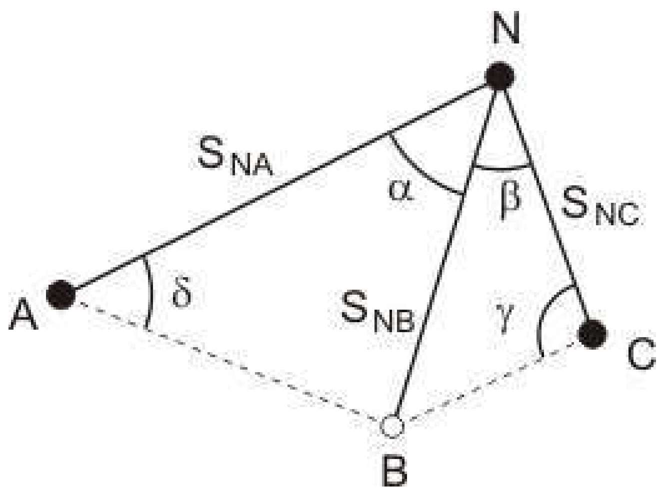
Prehod iz merskega v koordinatni prostor

- Prehod iz merskega v koordinatni prostor ⇒ izračun koordinat geodetskih točk.
- Merski prostor
  - Direktno koordinat nikoli ne merimo! Izpeljemo jih indirektno iz meritev (opazovanj)!
  - Meritve so informacija relativnega položaja več točk (najmanj dveh).
- Primer:
  7 opazovanj:
  S_{NA}, S_{NB}, S_{NC}, α, β, γ, δ
  Za določitev lika ABCN
  zadošča 5 opazovanj!
  Dve opazovanji sta nadštevilni!

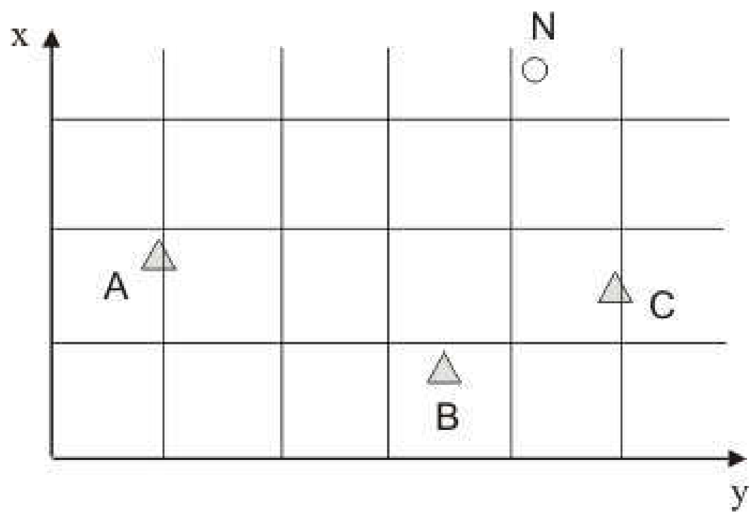


Koordinatni prostor

- Iskane količine so koordinate geodetskih točk!

Koordinate

- Položaji danih točk (A, B, C) so znani (od prej)!
- Iščemo (določamo) koordinate nove točke (N)!



Določanje položaja točk (positioning)

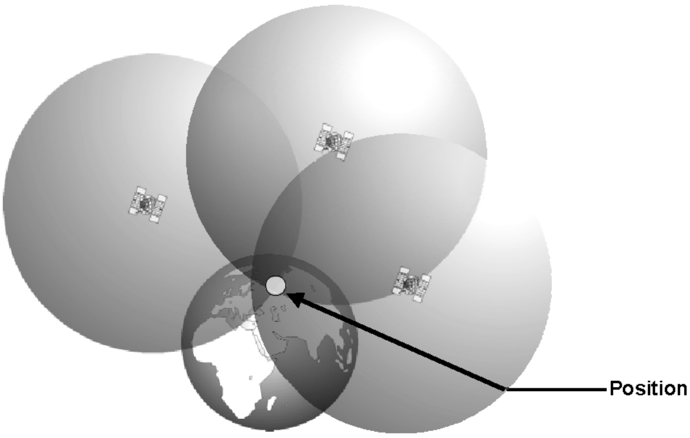
- Različni načini določitve položaja:
  - absolutno določanje položaja;
  - relativno določanje položaja;
  - 3D, 2D, 1D določanje položaja.

- Absolutno določanje položaja:
  - dane koordinate ekstraterestričnih objektov (zvezde, umetni Zemljini sateliti);
  - opravljene meritve do teh objektov (smeri, razdalje);
  - iščemo koordinate opazovališča;
  - potrebujemo 3 vrste koordinatnih sistemov:
    - terestrični (iskane geod. točke);
    - nebesni (zvezde);
    - orbitalni (um. Zemljini sateliti).

Absolutno določanje položaja

- Astronomska opazovanja nam podajo astronomske geografske koordinate (Φ, Λ).
  - Potrebujemo opazovanja do vsaj ene zvezde (ali Sonca). Moramo imeti dostop do točnega časa. Zvezde obravnavamo kot dane točke.

- Opazovanja do um. zemljinih satelitov nam podajo geodetske (elipsoidne koordinate (ϕ, λ, h).
  - potrebujemo opazovanja do vsaj štirih satelitov (3 za položaj, enega za odpravo pogreška ure v sprejemniku).
  - Tirnice satelita so znane.



Relativno določanje položaja

- Relativno določanje položaja pomeni določitev položaja ene točke glede na drugo. Lahko uporabimo:
  - neposredna opazovanja med točkami;
  - posredna opazovanja s točk do ekstraterestričnih objektov;
- Vrsta opazovanj in vrsta iskanih koordinat določajo matematični model določitve položaja (3D, 2D ali 1D).

- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
  - določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - “direct solution”);
  - določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – “inverse solution”).

