Geodetski nalogi na krogli

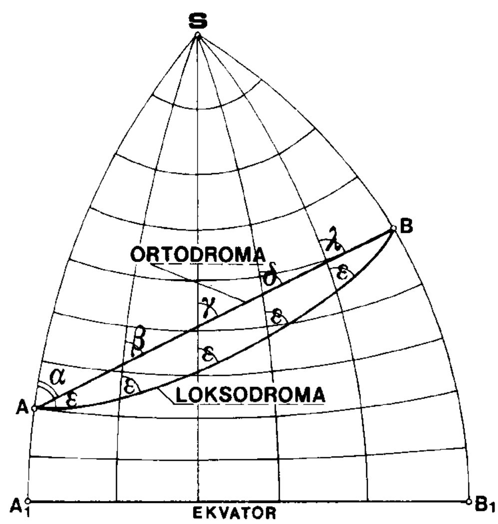
- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
- določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
- določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").

- Pojem geodetske linije: "Geodetska linija je najkrajša povezava med dvema točkama na poljubni ploskvi".
- Na Zemlji krogli se srečamo s posebnimi linijami:
  - ortodroma,
  - loksodroma.

ORTODROMA IN LOKSODROMA (1)

- Na krogli je geodetska linija krajši lok velikega kroga, ki poteka skozi ti dve točki na površju krogle.

- V navigaciji in geodeziji se geodetska linija na krogli imenuje "ortodroma"
  (iz grščine "ortos" → pravi "dromos" →pot).
- Na Zemlji-krogli je ortodroma najkrajša pot med dvema točkama.
- Če plujemo po ortodromi moramo nenehno spreminjati kurz plovila.



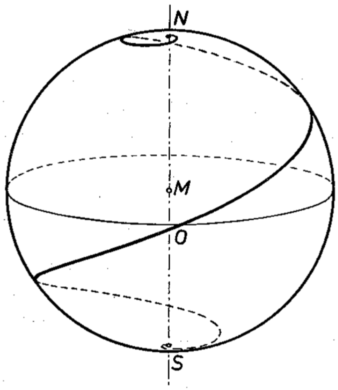
$$\cos D_{AB} = \cos(90° - \phi_B)\cos(90° - \phi_A) + \sin(90° - \phi_B)\sin(90° - \phi_A)\cos\Delta\lambda$$

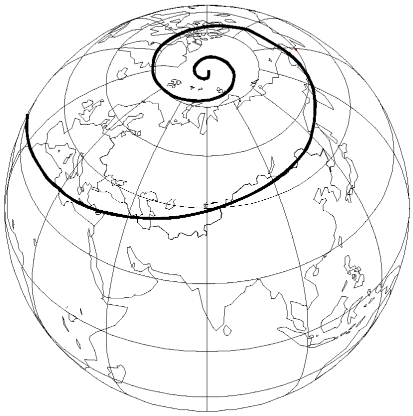
$$\cos D_{AB} = \sin\phi_B \sin\phi_A + \cos\phi_B \cos\phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)$$

$$L_{AB} = \frac{R_{[km]}(\phi_B - \phi_A)_{[rad]}}{\cos A_{AB}}$$

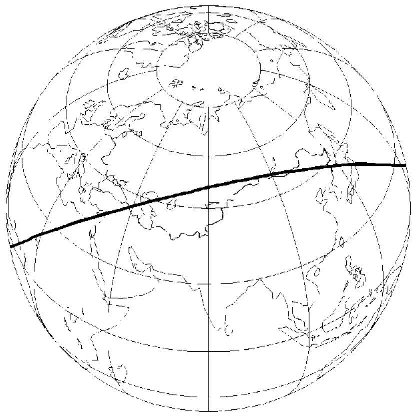
ORTODROMA IN LOKSODROMA (2)

- "Loksodroma" je krivulja na krogli, ki seka vse meridiane pod istim kotom (iz grščine "loksos" → poševen).
- Ladja, ki pluje po loksodromi ima prednost konst. kurza in pomanjkljivost daljše poti. Loksodroma je prostorska krivulja, ki se polu neprestano približuje in ga nikdar ne doseže.
- Na karti v Merkatorjevi projekciji je loksodroma premica!





