

Prehod iz merskega v koordinatni prostor

- Prehod iz merskega v koordinatni prostor \Rightarrow izračun koordinat geodetskih točk.
- Merski prostor
 - Direktno koordinat nikoli ne merimo! Izpeljemo jih indirektno iz meritev (opazovanj)!
 - Meritve so informacija relativnega položaja več točk (najmanj dveh).

- Primer:

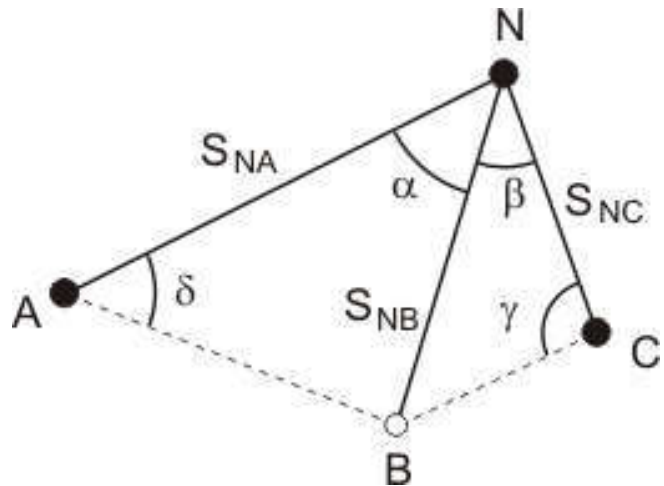
7 opazovanj:

S_{NA} , S_{NB} , S_{NC} , α , β , γ , δ

Za določitev lika ABCN

zadošča 5 opazovanj!

Dve opazovanji sta nadštevilni!

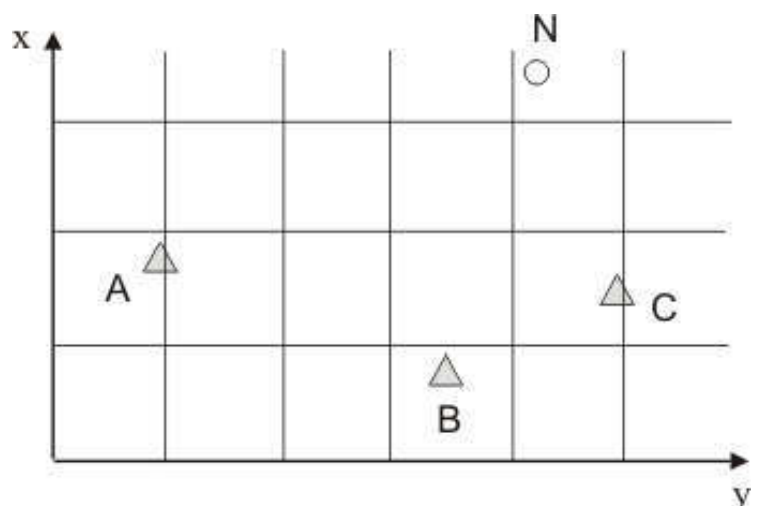


Koordinatni prostor

- Iskane količine so koordinate geodetskih točk!

Koordinate

- Položaji danih točk (A, B, C) so znani (od prej)!
- Iščemo (določamo) koordinate **nove točke** (N)!

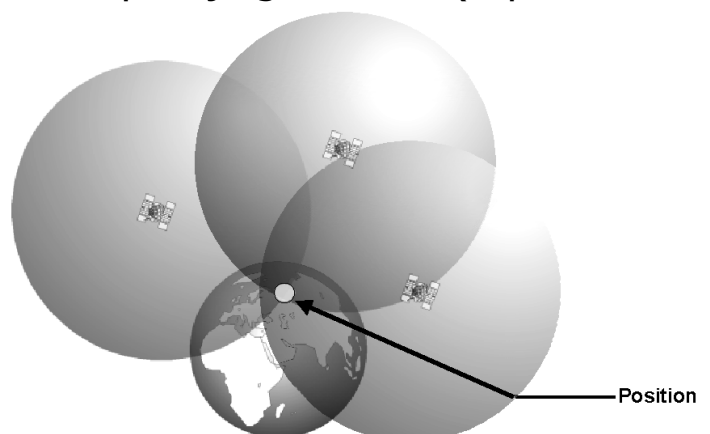


Določanje položaja točk (positioning)

- Različni načini določitve položaja:
 - absolutno določanje položaja;
 - relativno določanje položaja;
 - 3D, 2D, 1D določanje položaja.
- Absolutno določanje položaja:
 - dane koordinate ekstraterestričnih objektov (zvezde, umetni Zemljini sateliti);
 - opravljene meritve do teh objektov (smeri, razdalje);
 - iščemo koordinate opazovališča;
 - potrebujemo 3 vrste koordinatnih sistemov:
 - terestrični (iskane geod. točke);
 - nebesni (zvezde);
 - orbitalni (um. Zemljini sateliti).