Določanje položaja točk v ravnini

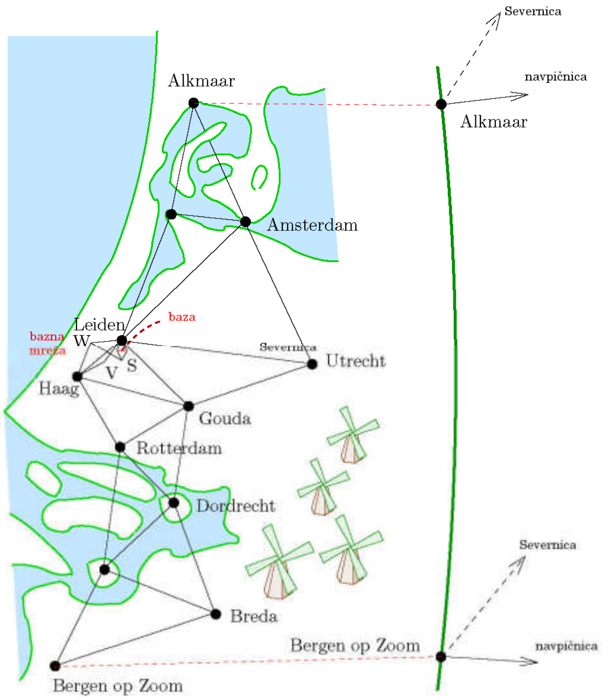
- Načini določitve:
  - polarna izmera (polarni priklep),
  - zunanji urez (angl. "intersection"),
  - notranji urez (angl. "resection"),
  - ločni presek (angl. "lateration")
  - poligon – poligonski vlak (angl. "traverse"),
  - prosto stojišče (angl. "free stationing").

- Dane količine:
  - koordinate danih točk.
- Opazovane količine:
  - smeri (koti) in razdalje.

- Dane točke: točke z znanimi koordinatami!
- Nove točke: točke, katerih koordinate računamo.

Razvoj meritev skozi zgodovino (1)

- Zakaj vse starejše metode slonijo na merjenju kotov oz. smeri?
  - Prva praktična trikotniška mreža izpeljana na Nizozemskem: Willebrord Snell van Royen (lat. Snellius), leta 1614/15.



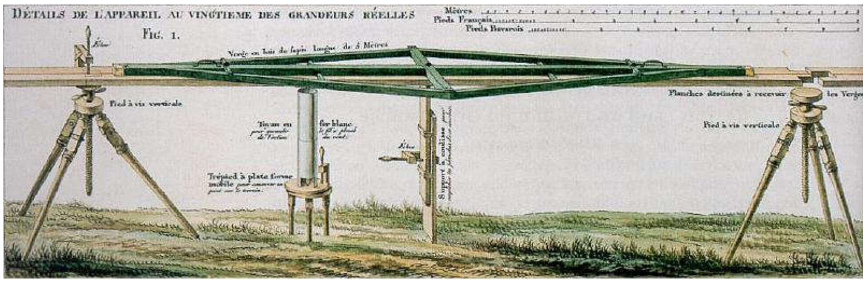
Razvoj meritev skozi zgodovino (2)

- "Kvadrant" (večji premer kroga) omogočal natančnost nekaj ločnih minut!
- Odkrtije daljnogleda, prib. leta 1600.
- Konstrukcija nonija (1631) → zvišanje natančnosti čitanja horizontalnega kroga. (angl. "Vernier").
- W. Gascoigne, 1640 izdelal nitni križ na daljnogledu.
- M. Thevenot 1661 iznašel cevno libelo.
- Jonathan Sisson 1737, konstrukcija prvega “pravega” teodolita.

Instrumenti XVII. - XVIII. st

← leto **1792** ↑ leto **1820**
(natančnost do 10")

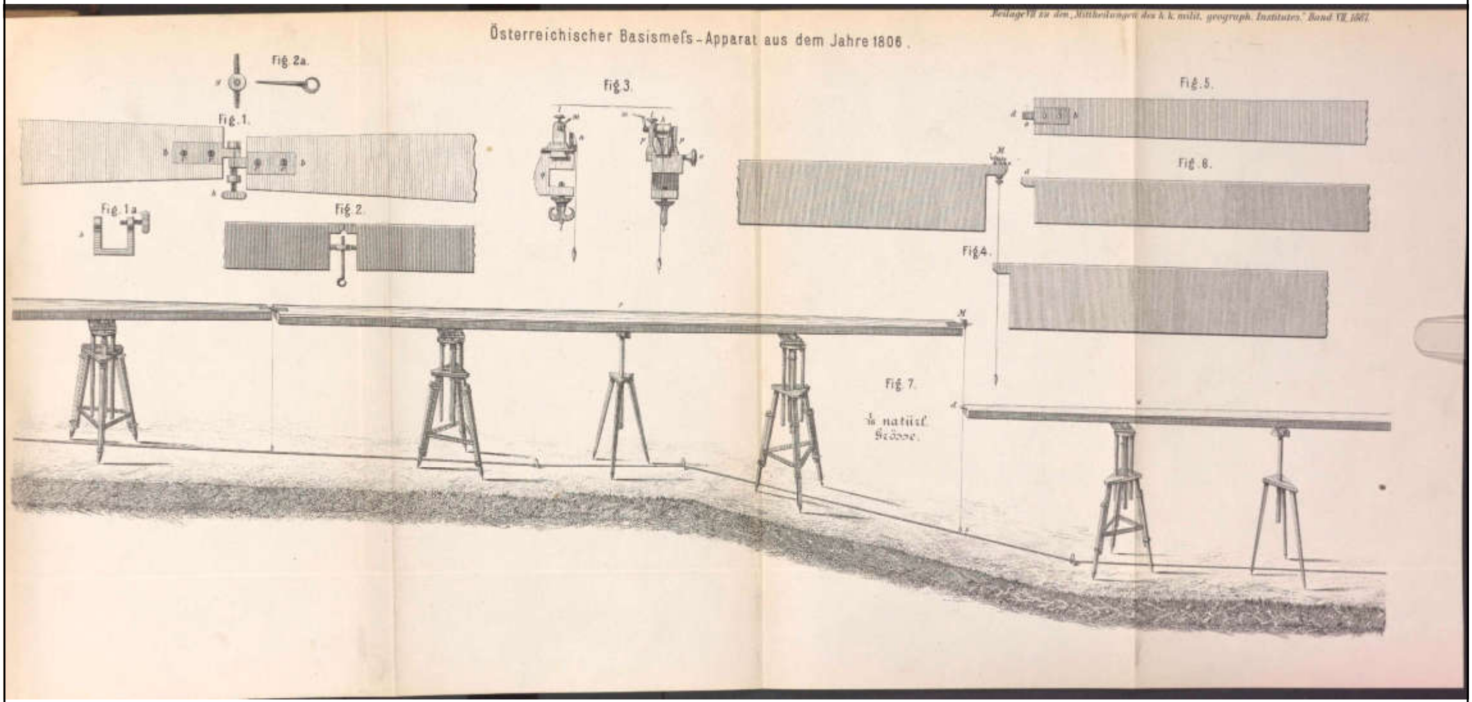
Merjenje razdalj (1)



lesene late (XVII. in XVIII. st.)

