasnitvijo treh tednov. V realnem času dobimo položaje satelitov na nivoju nekaj metrov. A vseeno lahko z geodetskimi inštrumenti GNSS določimo koordinate točk na centimetrskem, celo milimetrskem nivoju natančnosti. To je možno le, ko za določitev (relativnih) koordinat (med točkami) uporabimo razlike izmerjenih razdalj med točkami in sateliti. Temu se reče relativna določitev položajev in je standard pri uporabi GNSS že od začetka 80-ih let prejšnjega stoletja.

1.13 Primeri – dodatno

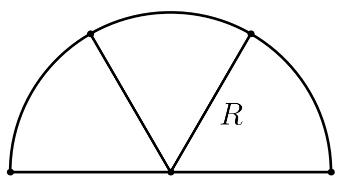
1. V slepem poligonu poznamo položaj in prava pogreška položaja točk A in B v državnem koordinatnem sistemu:
   $A(y_A; x_A) = (456\,200{,}00\,\text{m}; 105\,204{,}00\,\text{m})$; $\Delta y_A = \Delta x_A = 0{,}01\,\text{m}$
   $B(y_B; x_B) = (456\,201{,}00\,\text{m}; 105\,205{,}00\,\text{m})$; $\Delta y_B = \Delta x_B = -0{,}01\,\text{m}$
   Opazovali smo še lomni kot $\beta = 225°0'$ ($\Delta\beta = 10'$) in dolžino $d = 2{,}00\,\text{m}$ ($\Delta d = 0{,}05\,\text{m}$) proti točki C. S pomočjo prenosa pravih pogreškov ocenite pravi pogrešek položaja točke C (Δy_C in Δx_C) in določite pravi položaj točke C ($\bar{y}_C$ in $\bar{x}_C$). Prikažite tudi, kakšni so doprinosi pravih pogreškov posameznih opazovanj (Δy_A, Δx_A, Δy_B, Δx_B, Δd, $\Delta\beta$) na pravi pogrešek vsake neznanke ($\Delta_{y_A} y_C$, $\Delta_{x_A} y_C$, $\Delta_{y_B} y_C$, $\Delta_{x_B} y_C$, $\Delta_d y_C$, $\Delta_\beta y_C$, $\Delta_{y_A} x_C$, $\Delta_{x_A} x_C$, $\Delta_{y_B} x_C$, $\Delta_{x_B} x_C$, $\Delta_d x_C$, $\Delta_\beta x_C$).



Slika 1–15: Naloga 1

REŠITEV: $y_C = 456\,203{,}00\,\text{m}$, $x_C = 105\,205{,}00\,\text{m}$, $\Delta y_C = 0{,}04\,\text{m}$, $\Delta x_C = -0{,}0158\,\text{m}$, $\Delta_{y_A} y_C = 0{,}0\,\text{m}$, $\Delta_{x_A} y_C = 0{,}0\,\text{m}$, $\Delta_{y_B} y_C = -0{,}01\,\text{m}$, $\Delta_{x_B} y_C = 0{,}0\,\text{m}$, $\Delta_d y_C = 0{,}05\,\text{m}$, $\Delta_\beta y_C = 0{,}0\,\text{m}$, $\Delta_{y_A} x_C = 0{,}01\,\text{m}$, $\Delta_{x_A} x_C = -0{,}01\,\text{m}$, $\Delta_{y_B} x_C = 0{,}01\,\text{m}$, $\Delta_{x_B} x_C = -0{,}02\,\text{m}$, $\Delta_d x_C = 0{,}0\,\text{m}$, $\Delta_\beta x_C = -0{,}0058\,\text{m}$.

