Geodetski nalogi na krogli

- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
- določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
- določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").

- Pojem geodetske linije: "Geodetska linija je najkrajša povezava med dvema točkama na poljubni ploskvi", (matematično "geodétka", angl. "Geodesic").

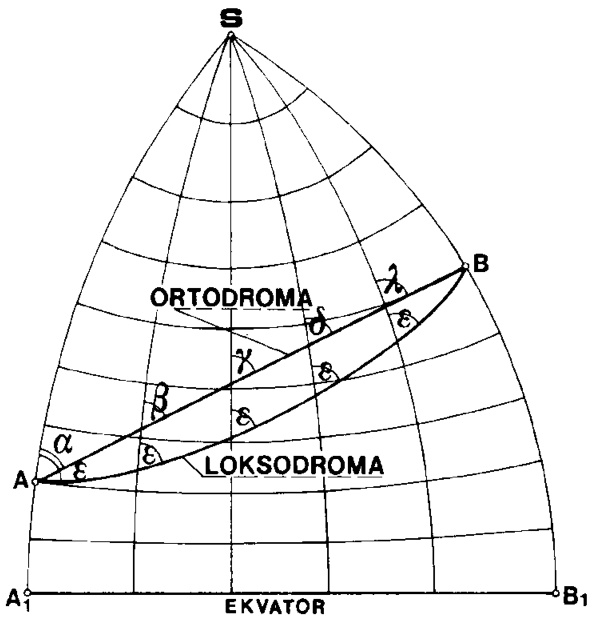
- Na Zemlji krogli se srečamo s posebnimi krivuljami:
  - ortodroma,
  - loksodroma.

ORTODROMA IN LOKSODROMA (1)

- Na krogli je geodetska linija krajši lok velikega kroga, ki poteka skozi ti dve točki na površju krogle.
- V navigaciji in geodeziji se imenuje geodetska linija "ortodroma" (iz grščine "ortos" → pravi in "dromos" → pot; angl. "Great Circle oz. "Orthodrome" .

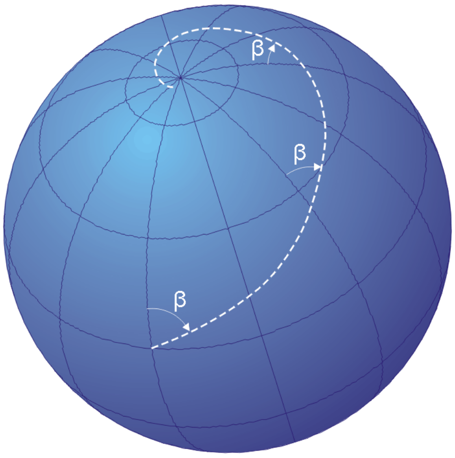
- Na Zemlji-krogli je ortodroma najkrajša pot med dvema točkama.

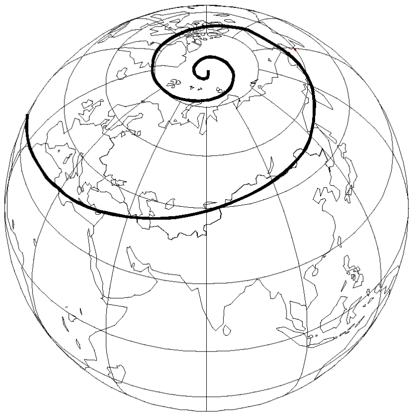
- Če plujemo po ortodromi moramo neprestano spreminjati kurz plovila.



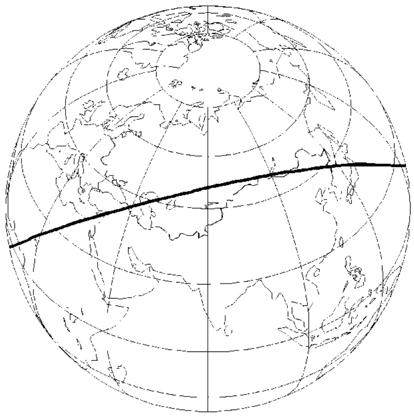
ORTODROMA IN LOKSODROMA (2)

- "Loksodroma" je krivulja na krogli, ki seka vse meridiane pod istim kotom (iz grščine "loksos" → poševen; angl. "rhumb line").
- Ladja, ki pluje po loksodromi ima prednost konstantnega kurza in pomanjkljivost daljše poti. Loksodroma je prostorska krivulja, ki se polu neprestano približuje in ga nikdar ne doseže.





loksodroma



ortodroma

ORTODROMA IN LOKSODROMA (3)

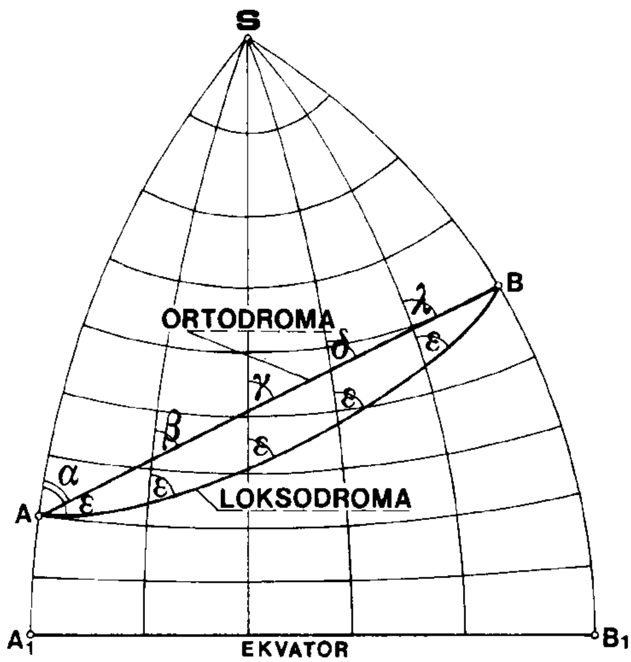
- Enačba ortodrome:

$$\cos D_{AB} = \cos(90° - \phi_B)\cos(90° - \phi_A) + \sin(90° - \phi_B)\sin(90° - \phi_A)\cos\Delta\lambda$$