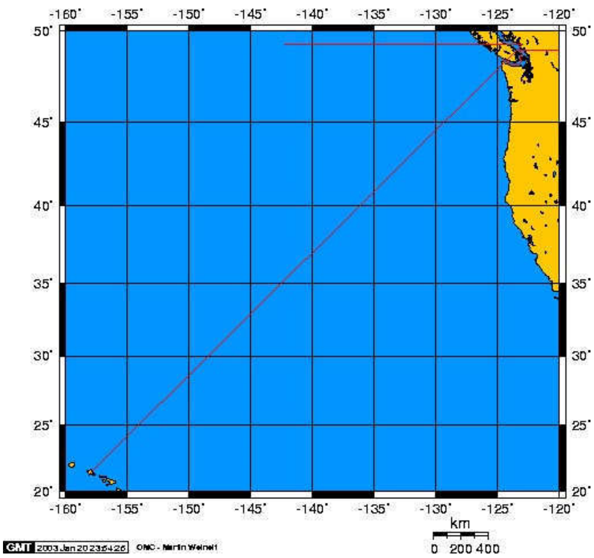
loksodroma

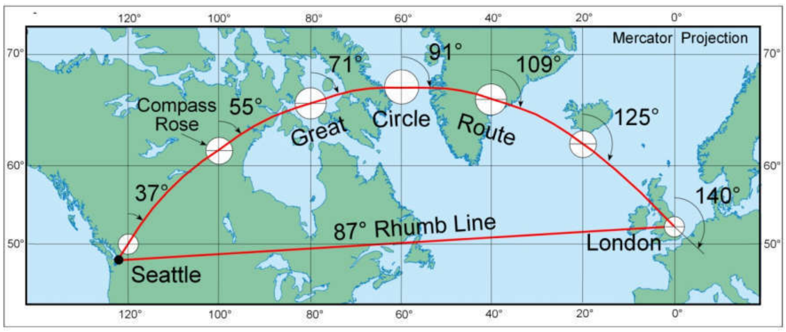


ortodroma

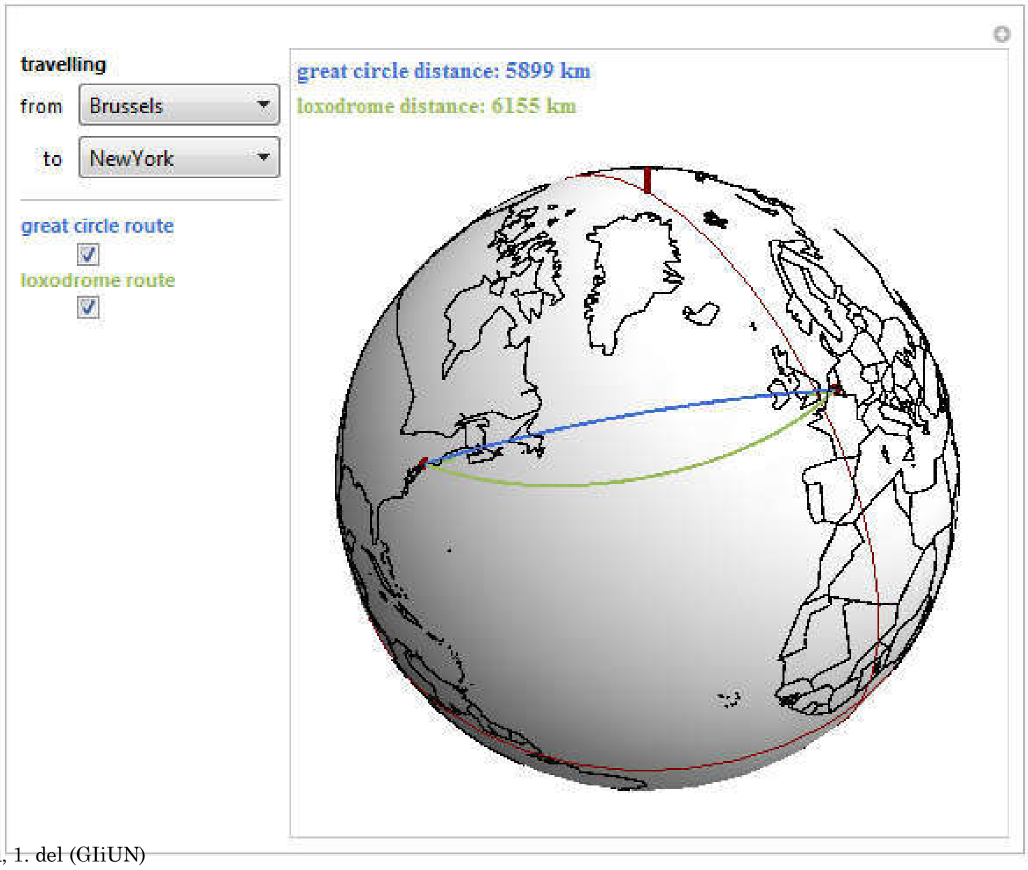
Loksodroma na karti

- Na karti v Merkatorjevi projekciji je loksodroma premica!