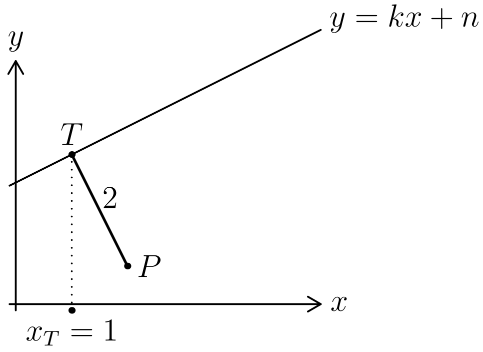
2. Velikost polmera R parcele, ki ima obliko polkroga, smo določili z merskim trakom dolžine 40 m in dobili vrednost 36,15 m. Kasneje smo ugotovili, da je merski trak 3 cm daljši, kot bi moral biti. Lastnik je želel parcelo razdeliti na tri enake dele tako, da bodo imeli obliko krožnega izseka s polmerom R. Koliko znaša dejanska površina $\bar{S}$ posameznega dela? Koliko bi znašala površina parcele, če bi jo določili z merskim trakom dolžine 40 m, ki je 5 cm prekratek (enaka vrednost opazovanj)?



Slika 1–16: Naloga 2

REŠITEV: 1.)$\bar{l} = 40{,}03\,\text{m}$, $\Delta l = 0{,}03\,\text{m}$, $\Delta R = 0{,}0271\,\text{m}$, $S = \frac{\pi R^2}{6} = 684{,}251\,\text{m}^2$, $\Delta_S = 1{,}0264\,\text{m}^2$. 2.)$\bar{l} = 39{,}95\,\text{m}$, $\Delta l = -0{,}05\,\text{m}$, $\Delta R = -0{,}0452\,\text{m}$, $S = \frac{\pi R^2}{6} = 684{,}251\,\text{m}^2$, $\Delta_S = -1{,}711\,\text{m}^2$.

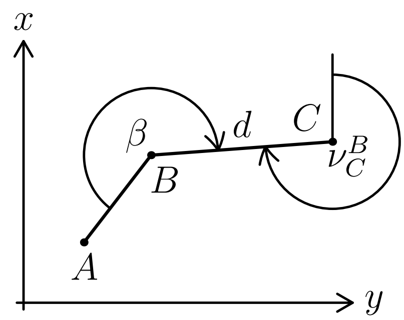
3. Premico v ravnini smo določili tako, da smo določili koeficienta k in n: $k = 1.5$, $\Delta k = 0.1$, $n = 3$, $\Delta n = 0.2$. Določi ordinato točke T, katere abscisa znaša 1! Izračunaj pogrešek določitve ordinate te točke! V točki T smo postavili pravokotnico na premico in na njej odmerili 2 enoti navzdo. Določi koordinati x_P in y_P nove točke P ter njuna prava pogreška Δx_P in Δy_P!



Slika 1–17: Naloga 3

REŠITEV: $y_T = 4.5$, $x_P = 2.6641$, $y_P = 3.3906$, $\Delta y_T = 0.3$, $\Delta x_P = 0.0341$, $\Delta y_P = 0.351$.

4. V slepem poligonu poznamo položaj in prava pogreška položaja točk A in B v državnem koordinatnem sistemu: $A(y_A, x_A) = (456200.00,\ 105204.00)$m; $\Delta y_A = \Delta x_A = 0.05$m; $B(y_B, x_B) = (456201.00,\ 105205.00)$m; $\Delta y_B = \Delta x_B = 0.01$m. Opazovali smo še lomni kot $\beta = 225^o00'$ $(\Delta\beta = 5')$ in dolžino $D = 2.00$ m $(\Delta D = 0.05$ m$)$ proti točki C. S pomočjo prenosa pravih pogreškov (totalnega diferenciala) ocenite pravi pogrešek smernega kota $\Delta\nu_C^B$ in določite pravi smerni kot $\bar{\nu}_C^B$. Kakšni so doprinosi pravih pogreškov posameznih opazovanj na končen pravi pogrešek smernega kota $\Delta\nu_C^B$?