Absolutno določanje položaja

- Astronomska opazovanja nam podajo astronomske geografske koordinate (Φ, Λ).
 - Potrebujemo opazovanja do vsaj ene zvezde (ali Sonca). Moramo imeti dostop do točnega časa. Zvezde obravnavamo kot dane točke.
- Opazovanja do um. zemljinih satelitov nam podajo geodetske (elipsoidne koordinate (ϕ, λ, h)).
 - potrebujemo opazovanja do vsaj štirih satelitov (3 za položaj, enega za odpravo pogreška ure v sprejemniku).
 - Tirnice satelita so znane.



Relativno določanje položaja

- Relativno določanje položaja pomeni določitev položaja ene točke glede na drugo. Lahko uporabimo:
 - neposredna opazovanja med točkami;
 - posredna opazovanja s točk do ekstraterestričnih objektov;
- Vrsta opazovanj in vrsta iskanih koordinat določajo matematični model določitve položaja (3D, 2D ali 1D).

- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
 - določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
 - določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").

Določanje položaja točk v ravnini

- Načini določitve:
 - polarna izmera (polarni priklep),
 - zunanji urez (angl. "intersection"),
 - notranji urez (angl. "resection"),
 - ločni presek (angl. "lateration"),
 - prosto stojišče (angl. "free stationing"),
 - poligon – poligonski vlak (angl. "traverse").

- Dane količine:
 - koordinate danih točk.
- Opazovane količine:
 - smeri (koti) in razdalje.

Polarna izmera

- Polarna izmera (polarni priklep) sloni na zvezi med pravokotnimi in polarnimi koordinatami.
- Določitev koordinat nove točke s polarno izmero uporabljamo pri detajlni topografski izmeri. Z dane točke opazujemo drugo dano točko (orientacija), ter izmerimo smer in dolžino do nove točke:

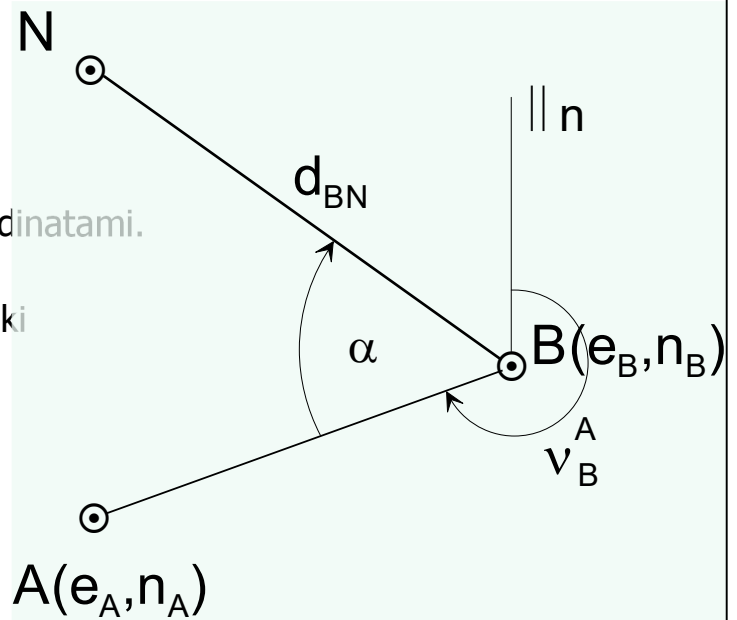
○ dano: $A(e_A, n_A), B(e_B, n_B)$

○ merjeno: α

○ neznano: $N(e_N, n_N)$

○ Postopek:

1. Izračunamo smerni kot iz B na A;
2. izračunamo "orientirano smer" (smerni kot) iz B na N: $v_B^N = v_B^A + \alpha$
3. izračunamo koord. razlike od B do N;
4. Izračunamo koordinate točke N.



