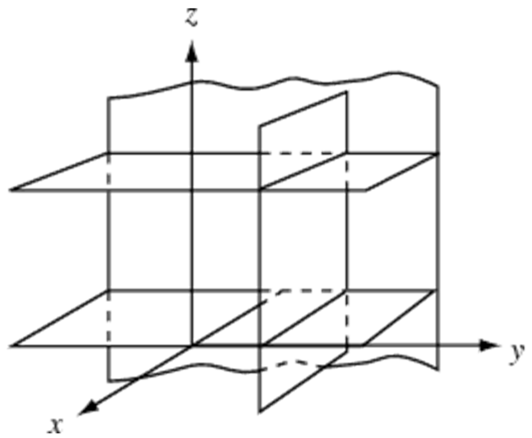
# Koordinatni sistemi

Dejstvo je, da živimo v tridimenzionalnem Evklidskem prostoru. To je aksiom, ki ga ni potrebno dokazovati. Da bi podali geometrijski položaj točke v prostoru je primerno sredstvo za to vzpostavitev koordinatnega sistema:
"*Koordinatni sistem določa bijektivno*[*] *preslikavo urejene trojice realnih števil v množico točk tridimenzionalnega Evklidskega prostora*".
Položaj geodetske točke je podan s koordinatami → število, ki skupaj z drugimi določa točko v koordinatnem sistemu. Možno je vzpostaviti neskončno mnogo koordinatnih sistemov, vendar je najbolj preprost in razširjen t.i. "tridimenzionalni pravokotni kartezični[*]" (kartezijev) koordinatni sistem.




Tridimenzionalni pravokotni kartezični sistem sestavljajo tri medsebojno pravokotne premice → koordinatne osi. Presečišče koord. osi imenujemo izhodišče ali koordinatni začetek.

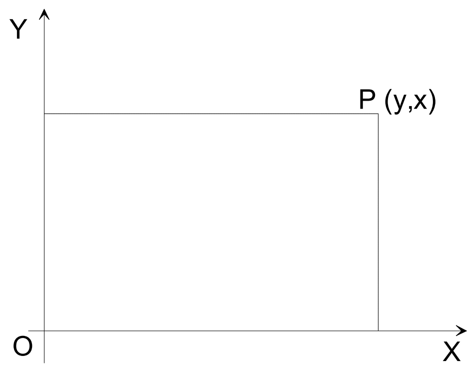
# Koordinatni sistemi v ravnini

Omejimo se zaenkrat na dvodimenzionalni podprostor tridimenzionalnega Evklidskega prostora. To je na primer ravnina kartografske projekcije, ki nam upodablja zemeljsko površje v obliki karte ali načrta. V geodeziji za predstavitev točk v ravnini uporabljamo največkrat naslednja dva koordinatna sistema:

- pravokotni koordinatni sistem,
- polarni koordinatni sistem.

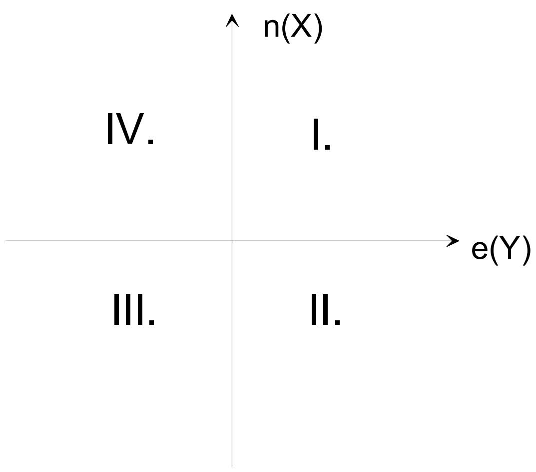
[*] Bijektivna preslikava – preslikava eden v enega.

[*] Kartezični – dobil ime po francoskem matematiku Rene Descarcatesu (lat. Cartesius) iz XVII. stoletja, ki ga je prvi uporabil v matematiki.