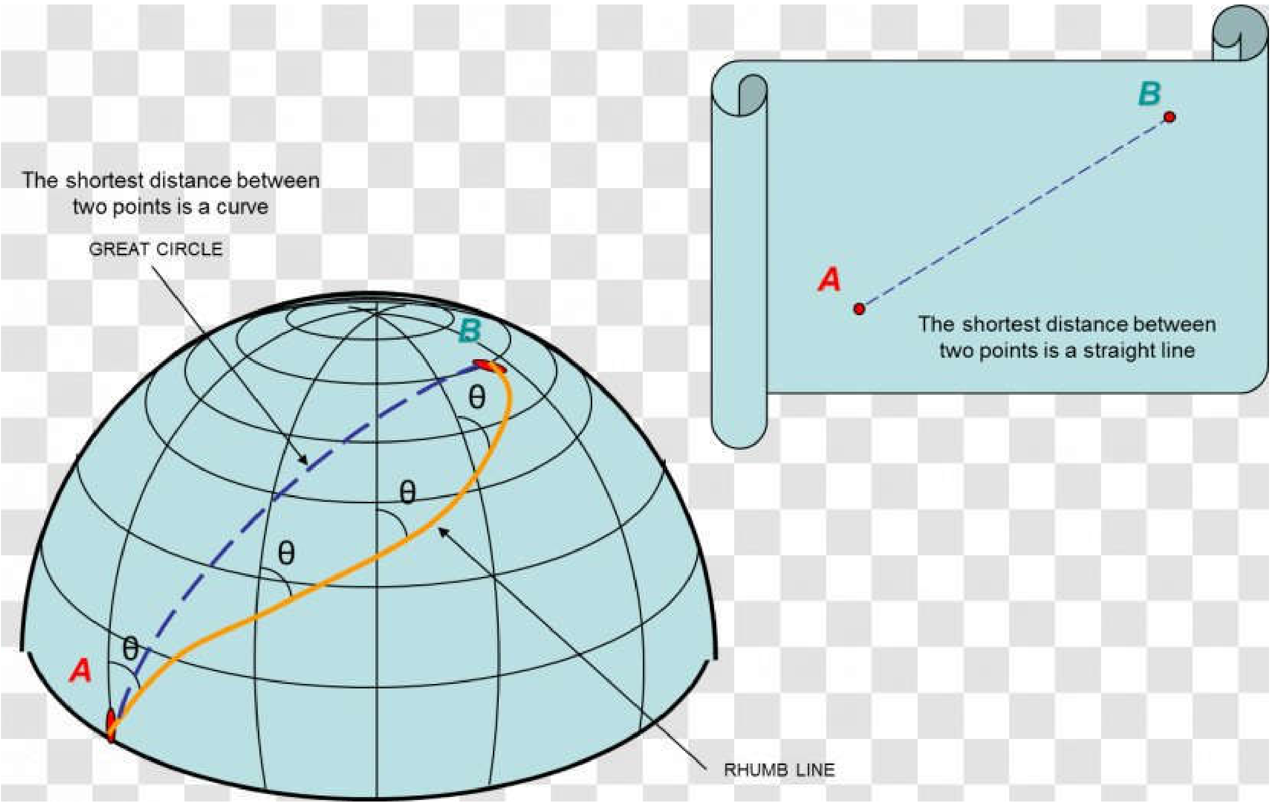
$$\cos D_{AB} = \sin\phi_B \sin\phi_A + \cos\phi_B \cos\phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)$$

- Enačba loksodrome:

$$L_{AB} = \frac{R_{[km]}(\phi_B - \phi_A)_{[rad]}}{\cos A_{AB}}$$

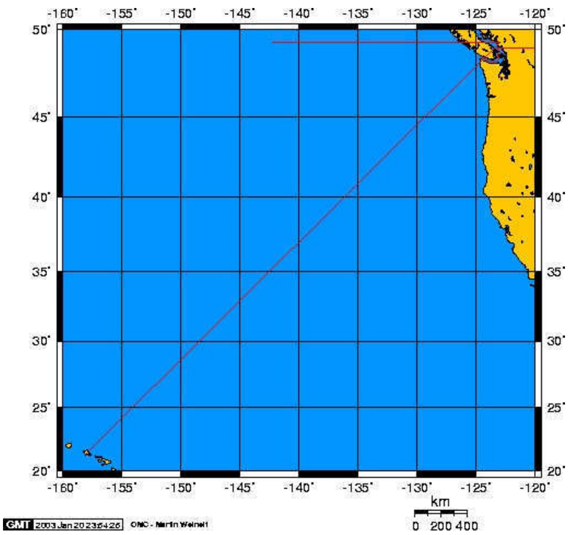


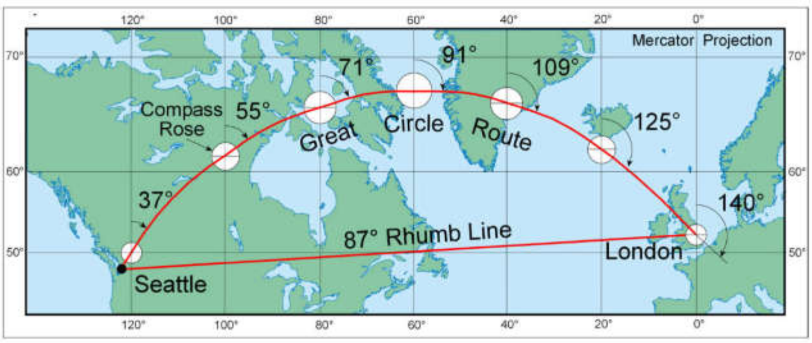
ORTODROMA IN LOKSODROMA (4)



Loksodroma na karti (Merkatorjeva projekcija)

- Na karti v Merkatorjevi projekciji je loksodroma premica!