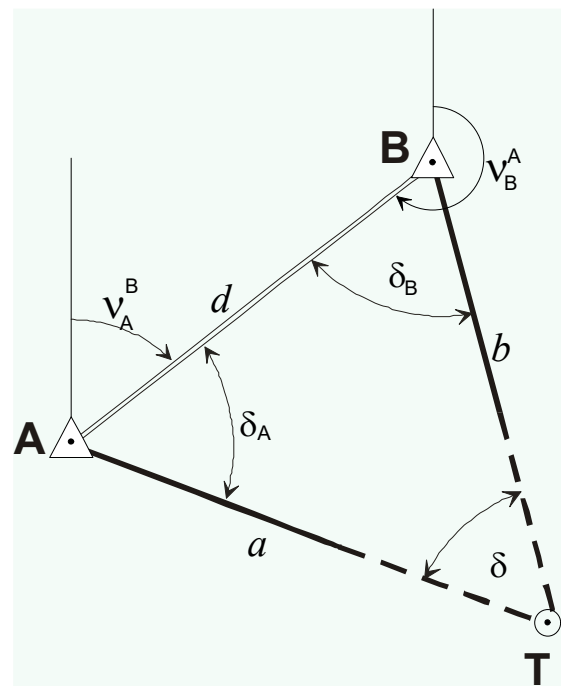
Zunanji urez

- Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih zunanjih smeri iz dveh danih točk. **Zunanja smer** je smer z dane točke na novo točko.

○ dano: $A(Y_A, X_A), B(Y_B, X_B)$

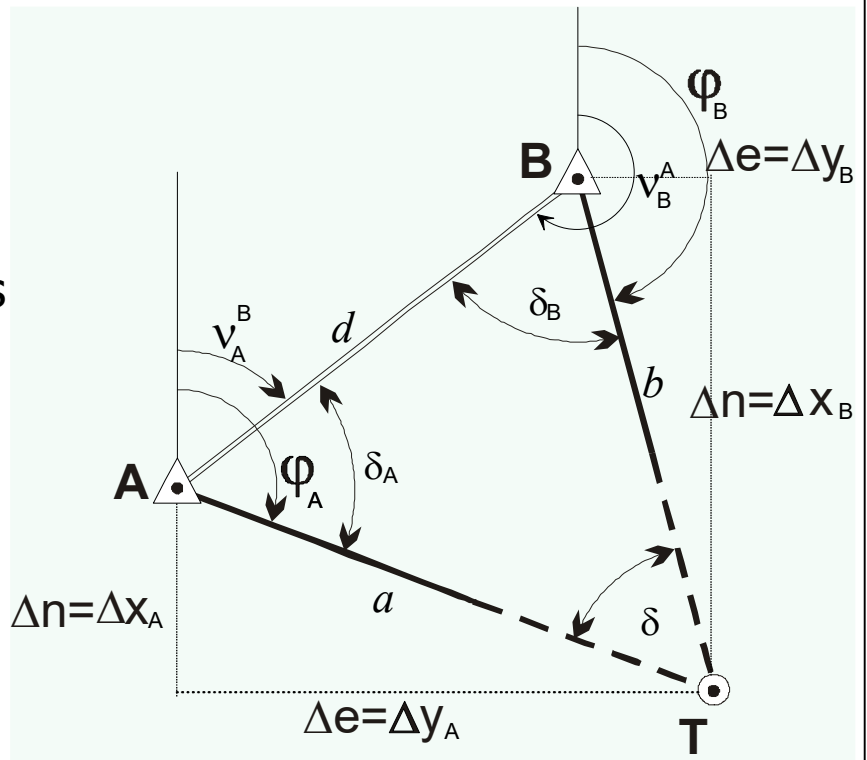
○ merjeno: δ_A, δ_B

○ neznano: $T(Y_T, X_T)$



Zunanji urez

- φ_A in φ_B sta orientirani smeri.
- **Orientirana smer** je kot, ki ga oklepa neka smer s severom.



- Orientirane smeri izračunamo:

$$\varphi_A = v_A^B + \delta_A$$

$$\varphi_B = v_B^A - \delta_B$$

- oz. kot δ v oglišču T izračunamo kot:

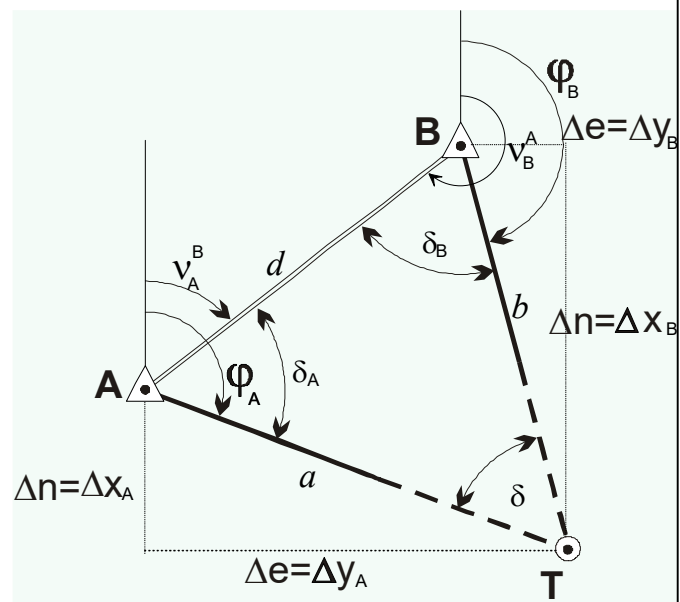
$$\delta_A = \varphi_A - v_A^B$$

$$\delta_B = v_B^A - \varphi_B = (v_A^B \pm 180^\circ) - \varphi_B$$

$$\delta = \varphi_B - \varphi_A$$

- Računska kontrola je: $\delta_A + \delta_B + \delta = 180^\circ$.