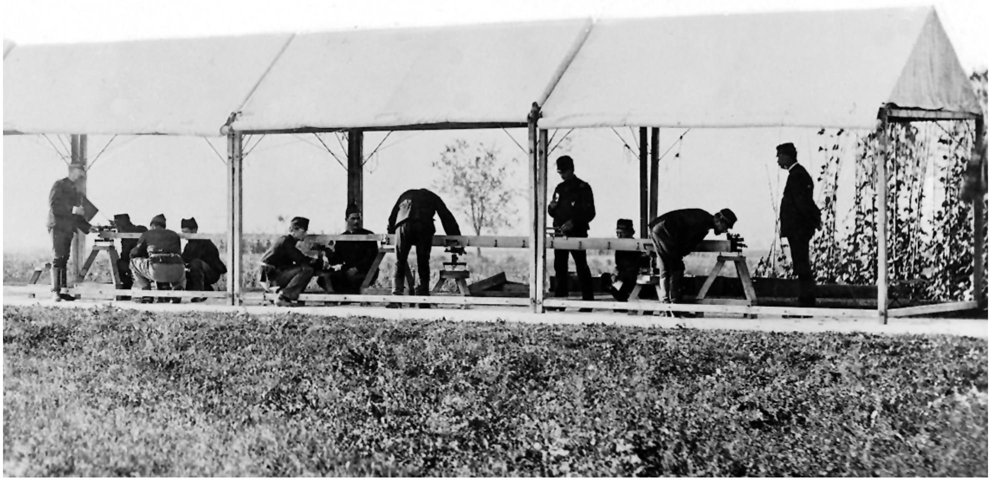
merska veriga (XVIII. st.)

Merjenje razdalj (2)

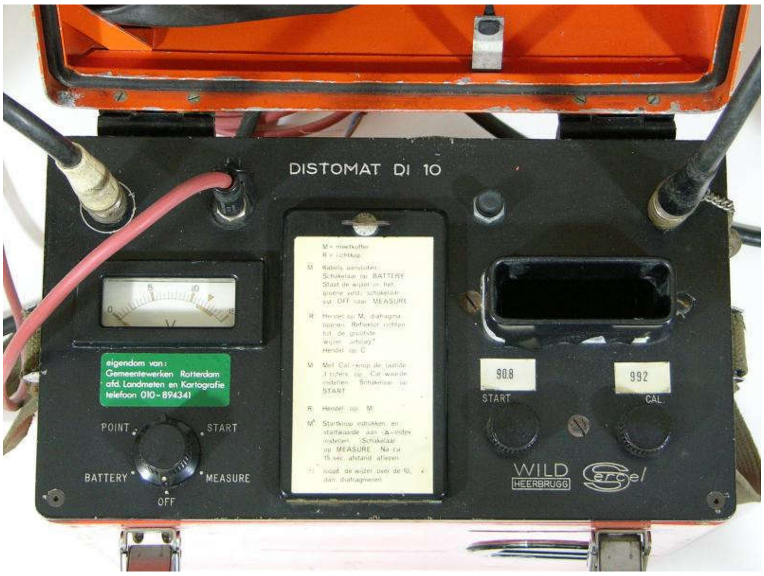


bazni aparat (l. 1806)

Merjenje razdalj (3)

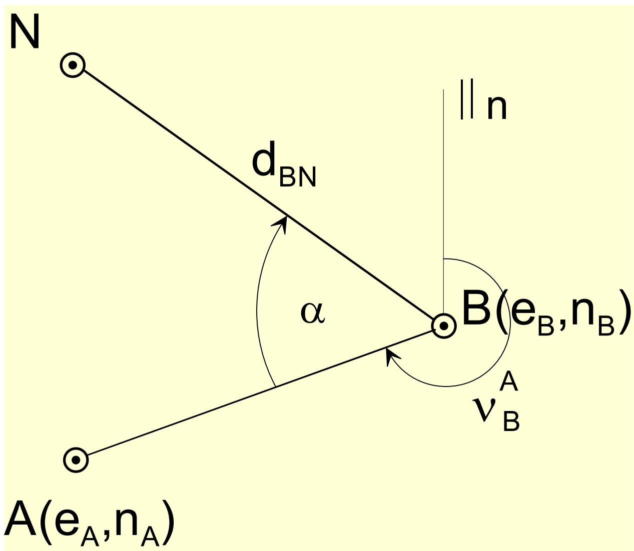


Od sedemdesetih let XX. stoletja, možno hkratno merjenje razdalj in kotov



Polarna izmera

- Določitev koordinat nove točke s polarno izmero uporabljamo pri detajlni topografski izmeri. Z dane točke opazujemo drugo dano točko (orientacija), ter izmerimo smer in dolžino do nove točke:
- dano: $A\,(e_A, n_A)$, $B\,(e_B, n_B)$
- merjeno: α
- neznano: $N\,(e_N, n_N)$

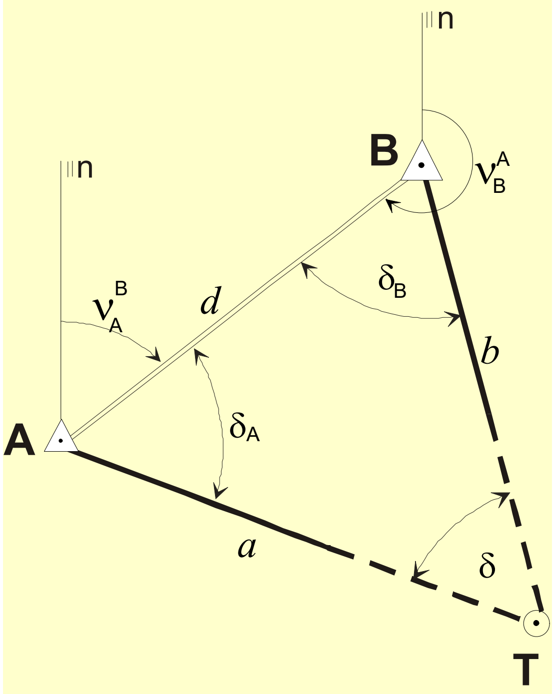


- Postopek:

1. Izračunamo smerni kot iz B na A;
2. izračunamo "orientirano smer" (smerni kot) iz B na N:
$$\nu_B^N = \nu_B^A + \alpha$$
3. izračunamo koord. razlike od B do N;
4. Izračunamo koordinate točke N.