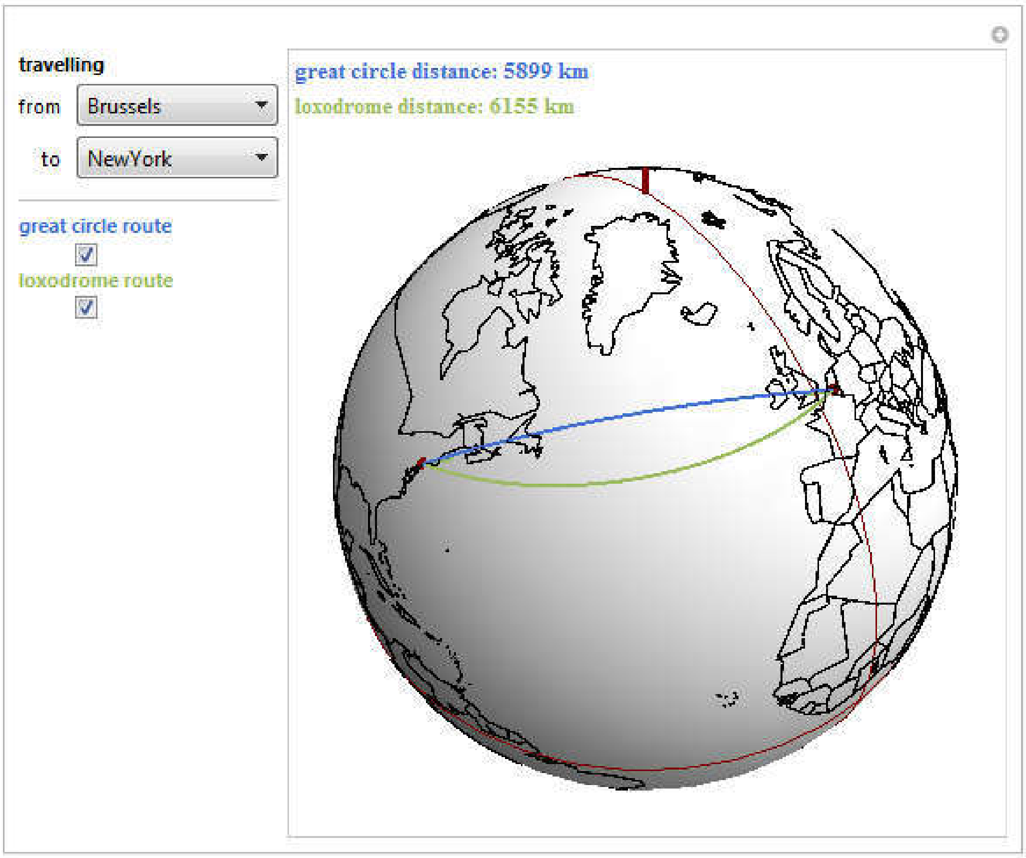


ORTODROMA IN LOKSODROMA (5)

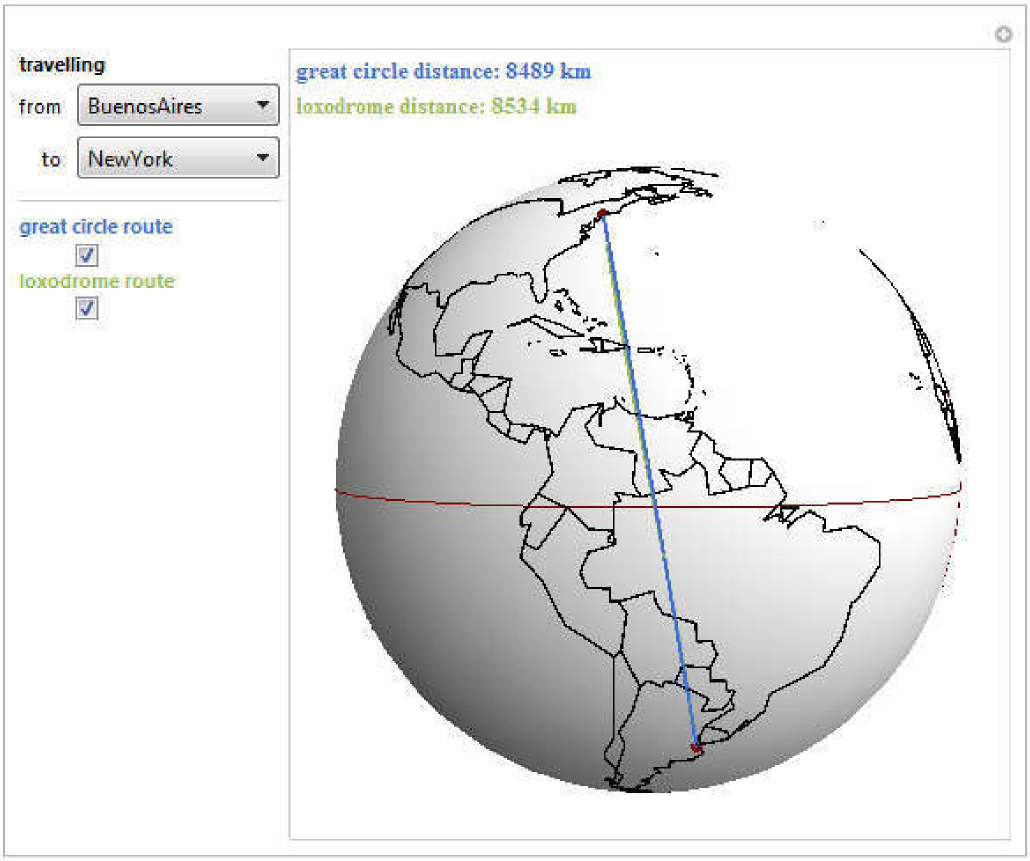
- Poseben primer loksodrom na Zemlji – krogli so ekvator, vsi meridiani in vsi vzporedniki. Meridiani so loksodrome s kurzom 0° ali 180°, vzporedniki so loksodrome s kurzom 90° oz. 270°.