- Da bi izračunali koordinate točke T prvo izračunamo koordinatne razlike med točkami A oz. B in T.



- iz sinusovega izreka izračunamo stranice trikotnika a in b .

$$\frac{d}{\sin \delta} = \frac{b}{\sin \delta_A}$$

$$\frac{d}{\sin \delta} = \frac{a}{\sin \delta_B}$$

$$b = \frac{d}{\sin \delta} \sin \delta_A$$

$$a = \frac{d}{\sin \delta} \sin \delta_B$$

- Izračun koordinatnih razlik:

$$\Delta e_A = \Delta y_A = a \sin \varphi_A$$

$$\Delta e_B = \Delta y_B = b \sin \varphi_B$$

$$\Delta n_A = \Delta x_A = a \cos \varphi_A$$

$$\Delta n_B = \Delta x_B = b \cos \varphi_B$$

- Koordinate točke T so:

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T$$

$$n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T$$

$$n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola (koordinati točke T morata biti enaki, če jih računamo s točke A ter s točke B):

$$e_T' = e_T'' \quad n_T' = n_T''$$

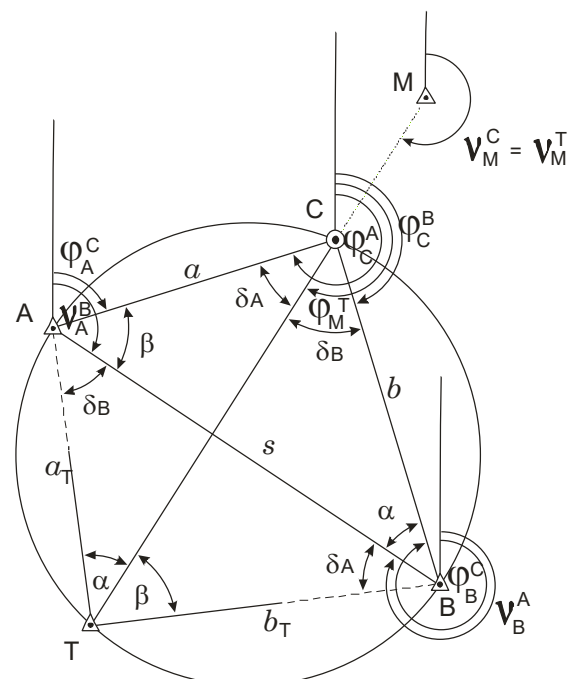
Notranji urez

- Notranji urez je postopek določitve koordinat neznanе točke na osnovi opazovanih notranjih smeri iz nove točke do treh danih točk. **Notranja smer** je smer iz nove točke na dano točko.

- dano: $A(Y_A, X_A), B(Y_B, X_B), M(Y_M, X_M)$
- merjeno: α, β
- neznanо: $T(Y_T, X_T)$

- Obstaja skoraj sto različnih načinov reševanja notranjega ureza.

- Predstavljen bo **Collinsonov** način.



- Skozi točke T, A in B postavimo krog. Premica TM seka ta krog v točki C (v slavo Collinsa se imenuje Collinsova (pomožna) točka).

$$\tan v_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad s_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

- Iz smernega kota v_A^B in kotov α in β izračunamo orientirane smeri s točk A in B na točko C:

$$\varphi_A^C = v_A^B - \beta \qquad \varphi_B^C = v_B^A + \alpha = v_A^B + \alpha + \pi$$

- Kontrola:

$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \varphi_A^C - \varphi_B^C, \qquad \delta = \delta_A + \delta_B$$

- Izračun koordinat Collinsove (pomožne) točke C(y_C, x_C) opravimo na osnovi danih koordinat A in B ter orientiranih smeri φ_A^C in φ_B^C .

$$m = 2 \cdot r = \frac{s}{\sin \delta}$$

$$a = \overline{AC} = m \sin \alpha \qquad b = \overline{BC} = m \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \Delta y_A^C &= a \sin \varphi_A^C & \Delta x_A^C &= a \cos \varphi_A^C \\ \Delta y_B^C &= b \sin \varphi_B^C & \Delta x_B^C &= b \cos \varphi_B^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_C &= y_A + \Delta y_A^C = y_B + \Delta y_B^C \\ x_C &= x_A + \Delta x_A^C = x_B + \Delta x_B^C \end{aligned}$$