Zunanji urez

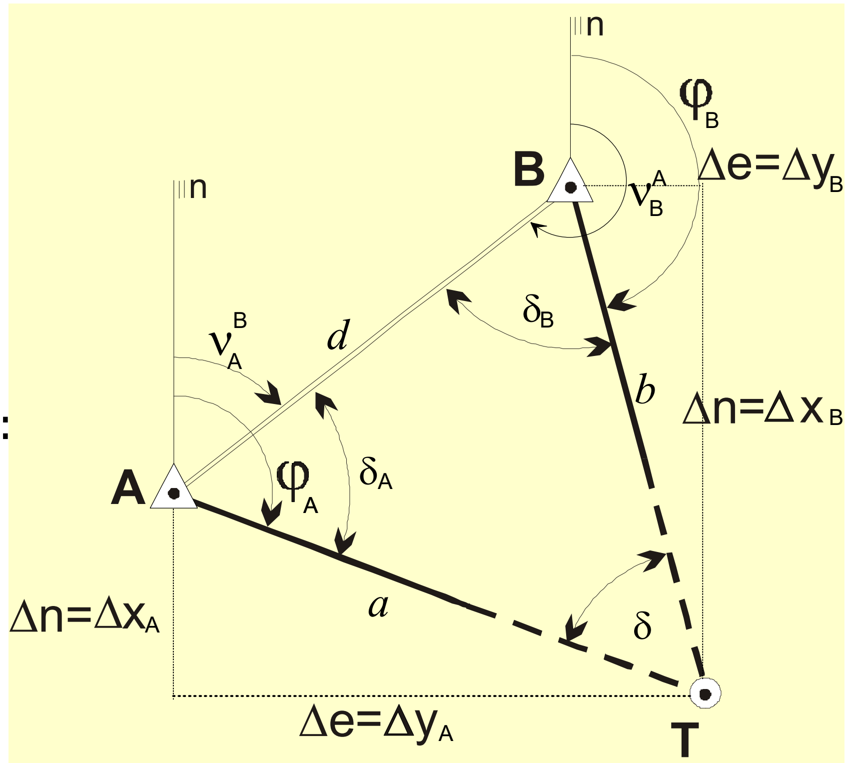
- Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih zunanjih smeri iz dveh danih točk. Zunanja smer je smer z dane točke na novo točko.



- dano: A (e_A,n_A), B (e_B, n_B)
- merjeno: δ_A, δ_B
- neznano: T (e_T, n_T)

Zunanji urez

- φ_A in φ_B sta orientirani smeri.
- Orientirana smer je kot, ki ga oklepa neka smer z vzporednico z osjo "n".



- Orientirane smeri izračunamo:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \delta_A$$

$$\varphi_B = \nu_B^A - \delta_B$$

- oz. kot δ v oglišču T izračunamo kot:

$$\delta_A = \varphi_A - \nu_A^B$$
$$\delta_B = \nu_B^A - \varphi_B = (\nu_A^B \pm 180^\circ) - \varphi_B$$
$$\delta = \varphi_B - \varphi_A$$

- Računska kontrola je: $\delta_A + \delta_B + \delta = 180^\circ$.

- Da bi izračunali koordinate točke T prvo izračunamo koordinatne razlike med točkami A oz. B in T. Za ta izračun potrebujemo stranice triokotnika a in b.

- iz sinusovega izreka izračunamo stranice trikotnika a in b.

$$\frac{d}{\sin\delta} = \frac{b}{\sin\delta_A} \qquad \frac{d}{\sin\delta} = \frac{a}{\sin\delta_B}$$
$$b = \frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_A \qquad a = \frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_B$$

- Izračun koordinatnih razlik:

$$\Delta e_A = \Delta y_A = a\sin\varphi_A \qquad \Delta e_B = \Delta y_B = b\sin\varphi_B$$
$$\Delta n_A = \Delta x_A = a\cos\varphi_A \qquad \Delta n_B = \Delta x_B = b\cos\varphi_B$$

- Koordinate točke T so:

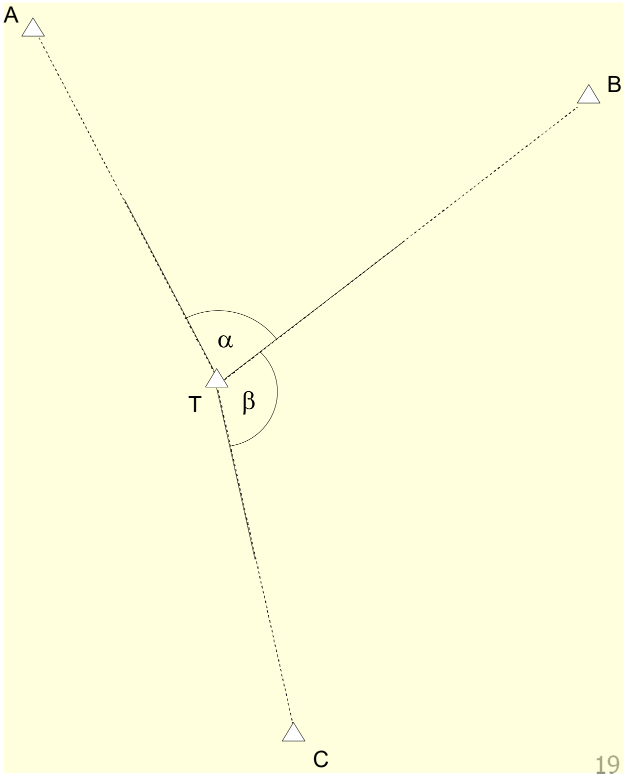
$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$
$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola (koordinati točke T morata biti enaki, če jih računamo s točke A ter s točke B):
- $e_T' = e_T''$ $\qquad$ $n_T' = n_T''$

Notranji urez

- Notranji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih smeri iz nove točke do treh danih točk. Notranja smer je smer iz nove točke na dano točko.