- Plovba po ortodromi terja stalno menjavo kurza, kar je praktično nemogoče. Zato se na velike razdalje (nekaj tisoč km) pluje po loksodromi, največkrat tako, da se ortodroma med izhodiščem in ciljem aproksimira z loki posameznih loksodrom in se le občasno, na nekaj sto km prevožene poti, menja kurz plovila.
- Na krajše razdalje (do tisoč km) pa se v praksi skoraj vedno pluje po loksodromi.

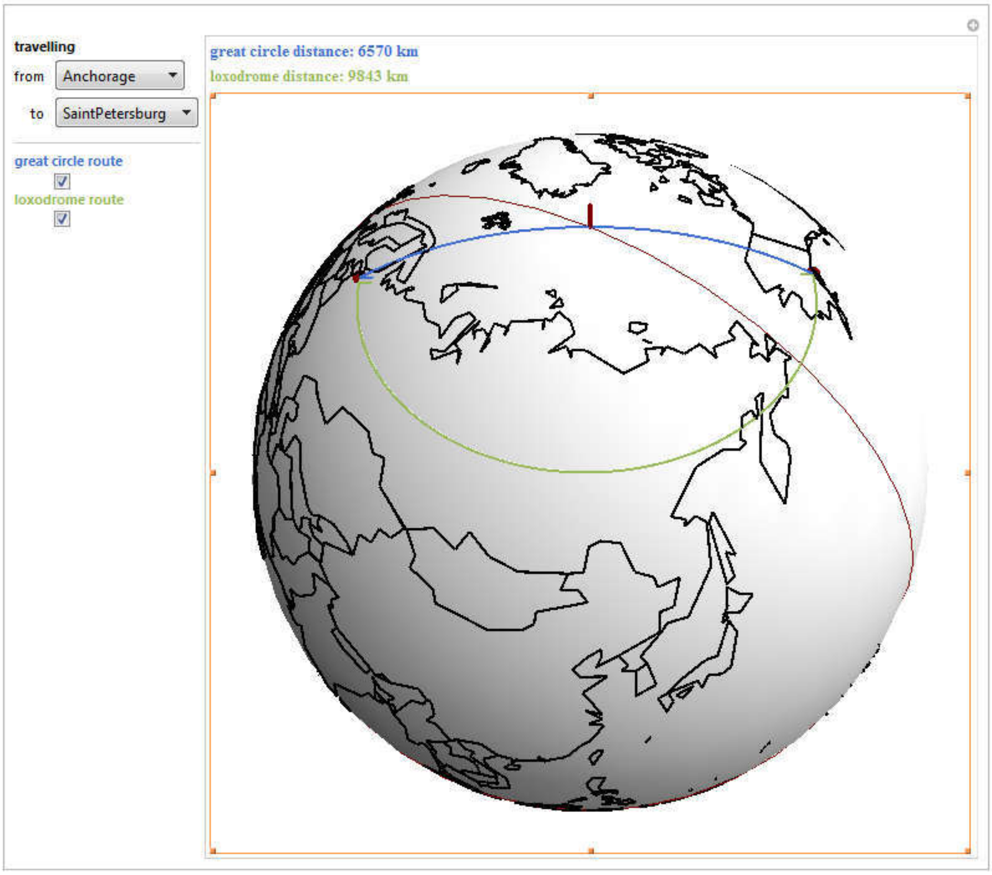
Primerjava ortodrome in loksodrome (E - Z)



Primerjava ortodrome in loksodrome (S - J)



Primerjava ortodrome in loksodrome - pot čez pol



Primerjava v Tržaškem zalivu in širše

		Dolžina		
Območje	Smer	ortodroma	loksodroma	$\Delta_{L\text{-}O}$
Tržaški zaliv	Koper - Gradež	30398,090 m	30398,114 m	0,023 m
	Koper - Tržič	32677,072 m	32677,080 m	0,008 m
	Trst - Gradež	29439,090 m	29439,118 m	0,027 m
	Tržič - Savudrija	35184,108 m	35184,108 m	0,000 m
Jadransko morje	Koper - Benetke	110003 m	110006 m	3 m
	Trst - Benetke	114292 m	114294 m	2 m
	Gradež - Dubrovnik	504002 m	504071 m	69 m
svet	Miami - Lizbona	6672 km	6812 km	140 km
	Sydney - San Francisco	11948 km	15742 km	3794 km
	Melbourne - Buenos Aires	11602 km	18271 km	6668 km

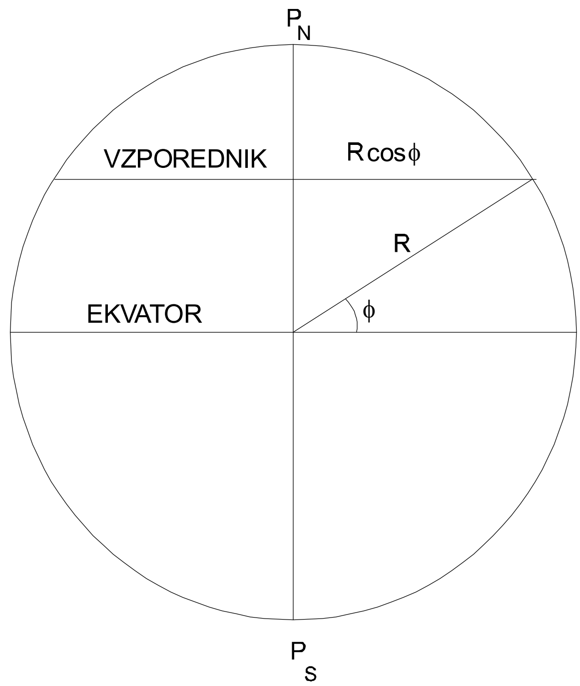
Lok na vzporedniku in meridianu

- Vsi meridiani na Zemlji-krogli imajo enak polmer, ta je enak polmeru krogle. Vsi vzporedniki (ker so mali krogi), imajo manjši polmer. Polmer vzporednika z geografsko širino ϕ lahko enostavno izračunamo iz zveze v pravokotnem trikotniku:

$$R_\phi = R\cos\phi$$

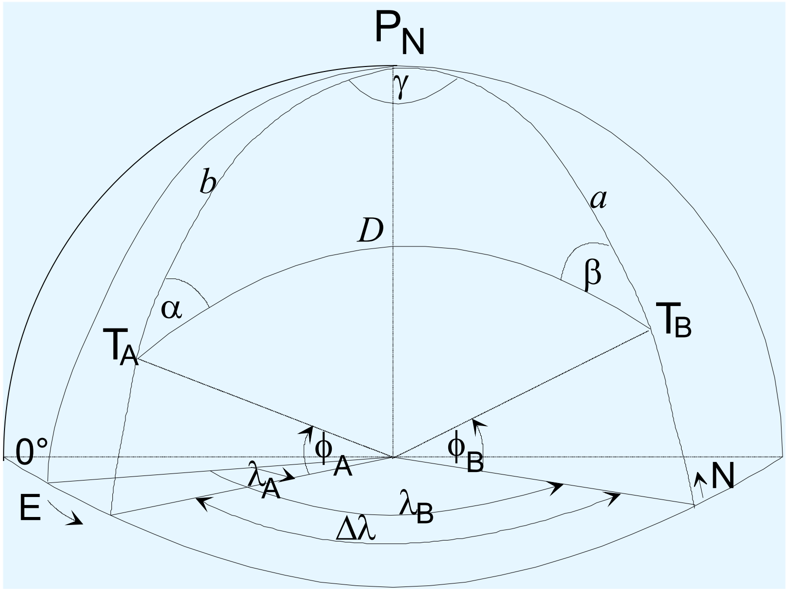
- Obseg vzporednika je potem:

$$O_\phi = 2R_\phi\pi = 2R\pi\cos\phi$$



GEODETSKI NALOGI (po ortodromi)

- 1. dano: T_A (ϕ_A,λ_A), D_{AB}, A_{AB}
  neznano: Tb (ϕ_B,λ_B)
- 2. dano: T_A (ϕ_A,λ_A), T_B (ϕ_B,λ_B)
  neznano: D_{AB}, A_{AB}, A_{BA}



navtični sferni trikotnik $N_PT_AT_B$:

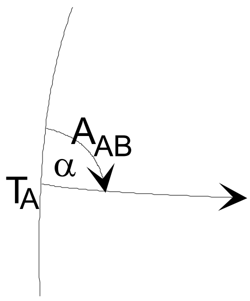
a=90°-ϕ_B

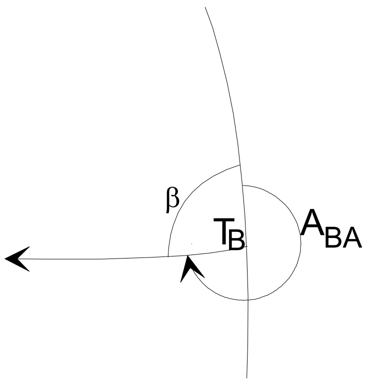
b=90°- ϕ_A

$\gamma = |\lambda_A - \lambda_B| = |\Delta\lambda|$

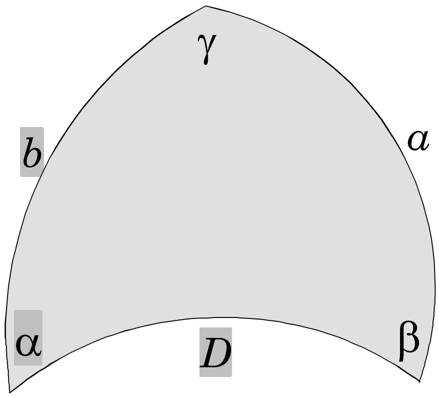
Geodetski nalogi - azimut na krogli (kurz plovila ali letala)

- AZIMUT je kot med tangentama na krog meridiana in geodetsko krivuljo iz točke T_A v točko T_B.
- Azimut v točki T_A je enak kotu A_{AB}=α.
- Azimut v točki T_B je enak A_{BA}=360°-β.
- Kurz plovila (letala) ali trenutna smer plovbe je kot, ki ga trajektorija plovila tvori z meridianom.





Prva geodetska naloga (1)



- dano: T_A (ϕ_A,λ_A), D_{AB}, A_{AB}; neznano: T_B (ϕ_B,λ_B)
- splošni sferni trikotnik III. tip naloge;
- Če je dani azimut v mejah med 0º in 180º, je to notranji kot v navtičnem trikotniku. Potem iskana točka T_B leži vzhodno od točke Ta. V primeru, da je dani azimut v mejah med 180º in 360º je to zunanji kot v oglišču. Iskana točka leži zahodno od dane točke.

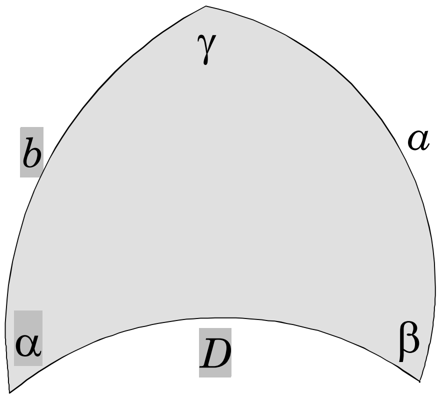
- Dolžina D_{AB} je podana v [km], potrebna pretvorba v kote:

$$D^{\circ} = \frac{D_{\mathrm{km}} 180^{\circ}}{\pi R_{\mathrm{km}}}$$

- Stranico a izračunamo po kosinusnem izreku za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos D + \sin b \sin D \cos \alpha$$

Prva geodetska naloga (2)



- Kota β in γ izračunamo s pomočjo Napierjevih enačb:

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-D}{2}}{\cos\frac{b+D}{2}}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-D}{2}}{\sin\frac{b+D}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}$$

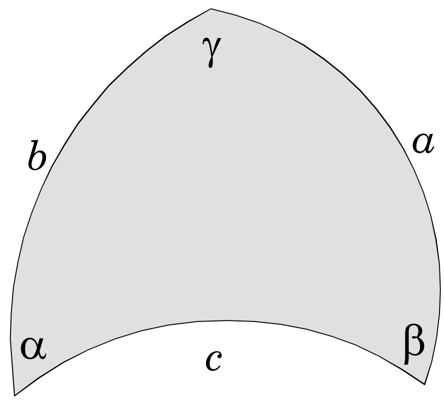
Prva geodetska naloga (3)

- Izračunani elementi navtičnega sfernega trikotnika nam dajo ustrezne geografske koordinate točke T_B.