- Sedaj imamo določen položaj točke C. Zanima nas položaj točke T. Prvo izračunamo smerni kot s točke M na novo točko C:

$$\tan v_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{\Delta Y_M^C}{\Delta X_M^C}$$

- Z njegovo pomočjo izračunamo lahko orientirane smeri na novo točko T.

$$\delta_B = v_M^C - \varphi_C^B \qquad \delta_A = \varphi_C^A - v_M^C$$

$$\begin{aligned} \varphi_A^T &= v_A^B + \delta_A \\ \varphi_B^T &= v_B^A - \delta_B \end{aligned}$$

$$a_T = \overline{AT} = m \sin \delta_B$$

$$b_T = \overline{BT} = m \sin \delta_A$$

$$\Delta y_A^T = a_T \sin \varphi_A^T$$

$$\Delta x_A^T = a_T \cos \varphi_A^T$$

$$\Delta y_B^T = b_T \sin \varphi_B^T$$

$$\Delta x_B^T = b_T \cos \varphi_B^T$$

$$Y_T' = Y_A + \Delta y_A^T$$

$$X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$

$$Y_T'' = Y_B + \Delta y_B^T$$

$$X_T'' = X_B + \Delta x_B^T$$

- Zadnja kontrola je enaka kot pri zunanjem urezu:

$$Y_T' = Y_T''$$

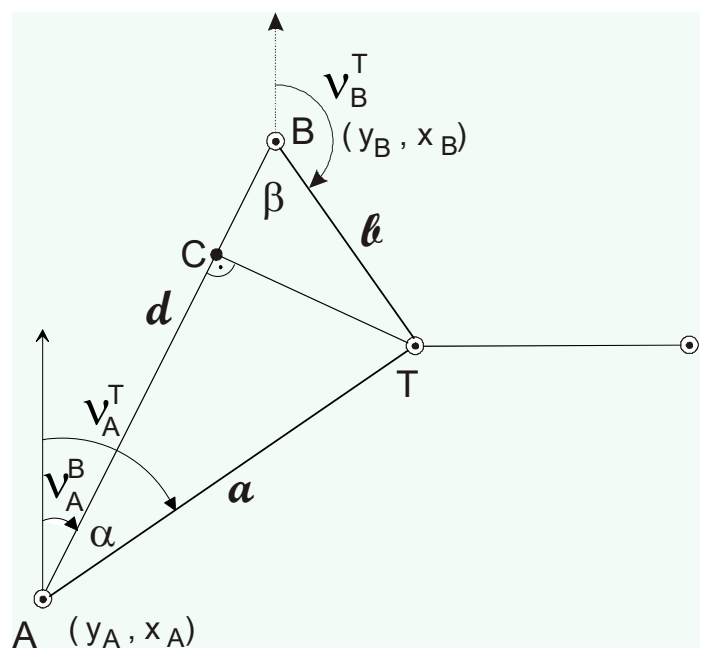
$$X_T' = X_T''$$

Ločni presek

- Ločni presek je postopek za izračun koordinat točke s pomočjo merjenih razdalj od dveh (treh) danih točk do nove točke.

- merjeno: a, b
- dano: $A (e_A, n_A), B (e_B, n_B)$
- neznano: $T (e_T, n_T)$

- Ločni presek lahko izračunamo na dva načina.



○ 1. način (trigonometrični):

○ Iz kosinusovega izreka izračunamo kote v trikotniku $\triangle ABT$:

$$a^2 = d^2 + b^2 - 2db \cos \beta$$

$$b^2 = d^2 + a^2 - 2da \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2da}$$

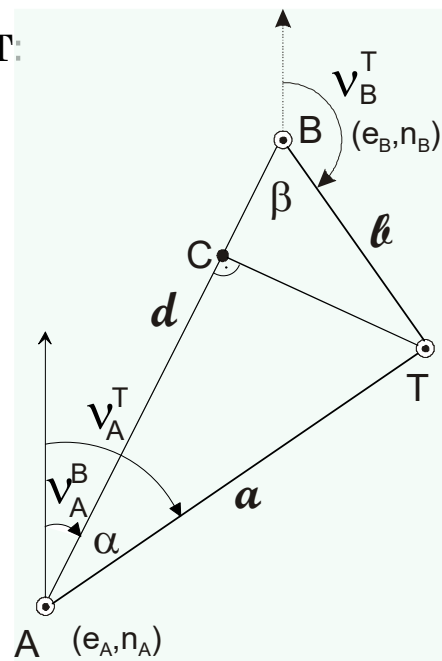
$$\cos \beta = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2db}$$

○ kontrola je: $d = a \cos \alpha + b \cos \beta$

○ Zatem izračunamo smerne kote stranic trikotnika a in b :

$$v_A^T = v_A^B + \alpha$$

$$v_B^T = v_B^A - \beta$$



○ Smerni kot v_A^B izračunamo iz koordinat danih točk A in B.