- dano: A (e_A, n_A), B(e_B,n_B), C(e_C,n_C)
- merjeno: α, β
- neznano: T (e_T, n_T)

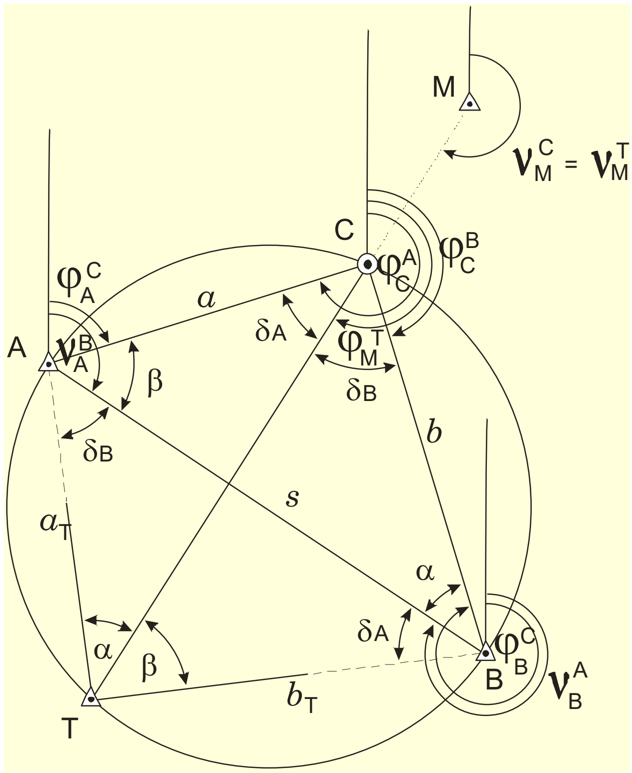


- Obstaja skoraj 100 različnih načinov reševanja notranjega ureza.

- Predstavljena bosta Collinsov in Pothenot (Snelliusov) način.

Notranji urez, rešitev Collinsa

- dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B,X_B), M(Y_M,X_M)
- merjeno: α, β
- neznano: T (Y_T, X_T)



- Skozi točke T, A in B orišemo krog s premerom $m = 2r$.
  Daljica TM seka ta krog v točki C; v slavo Collinsa se imenuje Collinsova (pomožna) točka.

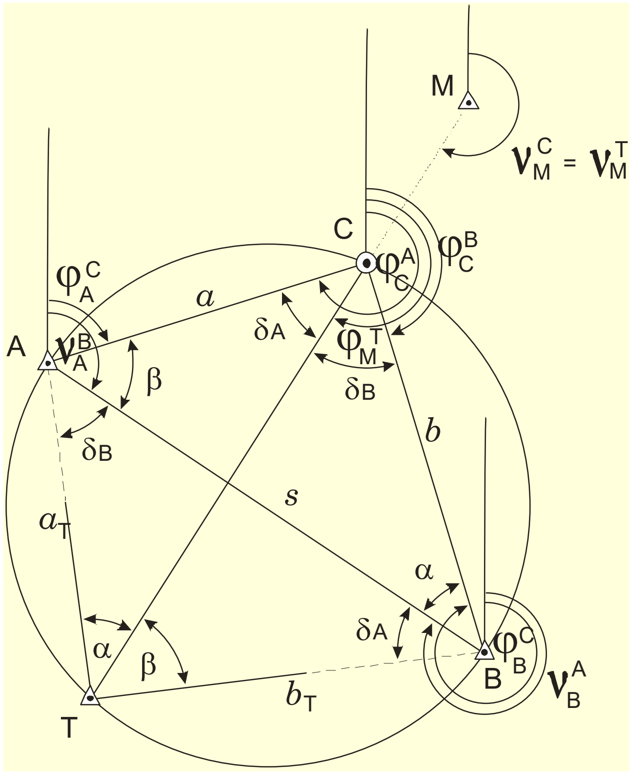
- Izračunamo smerni kot iz A na B:

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B}$$

$$s_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

- Iz smernega kota ν_A^B in kotov α in β izračunamo orientirane smeri s točk A in B na točko C:

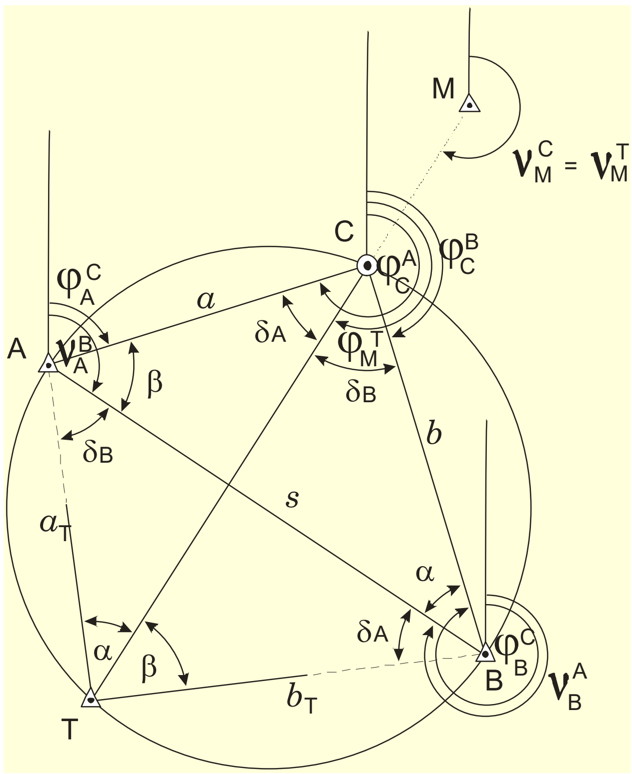
- $\varphi_A^C = \nu_A^B - \beta$
- $\varphi_B^C = \nu_B^A + \alpha = \nu_A^B + \alpha + \pi$



- Kontrola:
- $\delta = 180° - (\alpha + \beta) = \varphi_A^C - \varphi_B^C$,
- $\delta = \delta_A + \delta_B$

- Izračun koordinat Collinsove (pomožne) točke $C(y_C,x_C)$ opravimo na osnovi danih koordinat A in B ter orientiranih smeri φ_A^C in φ_B^C. (Zunanji urez na točko C).