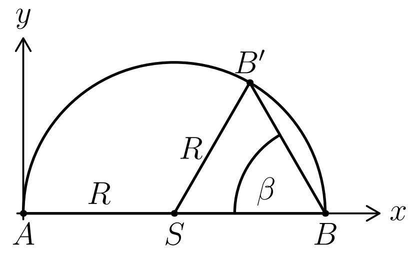


Slika 1–18: Naloga 4

REŠITEV: $\nu_C^B = \nu_A^B + \beta = 270^o$, $\Delta\nu_C^B = 5'$, $\Delta_{y_A}\nu_C^B = -85.9'$, $\Delta_{x_A}\nu_C^B = 85.9'$, $\Delta_{y_B}\nu_C^B = 17.2'$, $\Delta_{x_B}\nu_C^B = -17.2'$, $\Delta_\beta\nu_C^B = 5'$.

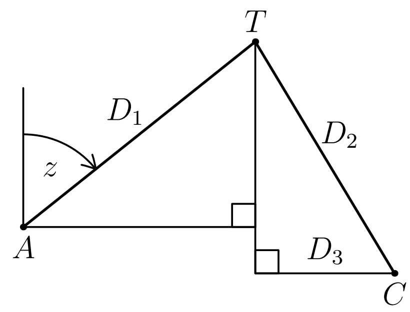
5. Dani sta točki $A(x_A, y_A) = (0.00,\ 0.00)$m, $(\Delta x_A, \Delta y_A) = (0.00,\ 0.00)$m in $B(x_B, y_B = (25.00,\ 0.00)$m, $(\Delta x_B, \Delta y_B) = (0.00; 0.00)$m. Od točke B smo določili kot $\beta = 60^o$ proti točki B', ki leži na krožnici z radijem $\overline{AB}/2$. Kot smo določili s pravim pogreškov $\Delta\beta = -0.5'$. S prenosom pravih pogreškov določite položaj točke B' (x'_B, y'_B) ter prava pogreška položaja točke B' $(\Delta x'_B, \Delta y'_B)$. **Pozor:** trikotnik $\Delta SBB'$ **ni** enakostranični!

REŠITEV: $x_{B'} = 18.750$m, $y_{B'} = 10.825$m, $\Delta x_{B'} = -3.1$mm, $\Delta y_{B'} = 1.8$mm.



Slika 1–19: Naloga 5

6. S postopkom trigonometričnega višinomerstva smo od dane točke A ($H_A = 321.00$ m) opazovali zenitno razdaljo $z = 45^o$ ter poševno dolžino $D_1 = 7.07$m do točke T. Od točke T smo opazovali poševno dolžino $D_2 = 10.00$m in horizontalno dolžino $D_3 = 6.00$m do točke C. S prenosom pravih pogreškov določite prava pogreška višin in pravi višini točk T in C. Zenitno razdaljo smo izmerili s pravim pogreškom $\Delta z = -30''$, medtem ko smo dolžine opazovali z istim merskim trakom; šlo je za 30-metrski merski trak, katerega prava vrednost je znašala 30.05 m.



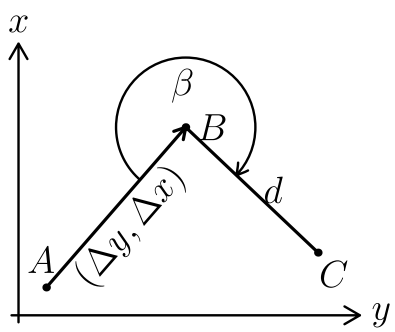
Slika 1–20: Naloga 6

REŠITEV: $\bar{l} = 30.05$m, $\Delta l = 0.05$m, $\Delta D_1 = 0.0118$m, $\Delta D_2 = 0.0167$m, $\Delta D_3 = 0.010$m, $H_T = 325.9992$m, $H_C = 317.9992$m, $\Delta H_T = 9.1$mm, $\Delta H_C = -4.3$mm, $\Delta_z H_T = 0.7$mm, $\Delta_{D_1} H_T = 8.3$mm, $\Delta_{D_2} H_T = \Delta_{D_3} H_T = 0.0$mm, $\Delta_z H_C = 0.7$mm, $\Delta_{D_1} H_C = 8.3$mm, $\Delta_{D_2} H_C = -20.8$mm, $\Delta_{D_3} H_T = 7.5$mm.