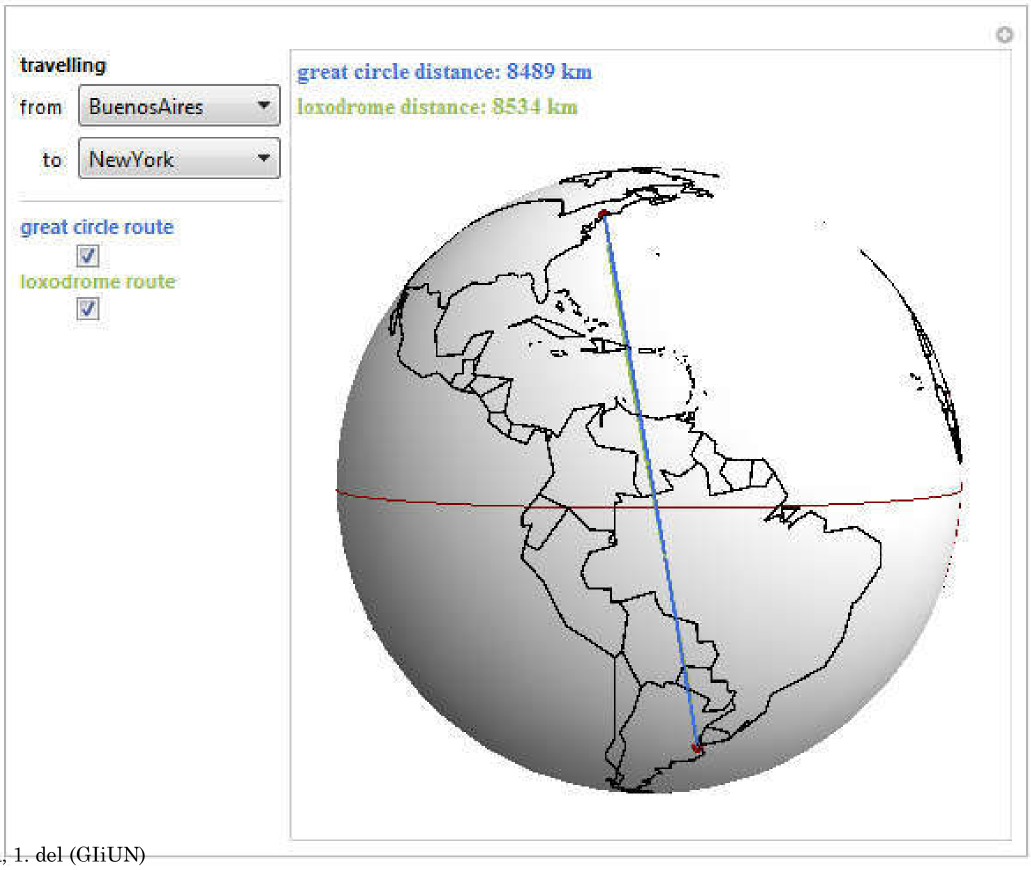




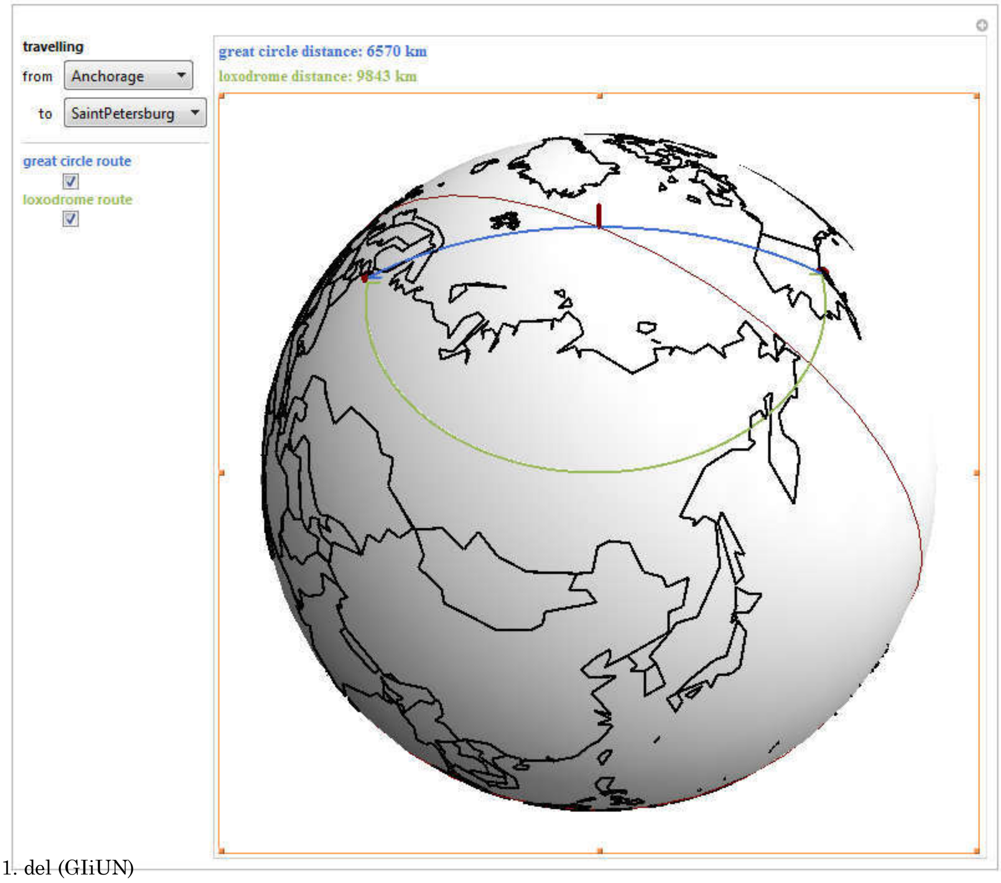
Primerjava ortodrome in loksodrome (E - Z)



Primerjava ortodrome in loksodrome (S - J)



Primerjava ortodrome in loksodrome - pot čez pol



Primerjava v Tržaškem zalivu in širše

		Dolžina		
Območje	Smer	ortodroma	loksodroma	Δ_{L-O}
Tržaški zaliv	Koper - Gradež	30398,090 m	30398,114 m	0,023 m
	Koper - Tržič	32677,072 m	32677,080 m	0,008 m
	Trst - Gradež	29439,090 m	29439,118 m	0,027 m
	Tržič - Savudrija	35184,108 m	35184,108 m	0,000 m
Jadransko morje	Koper - Benetke	110003 m	110006 m	3 m
	Trst - Benetke	114292 m	114294 m	2 m
	Gradež - Dubrovnik	504002 m	504071 m	69 m
svet	Miami - Lizbona	6672 km	6812 km	140 km
	Sydney - San Francisco	11948 km	15742 km	3794 km
	Melbourne - Buenos Aires	11602 km	18271 km	6668 km