- Prvo izračunamo stranici trikotnika a in b.



$$m = 2 \bullet r = \frac{s}{\sin \delta}$$

$$a = \overline{AC} = m \sin \alpha \qquad b = \overline{BC} = m \sin \beta$$

$$\Delta y_A^C = a \sin \varphi_A^C \qquad \Delta x_A^C = a \cos \varphi_A^C$$

$$\Delta y_B^C = b \sin \varphi_B^C \qquad \Delta x_B^C = b \cos \varphi_B^C$$

$$y_C = y_A + \Delta y_A^C = y_B + \Delta y_B^C$$

$$x_C = x_A + \Delta x_A^C = x_B + \Delta x_B^C$$

- Sedaj imamo določen položaj točke C. Zanima nas položaj točke T. Prvo izračunamo smerni kot s točke M na novo točko C:

$$\tan \nu_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{\Delta Y_M^C}{\Delta X_M^C}$$

- Z njegovo pomočjo izračunamo lahko orientirane smeri na novo točko T.

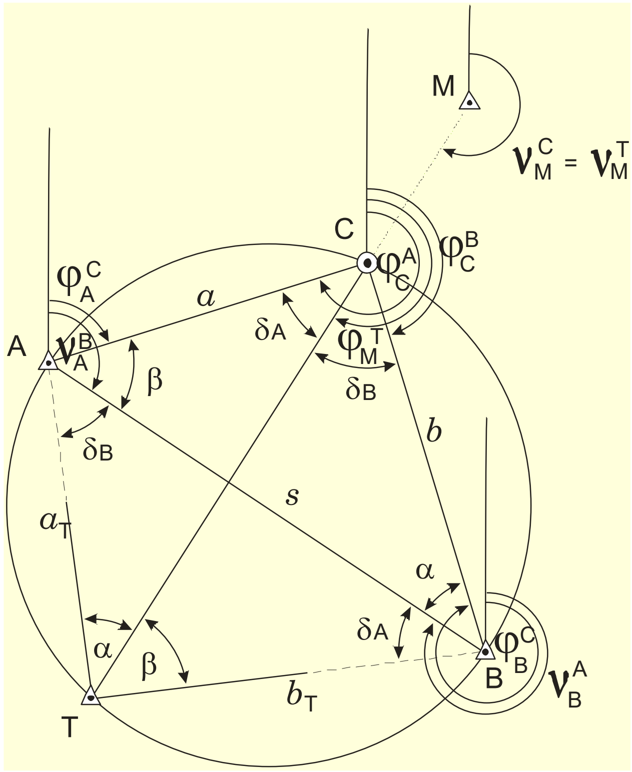
$\delta_A = \varphi_C^{\ A} - \nu_M^{\ C}$ $\qquad$ $\delta_B = \nu_M^{\ C} - \varphi_C^{\ B}$

$\varphi_A^{\ T} = \nu_A^{\ B} + \delta_A$

$\varphi_B^{\ T} = \nu_B^{\ A} - \delta_B$

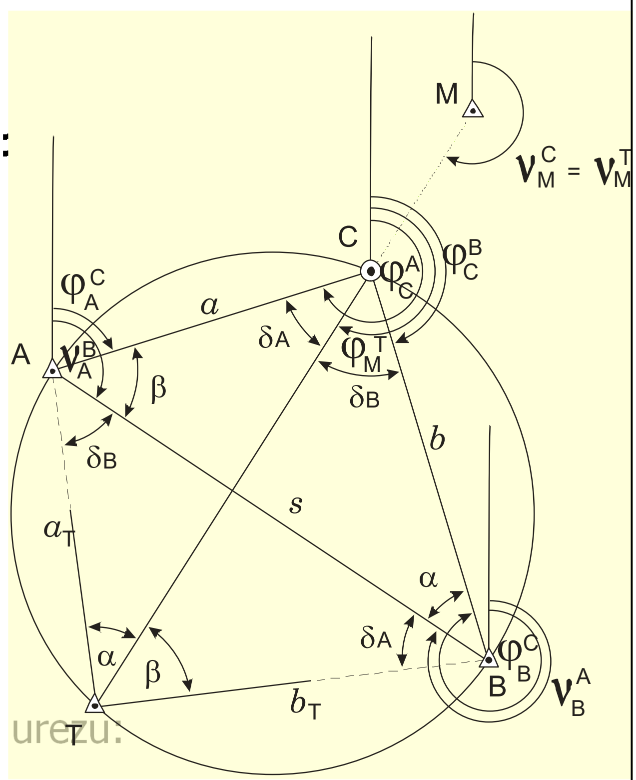
- Izračunamo potem stranici a_T in b_T:

$$a_T = \overline{AT} = m \sin \delta_B$$
$$b_T = \overline{BT} = m \sin \delta_A$$



- S pomočjo stranic in orientiranih smeri na točko T izračunamo koordinatne razlike:

$$\Delta y_A^T = a_T \sin \varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T = a_T \cos \varphi_A^T$$
$$\Delta y_B^T = b_T \sin \varphi_B^T \qquad \Delta x_B^T = b_T \cos \varphi_B^T$$



- Na koncu izračunamo koordinati točke T:

$$Y_T' = A_A + \Delta y_A^T \qquad X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$
$$Y_T'' = Y_B + \Delta y_B^T \qquad X_T'' = X_B + \Delta x_B^T$$

- Zadnja kontrola je enaka kot pri zunanjem urezu:

$$Y_T' = Y_T'' \qquad X_T' = X_T''$$

- Collinsov način je dejansko "dvojni" zunanji urez. Prvo doliočitev točke C, potem določitev točke T.