7. Od dane točke $A(y_A, x_A) = (456200.00,\ 100300.00)$m smo proti točki B določili koordinatni razliki $\Delta y = 10.00$m in $\Delta x = 9.80$m s 30-metrskim merskim trakom, katerega prava dolžina je bila 30.05m. Z istim merskim trakom smo opazovali tudi dolžino $d = 10.00$ m med točkama B in C. Izmerili smo tudi lomni kot $\beta = 225^o$, ki ima pravi pogrešek $\Delta\beta = -1^o$. S pomočjo prenosa pravih pogreškov določite prava pogreška in pravi vrednosti koordinat točke C (y_C, x_C) ter doprinose pravih pogreškov posameznih opazovanj na prava pogreška neznank.

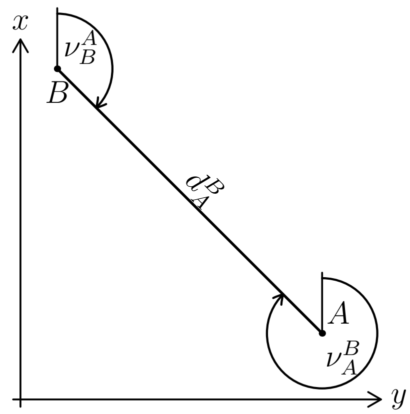
REŠITEV: $y_C = 456219.9995$m, $x_C = 100309.6990$m, $\Delta y_C = 3.51$cm, $\Delta x_C = 19.07$cm, $\Delta_{\Delta y} y_C = 1.66$cm, $\Delta_{\Delta x} y_C = 0.01$cm, $\Delta_d y_C = 1.67$cm, $\Delta_\beta y_C = 0.18$cm, $\Delta_{\Delta y} x_C = -0.83$cm, $\Delta_{\Delta x} x_C = 2.47$cm, $\Delta_d x_C = -0.02$cm, $\Delta_\beta x_C = 17.45$cm.

8. Med točkama $A(y_A, x_A)$ in $B(y_B, x_B)$, katerih položaj je dan v državnem koordinatnem sistemu, smo s 50-metrskim merskim trakom opazovali koordinatni razliki: $\Delta y = -10.00$m, $\Delta x = 10.00$m. Naknadno smo ugotovili, da dejanska dolžina merskega traku znaša 50.080m.



Slika 1–21: Naloga 7

Izračunajte dolžino d_A^B in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A, njihove prave pogreške Δd_A^B, $\Delta\nu_A^B$ in $\Delta\nu_B^A$ ter njihove prave vrednosti $\bar{d}_A^B$ in oba smerna kota $\bar{\nu}_A^B$ ter $\bar{\nu}_B^A$.



Slika 1–22: Naloga 8

REŠITEV: $d_A^B = 14.142\text{m}$, $\nu_A^B = 315^o$, $\nu_B^A = 135^o$, $\Delta d_A^B = 2.3\text{cm}$, $\Delta\nu_A^B = \Delta\nu_B^A = 0^o0'0''$, $\Delta_{\Delta y} d_A^B = \Delta_{\Delta x} d_A^B = 1.13\text{cm}$, $\Delta_{\Delta y}\nu_A^B = \Delta_{\Delta y}\nu_B^A = -2'45''$, $\Delta_{\Delta x}\nu_A^B = \Delta_{\Delta x}\nu_B^A = 2'45''$.

9. Podane imamo parametre parabole, in sicer $\mathbf{x} = [\ 0.9 \quad 0.76 \quad 1.76\ ]^{\mathrm{T}}$ (parametri parabole (a, b in c)), za katere pa imamo podane tudi prave pogreške: $\Delta a = 0.022$, $\Delta b = -0.069$ in $\Delta c = 0.043$. Za dve podani koordinati $x_1 = 2.75$ in $x_2 = 5.25$ izračunajte interpolirani vrednosti y_1 in y_2 s pripadajočimi pravimi pogreški Δy_1 in Δy_2.

   REŠITEV: $y_1 = 10.65625$, $y_2 = 30.55625$, $\Delta y_1 = 0.0196$, $\Delta y_2 = 0.2871$.