○ S pomočjo smernih kotov izračunamo koordinatne razlike od A in B do točke T:

$$\Delta e_A^T = a \sin v_A^T$$

$$\Delta n_A^T = a \cos v_A^T$$

$$\Delta e_B^T = b \sin v_B^T$$

$$\Delta n_B^T = b \cos v_B^T$$

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T$$

$$n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T$$

$$n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

○ zadnja kontrola:

$$e_T' = e_T''$$

$$n_T' = n_T''$$

- 2. način (geodetski):
- Način računanja je enak izračunu koordinat linijskih točk. Tukaj računamo delne koordinatne razlike od točk A (B) do točke C (vznožje višine h) ter naprej od točke do nove točke T.
- h je višina v trikotniku $\triangle ABT$;
- p, q projekciji stranic a in b na stranico d ;
- Zveza med projekcijami ter višino in stranicami:

$$h^2 = b^2 - q^2$$

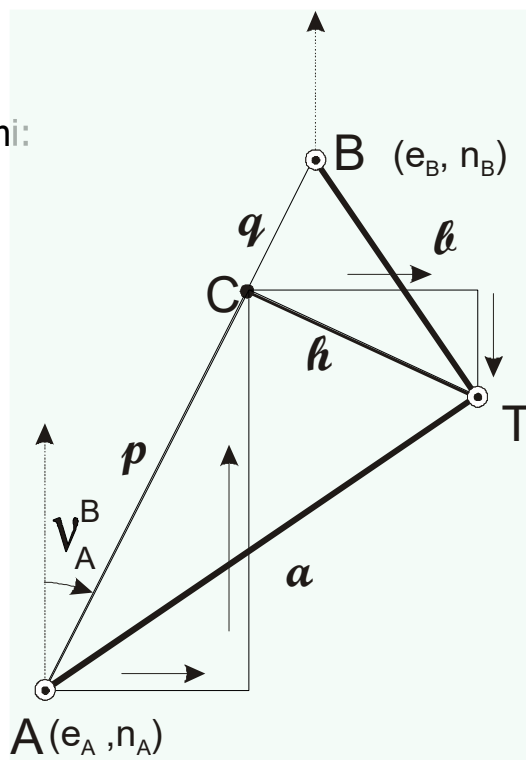
$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$

$$a^2 - b^2 = (p+q)(p-q) \quad (p+q) = d$$

$$\frac{a^2 - b^2}{2d} = \frac{p-q}{2}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{p+q}{2}$$



- Projekciji p in q lahko izračunamo iz zgornjih zvez:

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$$

$$q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$$

- Če je točka z desne strani daljice AB (velja da je h [+]):

$$e_T' = e_A + p \sin v_A^B + h \cos v_A^B$$

$$e_T' = e_B - q \sin v_A^B + h \cos v_A^B$$

$$n_T' = n_A + p \cos v_A^B - h \sin v_A^B$$

$$n_T'' = n_B - q \cos v_A^B - h \sin v_A^B$$

- Če je točka z leve strani daljice AB (velja da je h [-]):

$$e_T' = e_A + p \sin v_A^B - h \cos v_A^B$$

$$e_T' = e_B - q \sin v_A^B - h \cos v_A^B$$

$$n_T' = n_A + p \cos v_A^B + h \sin v_A^B$$

$$n_T'' = n_B - q \sin v_A^B + h \sin v_A^B$$

- Zadnja kontrola:

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T$$

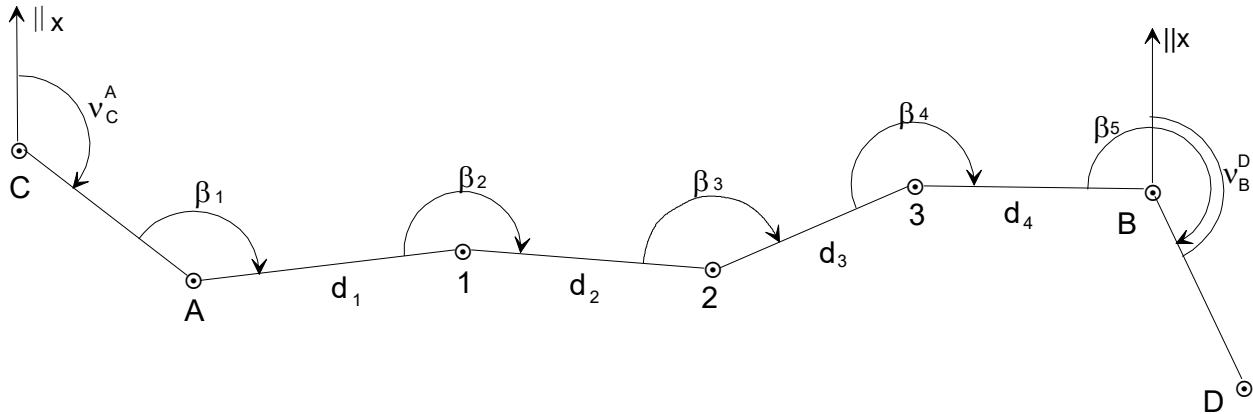
$$n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T$$