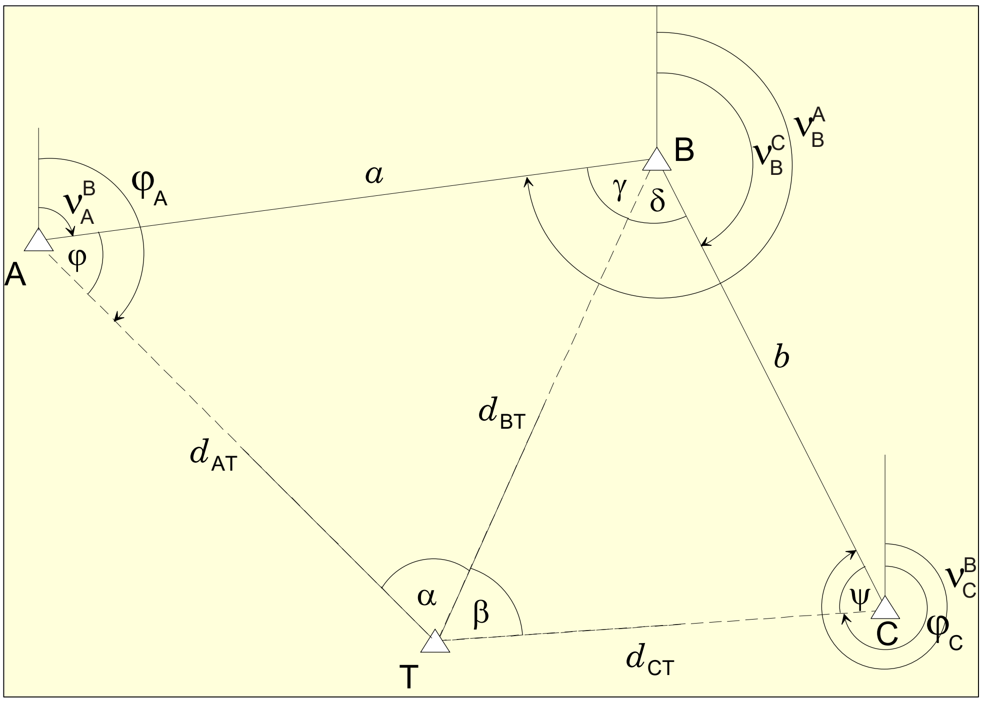
- Rešitve ni, če je tangens smernega kota ν_M^C nič:

$$\tan \nu_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{0}{0}$$

- oz., če točki M in C sovpadata. Potem vse tri dane točke in iskana točka (T) ležijo na istem krogu. Naloga ima neskončno rešitev.

- Opomba: središčna točka M bi naj bila čim bolj oddaljena od kroga skozi točke A, B in T.

Notranji urez, rešitev Pothenot – Snellius



- dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B,X_B), C(Y_C,X_C)
- merjeno: α, β
- neznano: T (Y_T, X_T)

- Iz danih točk A, B in C najprej izračunamo smerne kote in dolžine stranic:

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad \tan \nu_C^B = \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C} = \frac{\Delta Y_C^B}{\Delta X_C^B}$$

$$a = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$
$$b = \sqrt{(Y_B - Y_C)^2 + (X_B - X_C)^2}$$

- Da lahko izračunamo orientirane smeri (smerne kote) iz danih (A in C) na novo točko:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \varphi \qquad \varphi_C = \nu_C^B - \psi$$

potrebujemo kota φ in ψ!

- Ta dobimo iz četverokotnika ABCT in s pomočjo trigonometričnih zvez:
- Polovična vsota kotov φ in ψ je enaka: $\frac{\varphi + \psi}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$
- Polovično razliko pa dobimo prek fiktivnega kota μ:

$$\tan \frac{\varphi - \psi}{2} = \tan \frac{\varphi + \psi}{2} \cot\left(45^\circ + \mu\right)$$

- Izračunamo stranice iz nove do danih točk A in C:

$$d_{AT} = \frac{a}{\sin \alpha} \sin\left[180^\circ - (\alpha + \varphi)\right] = \frac{a}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \varphi)$$

$$d_{CT} = \frac{b}{\sin \beta} \sin(\beta + \psi)$$

- S pomočjo stranic in orientiranih smeri na točko T izračunamo koordinatne razlike:

$$\Delta y_A^T = d_{AT} \sin \varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T = d_{AT} \cos \varphi_A^T$$
$$\Delta y_C^T = d_{CT} \sin \varphi_C^T \qquad \Delta x_C^T = d_{CT} \cos \varphi_C^T$$

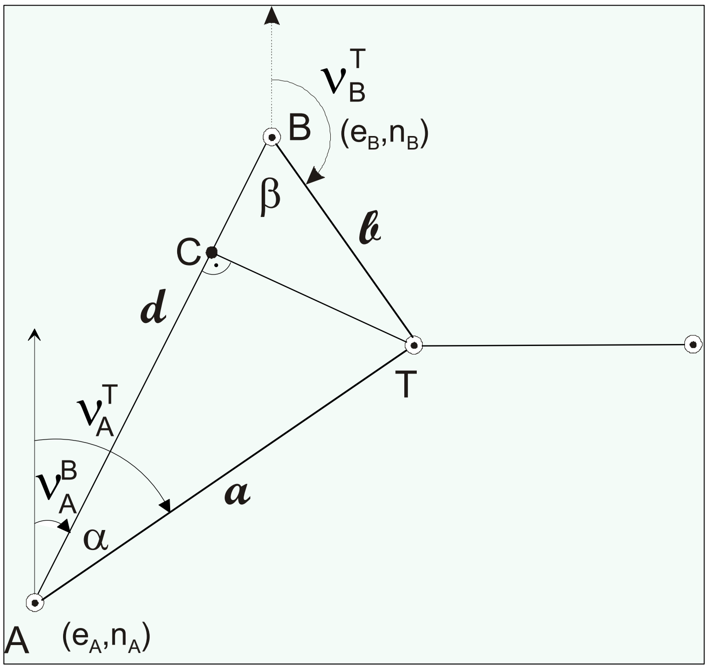
- Na koncu izračunamo koordinati točke T:

$$Y_T\,' = A_A + \Delta y_A^T \qquad X_T\,' = X_A + \Delta x_A^T$$
$$Y_T\,'' = Y_C + \Delta y_C^T \qquad X_T\,'' = X_C + \Delta x_C^T$$

Ločni presek

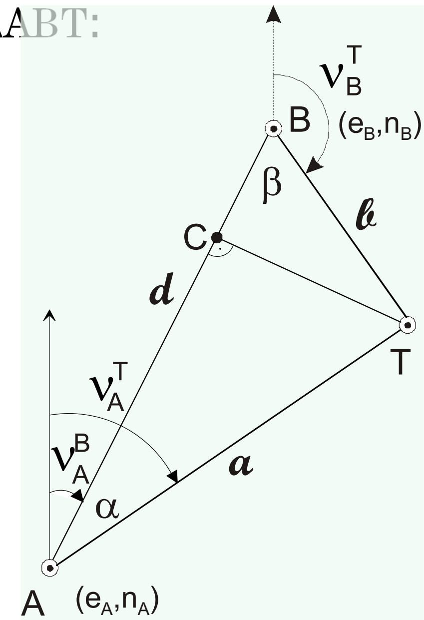
- Ločni presek je postopek za izračun koordinat točke s pomočjo merjenih razdalj od dveh (treh) danih točk do nove točke.