- $a = 90^o - \phi_B \Rightarrow \phi_B = 90^o - a$
- $\gamma = \Delta\lambda$ oz. $\lambda_B = \lambda_A \pm \Delta\lambda$

- Pri izbiranju oznak točk (dana, iskana) moramo upoštevati velikost danega azimuta. Oznake si nato ustrezno priredimo. Enako velja za predznak $\pm\Delta\lambda$. Če je dani azimut $A < 180^o$, $\Delta\lambda$ prištejemo, če pa je dani azimut $A > 180^o$, $\Delta\lambda$ odštejemo.

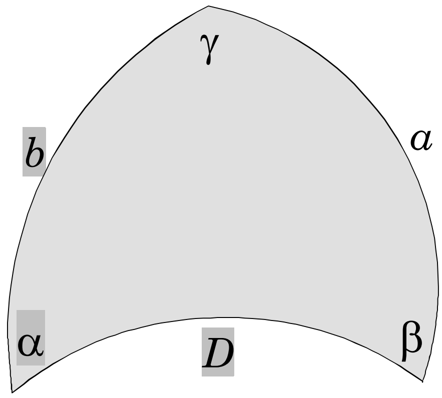
Kotangensni izrek



- Šest elementov sfernega trikotnika lahko napišemo v cikličnem zaporedju $a\gamma b\alpha c\beta$. Kotangensni izrek veže štiri elemente v trikotniku: dve stranici, kot, ki ga oklepata in eni stranici nasproti ležeči kot; vsi elementi so v zaporedju, na primer $a\gamma b\alpha$, ali $\beta a\gamma b$.
- Na primer za kombinacijo $\beta a\gamma b$ so: notranji kot γ, notranja stranica a, zunanji kot β, ter zunanja stranica b. Potem se kotangensni izrek glasi:
- Kotangens zunanje stranice krat sinus notranje stranice je enak: produktu kosinusa notranje stranice in kosinusa notranjega kota plus produktu kotangensa zunanjega kota in sinusa notranjega kota.

$$\cot a \sin b = \cos b \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma$$
$$\cot b \sin c = \cos c \cos\alpha + \cot\beta \sin\alpha$$
$$\cot c \sin b = \cos b \cos\alpha + \cot\gamma \sin\alpha$$
$$\cot a \sin c = \cos c \cos\beta + \cot\alpha \sin\beta$$
$$\rightarrow \quad \cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \cot\beta \sin\gamma$$
$$\cot c \sin a = \cos a \cos\beta + \cot\gamma \sin\beta$$

Prva geodetska naloga – rešitev s pomočjo kotangensnega izreka



- Razlika je samo v računanju neznanih kotov β in γ.
- Kotangensni izrek za elemente $D\alpha b\gamma$:

$$\cot D \sin b = \cos b \cos\alpha + \cot\gamma \sin\alpha$$

- rešimo kot γ:

$$\cot\gamma \sin\alpha = \cot D \sin b - \cos b \cos\alpha$$

$$\tan\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cot D \sin b - \cos b \cos\alpha}$$

- Kotangensni izrek za elemente $\beta D\alpha b$:
- $$\cot b \sin D = \cos D \cos\alpha + \cot\beta \sin\alpha$$

- rešimo kot β:

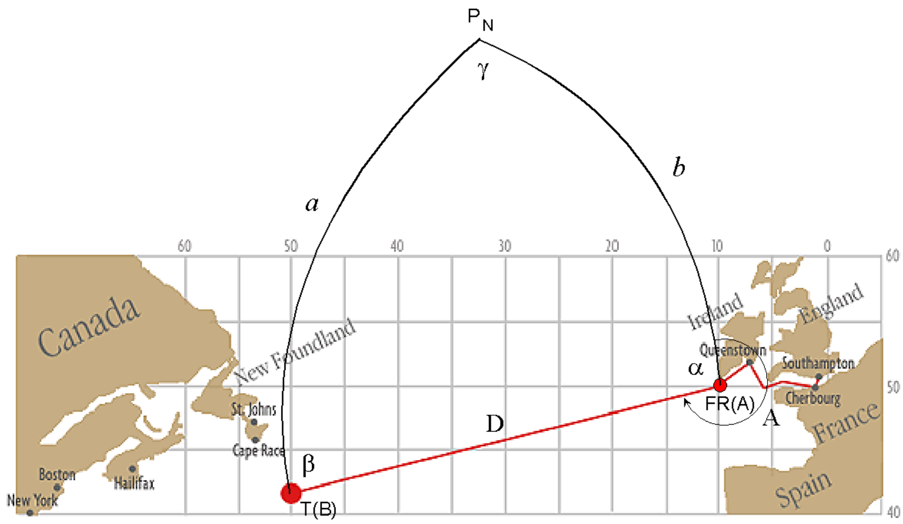
$$\cot\beta \sin\alpha = \cot b \sin D - \cos D \cos\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cot b \sin D - \cos D \cos\alpha}$$

Primer: ladja Titanik

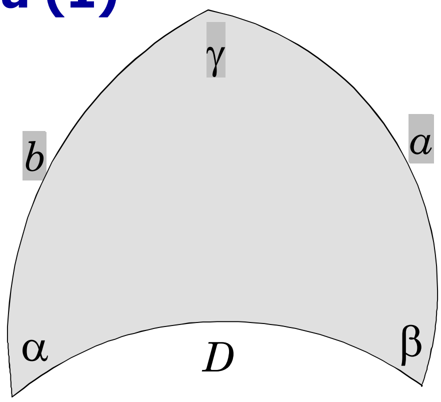
- Ladja "Titanic" je preplula na svoji poti od zadnje stične točke s celino (svetilnik Fastnet Rock) na Irskem, do kraja, kjer je trčila z ledeno goro skupaj 3 236, 6 km (glej sliko). Če je "Titanic" plul z kurzom A= 266°52' (na zahod) in so geografske koordinate svetilnika:

	Geografska širina	Geografska dolžina
Fastnet Rock	N 51° 23' 00”	W 9° 36' 00”



- Izračunaj:
- geografske koordinate mesta trka z ledeno goro. Napiši vse enačbe in nariši ustrezno skico (severna zemeljska polobla in navtični sferni trikotnik). Polmer Zemlje-krogle je R = 6371 km.