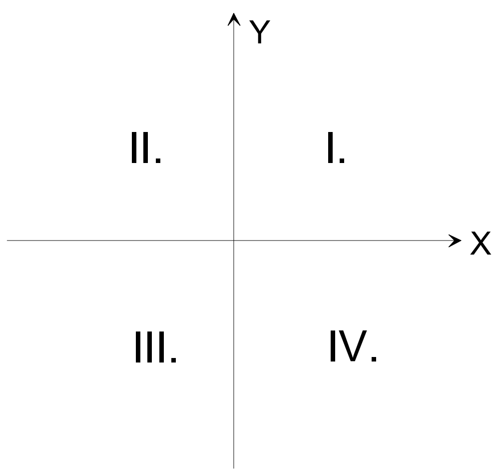



slika: 2D pravokotni k.s. v ravnini

Pravokotni kartezični koordinati točke P imenujemo razdalji (izraženi v določenem merilu) vzeti z opredeljenim predznakom, te točke od dveh koordinatnih osi. $O$ je koordinatno izhodišče, $x$-koordinata je "abcisa", $y$-koordinata pa "ordinata". Ustrezno se imenujeta tudi tudi abcisna $X$-os, in ordinatna $Y$-os.
Koordinati točke sta lahko pozitivni ali negativni, odvisno od tega na katero polos pade projekcja točke P.
V geodeziji je ravninski pravokotni koordinatni sistem različen od matematičnega. Tukaj je os $n$ (X) vertikalna, pozitivni del osi kaže navzgor - usmerjen je proti severu; negativni del osi kaže navzdol proti jugu. Os $e$ (Y) je vodoravna, pozitivni del osi je usmerjen na desno in kaže proti vzhodu; negativni del osi kaže na levo proti zahodu. Koordinatni sistem je desnosučni, koti naraščajo v desno - v smeri urinega kazalca.
V matematiki je ravninski koordinatni sistem levosučni, kar pomeni, da koti naraščajo v levo (enako velja tudi za kvadrante).

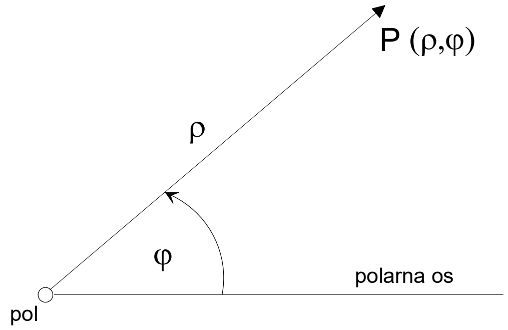



desnosučni ravninski k.s.




levosučni ravninski k.s.

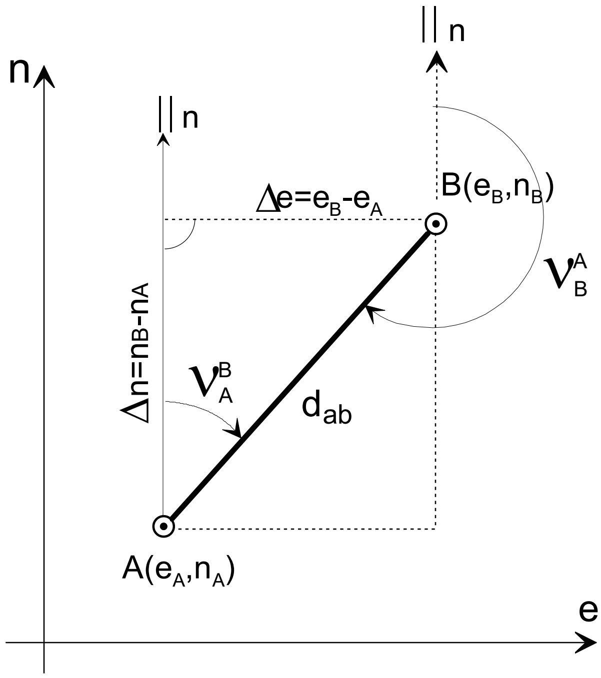
Polarni koordinati točke P sta: *radij vektor* $\rho$ - razdalja točke P od koordinatnega izhodišča (pola O) in *polarni kot* $\varphi$ - kot med daljico OP in danim poltrakom, ki izhaja iz pola (polarna os). Polarna os je izhodišče za štetje kotov.




slika: polarni koordinatni sistem v ravnini

## Geodetski polarni koordinatni sistem v ravnini – smerni kot

Geodetski polarni koordinatni sistem v ravnini je vrsta prirejenega koordinatnega sistema vezanega na predstavitev Zemljinega površja na topografski karti oz. načrtu. Geodetske polarne koordinate podajajo zvezo med dvema točkama v ravnini kartografske projekcije.