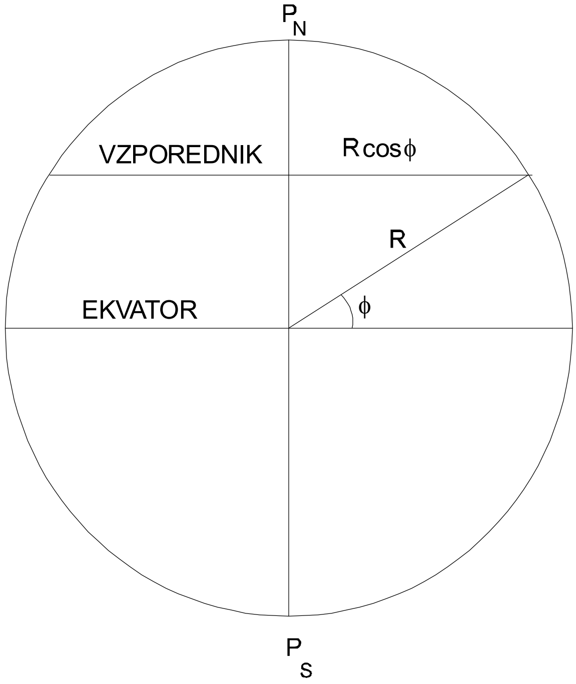
Lok na vzporedniku in meridianu

- Vsi meridiani na Zemlji-krogli imajo enak polmer, ta je enak polmeru krogle. Vsi vzporedniki (ker so mali krogi), imajo manjši polmer. Polmer vzporednika z geografsko širino ϕ lahko enostavno izračunamo iz zveze v pravokotnem trikotniku:

$$R_\phi = R\cos\phi$$

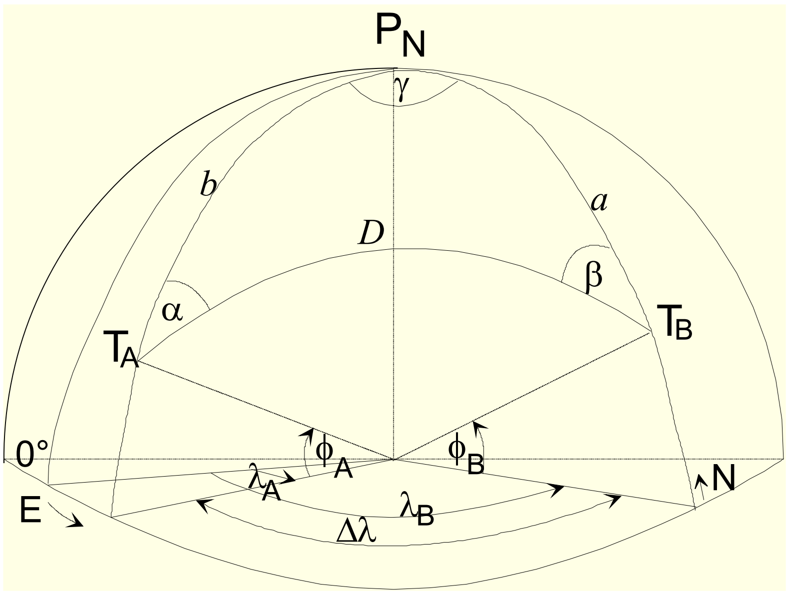
- Obseg vzporednika je potem:

$$O_\phi = 2R_\phi\pi = 2R\pi\cos\phi$$



GEODETSKI NALOGI (po ortodromi) 1

- 1. dano: T_A (ϕ_A,λ_A), D_{AB}, A_{AB}
  neznano: Tb (ϕ_B,λ_B)
- 2. dano: T_A (ϕ_A,λ_A), T_B (ϕ_B,λ_B)
  neznano: D_{AB}, A_{AB}, A_{BA}



navtični sferni trikotnik $N_P T_A T_B$:

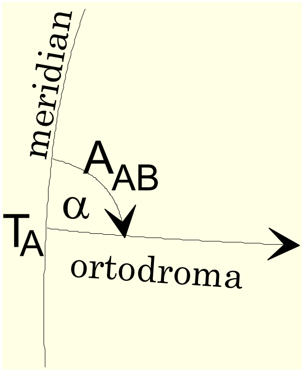
a=90°-ϕ_B

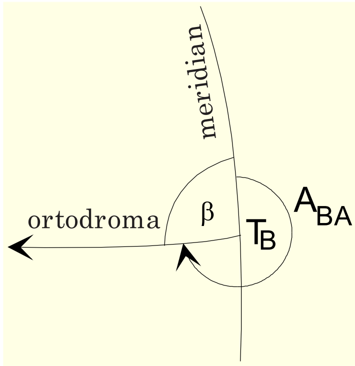
b=90°- ϕ_A

$\gamma = |\lambda_A - \lambda_B| = |\Delta\lambda|$

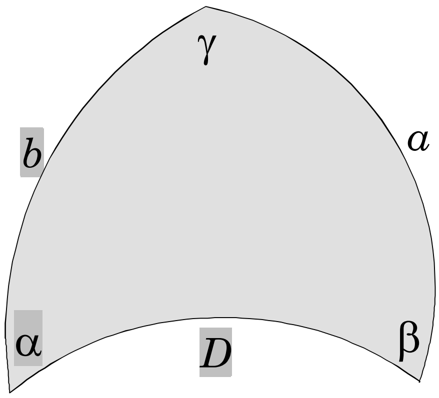
GEODETSKI NALOGI (po ortodromi) 2

- AZIMUT je "smerni kot na krogli". Kot med tangentama na krog meridiana in geodetsko krivuljo iz točke Ta v točko Tb.
- Azimut v točki T_A je enak kotu $A_{AB}=\alpha$.
- Azimut v točki T_B je enak $A_{BA}=360°-\beta$.





Prva geodetska naloga (1)



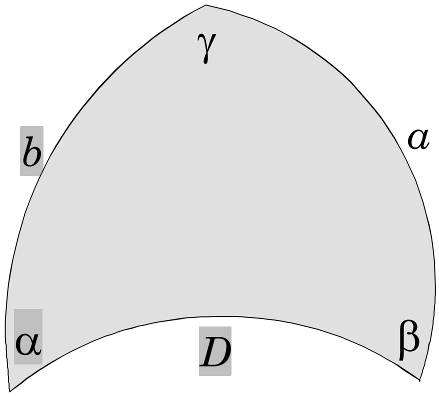
- dano: T_A (ϕ_A,λ_A), D_{AB}, A_{AB}; neznano: T_B (ϕ_B,λ_B)
- splošni sferni trikotnik III. tip naloge;
- Če je dani azimut v mejah med 0º in 180º, je to notranji kot v navtičnem trikotniku. Potem iskana točka T_B leži vzhodno od točke Ta. V primeru da je dani azimut v mejah med 180º in 360º je to zunanji kot v oglišču. Iskana točka leži zahodno od dane točke.
- Dolžina D_{AB} je podana v [km], potrebna pretvorba v kote:

$$D^{\circ} = \frac{D_{\text{km}} 180^{\circ}}{\pi R_{\text{km}}}$$

Stranico a izračunamo po kosinusovem stavku za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos D + \sin b \sin D \cos \alpha$$

Prva geodetska naloga (2)



- Kota β in γ izračunamo s pomočjo Napierjevih enačb:

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b-D}{2}}{\cos\frac{b+D}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{b-D}{2}}{\sin\frac{b+D}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma=\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}$$

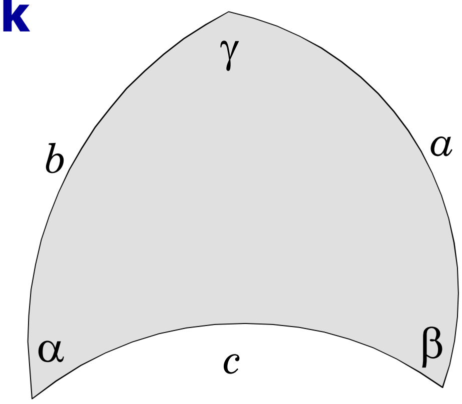
$$\beta=\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Prva geodetska naloga (3)

- Izračunani elementi navtičnega sfernega trikotnika nam dajo ustrezne geografske koordinate točke T_B.
- $a=90^o-\phi_B \quad \Rightarrow \quad \phi_B=90^o-a$
- $\gamma=\Delta\lambda \qquad \lambda_B=\lambda_A\pm\Delta\lambda$

- Pri izbiranju oznak točk (dana, iskana) moramo upoštevati velikost danega azimuta. Oznake si nato ustrezno priredimo. Enako velja za predznak $\pm\Delta\lambda$. Če je dani azimut A < 180º, $\Delta\lambda$ prištejemo, če pa je dani azimut A > 180º , $\Delta\lambda$ odštejemo.