$$n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

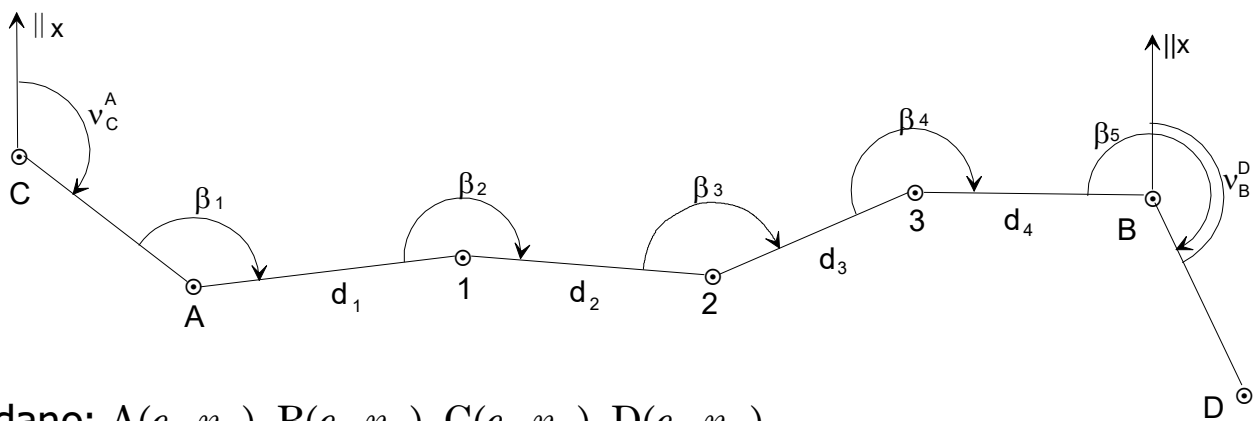
Poligon - poligonski vlak

- Poligonske točke povezane v poligone tvorijo poligonsko mrežo.
- Koordinate poligonskih točk računamo na osnovi merjenih **poligonskih stranic** in **lomnih kotov**.
 - Poligonska stranica je razdalja med dvema poligonskima točkama.
 - Lomni kot je kot med dvema poligonskima stranicama; vrh kota je poligonska točka.



Računanje koordinat poligonskih točk

- Položaj poligonskih točk določimo na osnovi merjenih priklepni in lomnih kotov ter dolžin!
- Primer: priklepni (priključeni poligon)

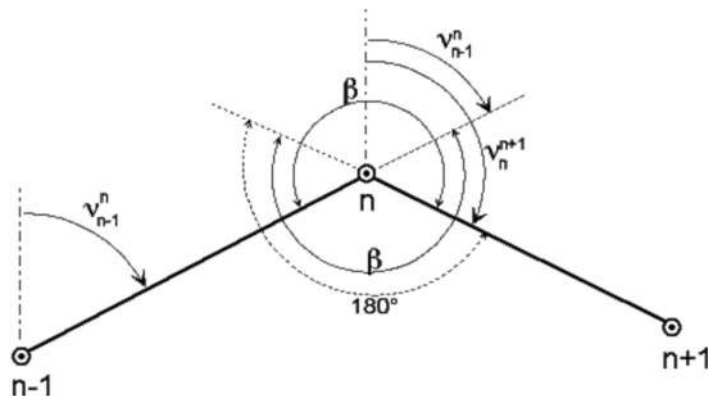


- dano: $A(e_A, n_A)$, $B(e_B, n_B)$, $C(e_C, n_C)$, $D(e_D, n_D)$
- merjeno: $\beta_1, \beta_5, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, d_1, d_2, d_3, d_4$
- neznano: $1(e_1, n_1), 2(e_2, n_2), 3(e_3, n_3)$

- Iz danih koordinat izračunamo smerne kote med danimi točkami v_C^A in v_B^D :

$$\tan v_C^A = \frac{e_A - e_C}{n_A - n_C} \qquad \tan v_B^D = \frac{e_D - e_B}{n_D - n_B}$$