Druga geodetska naloga (1)



- dano: T_A (ϕ_A,λ_A) in T_B (ϕ_B,λ_B);
- neznano: D_{AB}, A_{AB}; A_{BA};
- splošni sferni trikotnik III. tip naloge;
- $\gamma = |\Delta\lambda|$

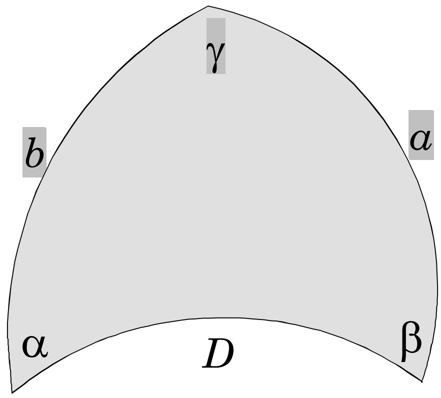
- Razdaljo D izračunamo s pomočjo kosinusnega izreka za stranice:

$$\cos D = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

- Izračunano razdaljo D_{AB} izrazimo v dolžinskih enotah:

$$D_{km} = \frac{\pi R_{km}}{180°} D^{o}$$

Druga geodetska naloga (2)



- Kota α in β dobimo s pomočjo Napierjevih enačb:

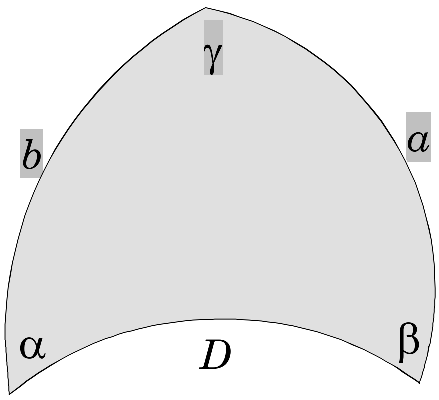
$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cot\frac{\gamma}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$

- Azimuta sta: $A_{AB} = \alpha$, $A_{BA} = 360° - \beta$

Druga geodetska naloga – rešitev s pomočjo kotangensnega izreka



- Razlika je samo v računanju neznanih kotov α in β.
- Kotangensni izrek za elemente $a\gamma b\alpha$:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma$$

  izrazimo kot α:

$$\cot\alpha \sin\gamma = \cot a \sin b - \cos b \cos\gamma$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cot a \sin b - \cos b \cos\gamma}$$

- Kotangensni izrek za elemente $\beta a \gamma b$: $\cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \cot\beta \sin\gamma$

  izrazimo kot β:

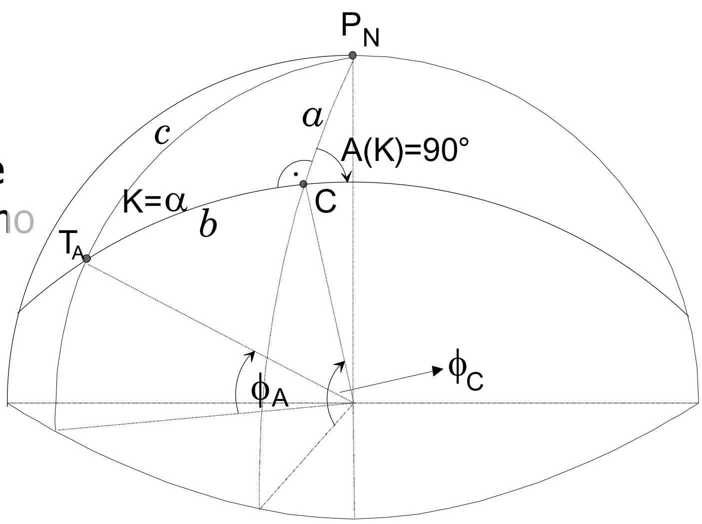
$$\sin\gamma \cot\beta = \cot b \sin a - \cos a \cos\gamma$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos\gamma}$$

- Ortodromno razdaljo izračunamo prav tako po kosinusnem izreku.

Plovba po ortodromi – najsevernejša točka na poti

- V najsevernejši točki poti (ortodrome) je azimut 90°, torej je meridian te točke pravokoten na ortodromo, hkrati je ortodroma vzporedna s tangento na vzporednik.
- Op: kurz (K) je dejansko azimut v točki obravnave (K = A).
- Maksimalno geogr. širino, ki jo doseže ladja (najsevernejša točka), izračunamo s pomočjo Napierjevega pravila (pravokotni sf. trikotnik):