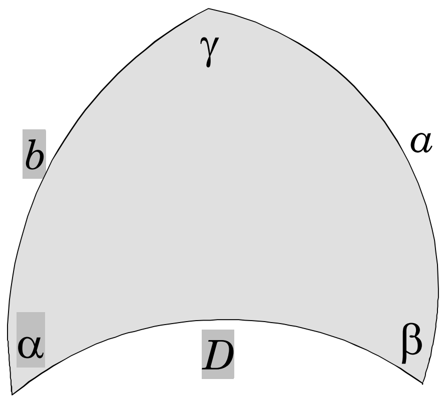
Kotangensni izrek



- Šest elementov sfernega trikotnika lahko napišemo v cikličnem zaporedju $a\gamma b\alpha c\beta$. Kotangensni izrek veže štiri elemente v trikotniku: dve stranici, kot, ki ga oklepata in eni stranici nasproti ležeči kot; vsi elementi so v zaporedju, na primer $a\gamma b\alpha$, ali $\beta a\gamma b$.
- Na primer za kombinacijo $\beta a\gamma b$ so: notranji kot γ, notranja stranica a, zunanji kot β, ter zunanja stranica b. Potem se kotangensni izrek glasi:
- Kotangens zunanje stranice krat sinus notranje stranice je enak: produktu kosinusa notranje stranice in kosinusa notranjega kota plus produktu kotangensa zunanjega kota in sinusa notranjega kota.

$$\cot a \sin b = \cos b \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma$$
$$\cot b \sin c = \cos c \cos\alpha + \cot\beta \sin\alpha$$
$$\cot c \sin b = \cos b \cos\alpha + \cot\gamma \sin\alpha$$
$$\cot a \sin c = \cos c \cos\beta + \cot\alpha \sin\beta$$
$$\rightarrow \qquad \cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \cot\beta \sin\gamma$$
$$\cot c \sin a = \cos a \cos\beta + \cot\gamma \sin\beta$$

Prva geodetska naloga – rešitev s pomočjo kotangensnega izreka



- Razlika je samo v računanju neznanih kotov β in γ.
- Kotangensni izrek za elemente $D\alpha b\gamma$:

$$\cot D \sin b = \cos b \cos\alpha + \cot\gamma \sin\alpha$$

- rešimo kot γ:

$$\cot\gamma \sin\alpha = \cot D \sin b - \cos b \cos\alpha$$
$$\tan\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cot D \sin b - \cos b \cos\alpha}$$

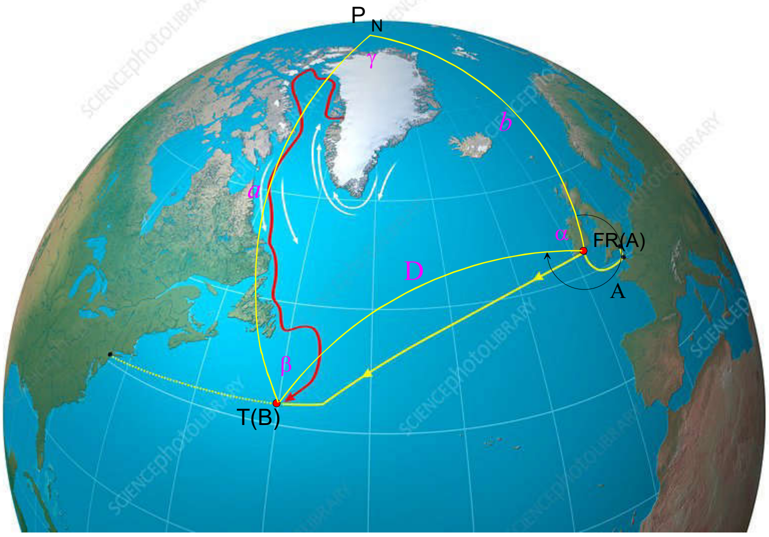
- Kotangensni izrek za elemente $b\gamma a\beta$: $\cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \cot\beta \sin\gamma$
- rešimo kot β:

$$\cot\beta \sin\gamma = \cot b \sin a - \cos a \cos\gamma$$
$$\tan\beta = \frac{\sin\gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos\gamma}$$