- Da bi izračunali neznane koordinate poligonskih točk moramo izračunati koordinatne razlike Δe in Δn , začevši od prve dane točke A.
- Zveza med smernimi in lomnimi koti – izračun smernega kota posamezne poligonske stranice:



- Splošno velja:

$$v_n^{n+1} = v_{n-1}^n + \beta_n \pm 180^\circ$$

- Za poligon na sliki lahko izračunamo smerne kote na naslednji način:

$$v_A^1 = v_C^A + \beta_1 \pm 180^\circ$$

$$v_1^2 = v_A^1 + \beta_2 \pm 180^\circ$$

...

$$v_B^D = v_3^B + \beta_5 \pm 180^\circ$$

- Izračun koordinat točk v poligonu se opravi prek postopne izravnave.
- Prisotna sta dva pogoja: pogoj kotov in pogoj koordinat.
- **Pogoj kotov**
- Smerni kot v_B^D izračunan iz koordinat točk B in D ne bo enak vrednosti, izračunani iz vsote lomnih kotov.

$$v_B^D = v_C^A + [\beta] \pm n * 180^\circ \qquad [\beta] = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

- Zaradi neizogibnih napak pri merjenju lomnih kotov nastane **kotno nesoglasje** f_β :

$$f_\beta = (v_B^D + n * 180^\circ) - (v_C^A + [\beta])$$

n je število lomnih kotov (β) v poligonu.

- f_β mora biti manjše od dopustnega kotnega nesoglasja Δ_β : $f_\beta < \Delta_\beta$
- Izračun popravkov za merjene lomne kote: kotno nesoglasje delimo s številom lomnik kotov (brez ostanka):

$$v_{\beta_i} = \frac{f_\beta}{n}$$

- S popravljenimi lomnimi koti lahko izračunamo dokončne smerne kote poligonskih stranic in nato koordinatne razlike:

$$\Delta e_1 = d_1 \sin v_A^1 \quad \Delta n_1 = d_1 \cos v_A^1$$

$$\Delta e_2 = d_2 \sin v_1^2 \quad \Delta n_2 = d_2 \cos v_1^2$$

...

○ Pogoj koordinat

- Vsota izračunanih koordinatnih razlik bi morala biti enaka razliki koordinat danih točk A in B:

$$[\Delta e] \neq e_B - e_A \quad [\Delta n] \neq n_B - n_A$$

- Zaradi neizogibnih napak pri merjenju poligonskih stranic pride do t.i. **koordinatnih nesoglasij**:

$$f_y = (e_B - e_A) - [\Delta e]$$

$$f_x = (n_B - n_A) - [\Delta n]$$

Iz koordinatnih nesoglasij lahko izračunamo skupno linearno nesoglasje: $f_d = \sqrt{f_n^2 + f_e^2}$

- To mora biti manjše ali enako dopustnemu linearnemu nesoglasju Δ_d : $f_d \leq \Delta_d$

- Koordinatna nesoglasja f_y in f_x porazdelimo na koordinatne razlike in to sorazmerno dolžinam posameznih poligonskih stranic. Izračunamo popravke $v_{\Delta e}$ in $v_{\Delta n}$:

$$v_{\Delta e_i} = \frac{f_e}{[d]} d_i \quad v_{\Delta n_i} = \frac{f_n}{[d]} d_i$$

$[d]$ je vsota poligonskih stranic poligona

- Izračunane popravke algebrsko prištejemo posameznim koordinatnim razlikam in dobimo popravljene koordinatne razlike $\Delta e'_i$ in $\Delta n'_i$:

$$\Delta e'_i = \Delta e_i + v_{\Delta e_i} \quad \Delta n'_i = \Delta n_i + v_{\Delta n_i}$$

- S popravljenimi koordinatnimi razlikami izračunamo koordinate poligonskih točk:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_A + \Delta e'_1 & n_1 &= n_A + \Delta n'_1 \\ e_2 &= e_1 + \Delta e'_2 & n_2 &= n_1 + \Delta n'_2 \\ e_3 &= e_2 + \Delta e'_3 & n_3 &= n_2 + \Delta n'_3 \\ e_B &= e_3 + \Delta e'_4 & n_B &= n_3 + \Delta n'_4 \end{aligned}$$

- Vsa računanja se ponavadi opravijo v trigonometričnem obrazcu številka 19.

Zaključeni poligon

- dano: $A(e_A, n_A)$, $1(e_1, n_1)$
- merjeno: $\beta_1, \beta_5, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$
- neznano: $2(e_2, n_2), 3(e_3, n_3), 4(e_4, n_4), 5(e_5, n_5)$