- merjeno: a, b
- dano: A (e_A, n_A), B (e_B, n_B)
- neznano: T (e_T, n_T)



- Ločni presek lahko izračunamo na dva načina.

- 1. način (trigonometrični):
- Iz kosinusovega izreka izračunamo kote v trikotniku ΔABT:



$$a^2 = d^2 + b^2 - 2db\cos\beta$$
$$b^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos\alpha$$

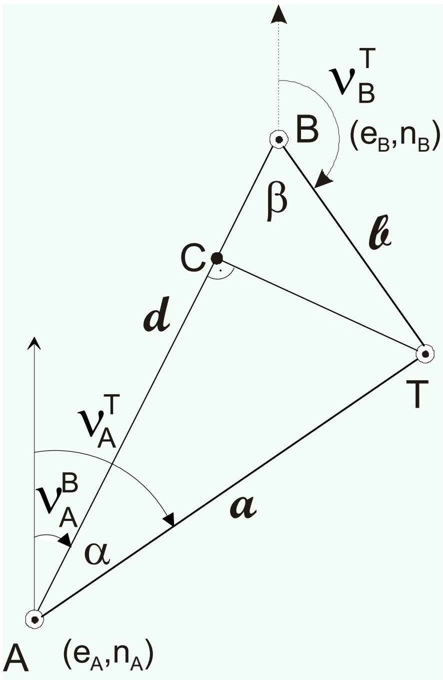
$$\cos\alpha = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2da}$$
$$\cos\beta = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2db}$$

- kontrola je: $d = a\cos\alpha + b\cos\beta$

- Zatem izračunamo smerne kote stranic trikotnika a in b:

$$\nu_A{}^T = \nu_A{}^B + \alpha$$
$$\nu_B{}^T = \nu_B{}^A - \beta$$

- Smerni kot ν_A^B izračunamo iz koordinat danih točk A in B.
- S pomočjo smernih kotov izračunamo koordinatne razlike od A in B do točke T:



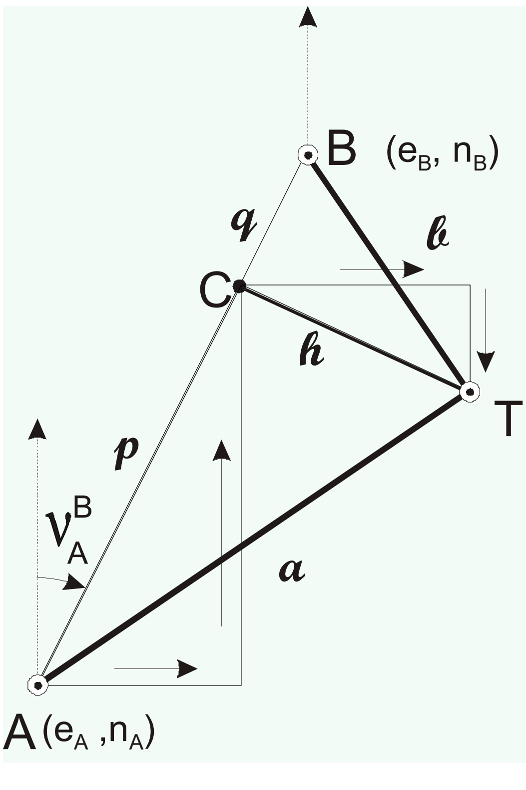
$$\Delta e_A^T = a \sin \nu_A^T \qquad \Delta n_A^T = a \cos \nu_A^T$$
$$\Delta e_B^T = b \sin \nu_B^T \qquad \Delta n_B^T = b \cos \nu_B^T$$

$$e_T{}' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T{}' = n_A + \Delta n_A^T$$
$$e_T{}'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T{}'' = n_B + \Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola:

$$e_T' = e_T'' \qquad n_T' = n_T''$$

- 2. način (geodetski):
- Način računanja je enak izračunu koordinat linijskih točk. Tukaj računamo delne koordinatne razlike od točk A (B) do točke C (vznožje višine h) ter naprej od točke do nove točke T.
- h je višina v trikotniku $\Delta\mathrm{ABT}$;
- p, q projekciji stranic a in b na stranico d;
- Zveza med projekcijami ter višino in stranicami:



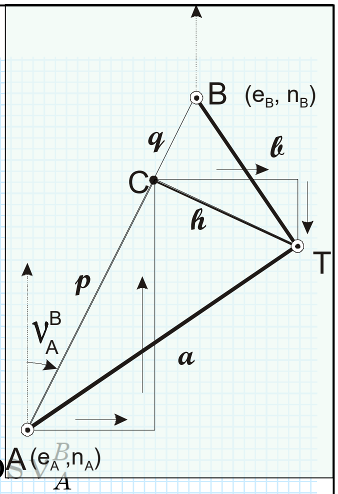
$$h^2 = b^2 - q^2$$
$$h^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$
$$a^2 - b^2 = (p+q)(p-q) \qquad (p+q) = d$$

$$\frac{a^2 - b^2}{2d} = \frac{p-q}{2}$$
$$\frac{d}{2} = \frac{p+q}{2}$$

- Projekciji p in q lahko izračunamo iz zgornjih zvez:

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$$

$$q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$$



- Če je točka z desne strani daljice AB (velja da je h ⊕):

$$e_T' = e_A + p\sin\nu_A^B + h\cos\nu_A^B \qquad e_T' = e_B - q\sin\nu_A^B + h\cos\nu_A^B$$

$$n_T' = n_A + p\cos\nu_A^B - h\sin\nu_A^B \qquad n_T'' = n_B - q\cos\nu_A^B - h\sin\nu_A^B$$

- Če je točka z leve strani daljice AB (velja da je h ▯):

$$e_T' = e_A + p\sin\nu_A^B - h\cos\nu_A^B \qquad e_T' = e_B - q\sin\nu_A^B - h\cos\nu_A^B$$

$$n_T' = n_A + p\cos\nu_A^B + h\sin\nu_A^B \qquad n_T'' = n_B - q\cos\nu_A^B + h\sin\nu_A^B$$

- Zadnja kontrola:

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$