Primer: ladja Titanik

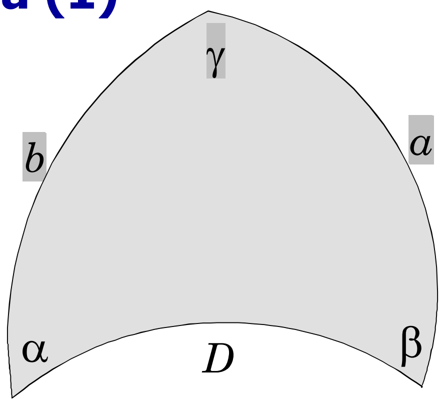
- Ladja "Titanic" je preplula na svoji poti od zadnje stične točke s celino (svetilnik Fastnet Rock) na Irskem, do kraja, kjer je trčila z ledeno goro skupaj 3 236, 6 km (glej sliko). Če je "Titanic" plul z kurzom A= 266°52' (na zahod) in so geografske koordinate svetilnika:

	Geografska širina	Geografska dolžina
Fastnet Rock	N 51° 23' 00”	W 9° 36' 00”



- Izračunaj:
- geografske koordinate mesta trka z ledeno goro. Napiši vse enačbe in nariši ustrezno skico (severna zemeljska polobla in navtični sferni trikotnik). Polmer Zemlje-krogle je R = 6371 km.

Druga geodetska naloga (1)



- dano: T_A (ϕ_A,λ_A) in T_B (ϕ_B,λ_B);
- neznano: D_{AB}, A_{AB}; A_{BA};
- splošni sferni trikotnik III. tip naloge;
- $\gamma = |\Delta\lambda|$

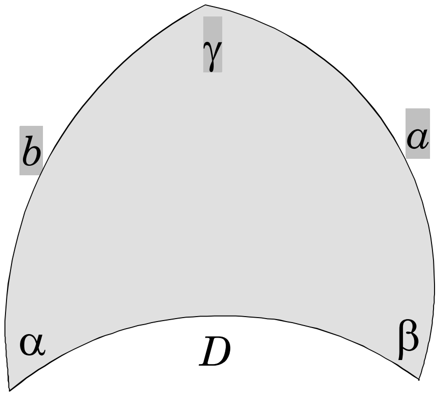
- Razdaljo D izračunamo s pomočjo kosinusovega stavka za stranice:

$$\cos D = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

- Izračunano razdaljo D_{AB} izrazimo v dolžinskih enotah:

$$D_{km} = \frac{\pi R_{km}}{180^\circ} D^\circ$$

Druga geodetska naloga (2)



- Kota α in β dobimo s pomočjo Napierjevih enačb:

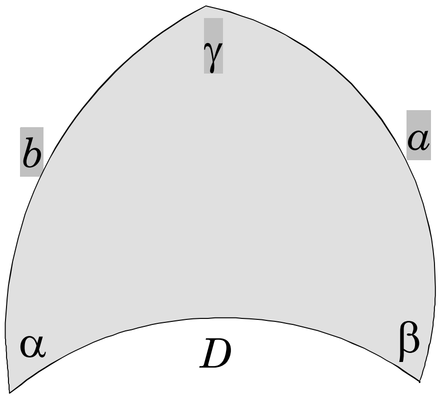
$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$$

- Azimuta sta: $A_{AB}=\alpha$, $A_{BA}=360^\circ-\beta$

Druga geodetska naloga – rešitev s pomočjo kotangensnega izreka



- Razlika je samo v računanju neznanih kotov α in β.
- Kotangensni izrek za elemente $a\gamma b\alpha$:

$$\cot a\sin b=\cos b\cos\gamma+\cot\alpha\sin\gamma$$

izrazimo kot α:

$$\cot\alpha\sin\gamma=\cot a\sin b-\cos b\cos\gamma$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\gamma}{\cot a\sin b-\cos b\cos\gamma}$$

- Kotangensni izrek za elemente $\beta a\gamma b$: $\cot b\sin a=\cos a\cos\gamma+\cot\beta\sin\gamma$

izrazimo kot β:

$$\sin\gamma\cot\beta=\cot b\sin a-\cos a\cos\gamma$$

$$\tan\beta=\frac{\sin\gamma}{\cot b\sin a-\cos a\cos\gamma}$$

- Ortodromno razdaljo izračunamo prav tako po kosinusnem izreku.