$$\cos(90° - a) = \sin c \sin\alpha$$

$$\sin a = \sin c \sin\alpha$$

$$\cos\phi_C = \cos\phi_A \sin A_{AC}$$

$$c = 90° - \phi_A$$

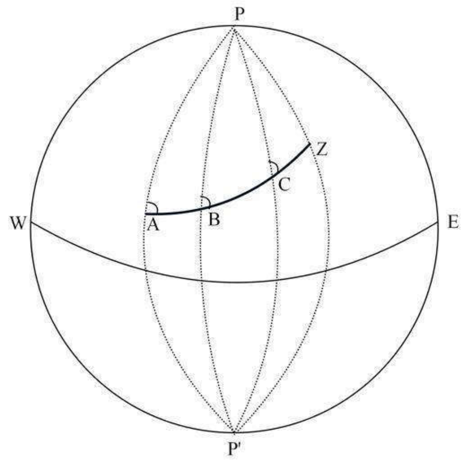
$$\alpha = A_{AC}(K_A)$$

$$a = 90° - \phi_C$$

$$\phi_C = \phi_{\max}$$

Plovba po loksodromi

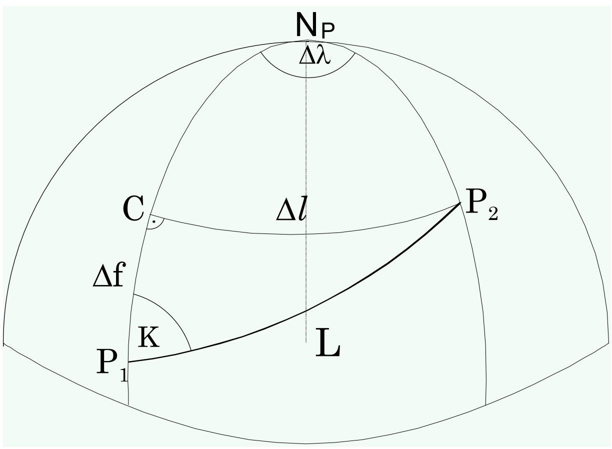
- Plovba po ortodromi terja stalno menjavo kurza, kar je praktično nemogoče. Zato se na velike razdalje (nekaj tisoč km) pluje po loksodromi, največkrat tako, da se ortodroma med izhodiščem in ciljem aproksimira z loki posameznih loksodrom in se le občasno, na nekaj sto km prevožene poti, menja kurz plovila.



- Na krajše razdalje (do tisoč km) pa se v praksi skoraj vedno pluje po loksodromi.

Enačba loksodrome (1)

- Podani sta dve točki z geografskimi koordinatami, P_1 in P_2. Loksodromski trikotnik P_1P_2C (pravokoten).



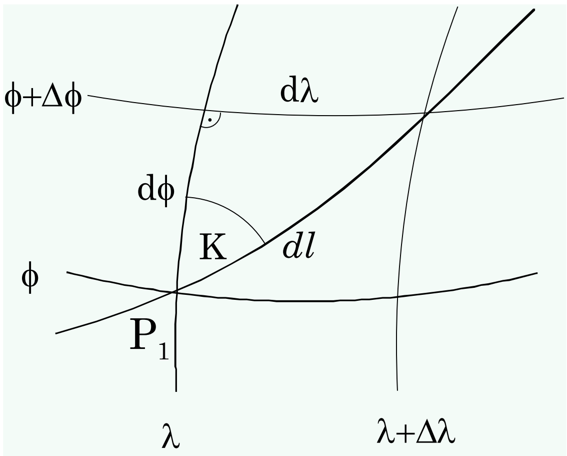
- Stranici so: $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$

$$CP_1 = \Delta f = \Delta\phi \times R \qquad CP_2 = \Delta l = \Delta\lambda \times R_\phi = \Delta\lambda R \cos\phi_2$$

- Računamo dolžino loksodrome in kurz plovila iz točke P_1 proti P_2.

Enačba loksodrome (2)

- Obravnavamo samo infinitezimalno majhen del loksodrome, ki poteka skozi točko P1: $\Delta\lambda \to d\lambda$
  $\Delta\phi \to d\phi$



- Trikotnik obravnavamo kot raven pravokotni trikotnik.
- Kurz dobimo: $\tan K = \dfrac{R d\lambda \cos\phi}{R d\phi}$
- Od tod sledi diferencialna enačba:

$$\frac{d\lambda}{\tan K} = \frac{d\phi}{\cos\phi}$$

- Diferencialna enačba loksodrome z kurzom K:

$$\lambda = \tan K \int \frac{d\phi}{\cos\phi}$$

$$\lambda = \tan K \ln \tan\left(45° + \frac{\phi}{2}\right) + C$$

Enačba loksodrome (3)

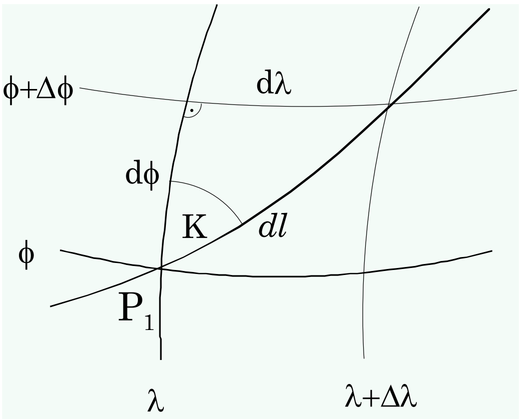
- Integracijska konstanta C nam da množico loksodrom. Loksodroma, ki poteka skozi točki P_1 in P_2:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan K \ln \frac{\tan\left(45° + \frac{\phi_2}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\phi_1}{2}\right)}$$

- Iz zgornje enačbe lahko izračunamo kurz plovila (letala):

$$\tan K_{12} = \frac{\Delta\lambda_{[rad]}}{\ln\left[\dfrac{\tan\left(45° + \frac{\phi_2}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\phi_1}{2}\right)}\right]}$$

Dolžina loksodrome



- Dolžino odseka loksodrome izračunamo tudi iz "ravnega" pravokotnega trikotnika:

$$\cos K = \frac{Rd\phi}{dl} \qquad dl = \frac{Rd\phi}{\cos K}$$

$$l = \frac{R}{\cos K}\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{R}{\cos K}(\phi_2 - \phi_1)$$

- Dolžino loksodrome lahko neposredno izračunamo v [km]:

$$L_{[km]} = \frac{R}{\rho^\circ}\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\cos K} = 111{,}195\,\frac{(\phi_2 - \phi_1)^\circ}{\cos K}$$

- ali v morskih (navtičnih) miljah [mm]:

$$L_{[mm]} = \frac{(\phi_2 - \phi_1)'}{\cos K}$$

- razlika geografskih širin je podana v ločnih minutah.