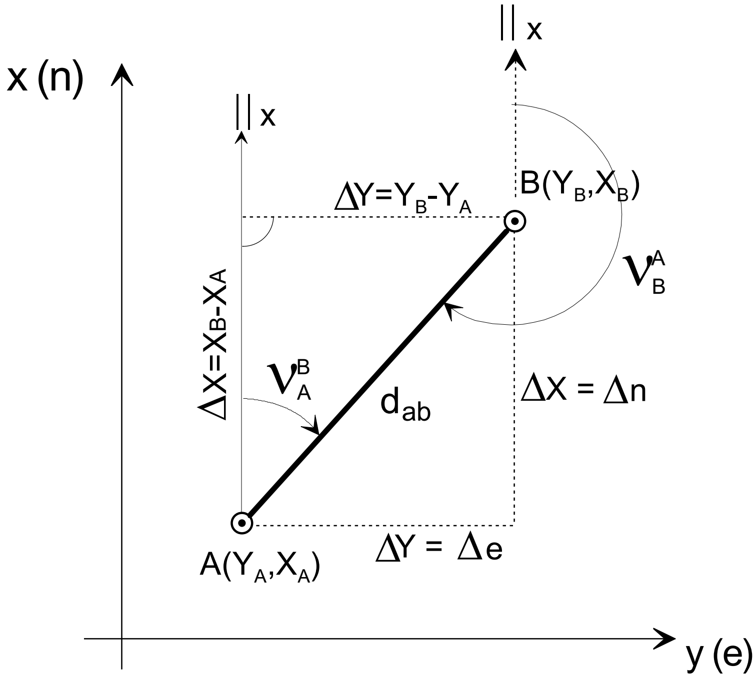



slika : geodetski polarni k.s. – smerni kot

Polarna os je pozitivni del $n$ (X)-osi. oz. vzporednica z osjo $n$. Radij vektor je dolžina, razdalja med točkama. Polarni kot se imenuje *smerni kot* $\nu_A^B$, (preberemo "ni a na b"). To je kot med pozitivno smerjo osi $n$ in dolžino med točkama (daljico AB). Smerni kot v točki B $\nu_B^A$ je različen od smernega kota v točki A $\nu_A^B$. Smerni kot je dejansko azimut v ravnini kartografske projekcije.

## Izračun smernega kota

Smerni kot lahko izračunamo, če sta nam podani dve točki s svojimi pravokotnimi koordinatami A($e_A$, $n_A$), B($e_B$, $n_B$) oz. A($Y_A$, $X_B$), B($Y_B$, $X_B$).




slika : izračun smernega kota

Tangens smernega kota lahko izračunamo iz koordinatnih razlik točk $A$ in $B$.

$$\tan \nu_A^B = \frac{e_B - e_A}{n_B - n_A} = \frac{\Delta e_A^B}{\Delta n_A^B} \qquad \nu_B^A = \nu_A^B + 180°$$

$$\tan \nu_A^B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y_A^B}{\Delta x_A^B} \qquad \nu_B^A = \nu_A^B + 180°$$

Dolžino med točkama $A$ in $B$ izračunamo iz koordinat:

$$d_{AB} = \sqrt{(e_B - e_A)^2 + (n_B - n_A)^2}$$

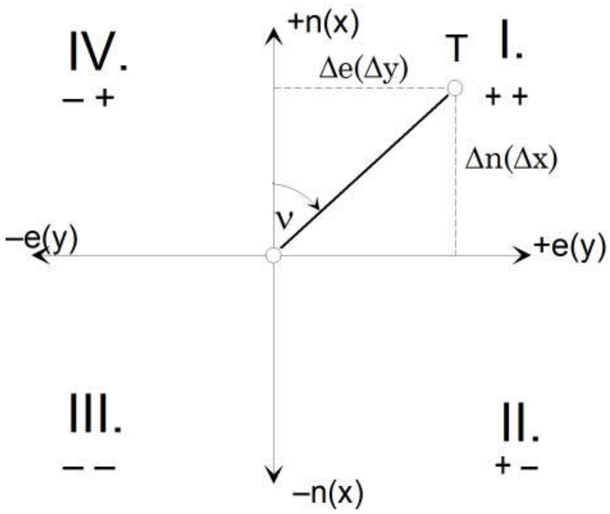
$$d_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Velikost smernega kota je odvisna od predznaka koordinatnih razlik. Ločimo štiri različne primere. Kot $\nu$ se lahko nahaja v I. kvadrantu ($0° < \nu < 90°$), v II. kvadrantu ($90° < \nu < 180°$), v III. kvadrantu ($180° < \nu < 270°$) ali v IV. kvadrantu ($270° < \nu < 360°$).

| kvadrant<br>koord. razl. | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta y$ ($\Delta$e) | + | + | − | − |
| $\Delta x$ ($\Delta$n) | + | − | − | + |
| $\nu$ | $\nu$ | + 180° | +180° | +360° |

Preglednica : velikost smernega kota glede na predznak koordinatnih razlik

Grafično se zgornja preglednica lahko predstavi kot, da smo izhodišče koordinatnega sistema prestavili v točko, v kateri računamo smerni kot:



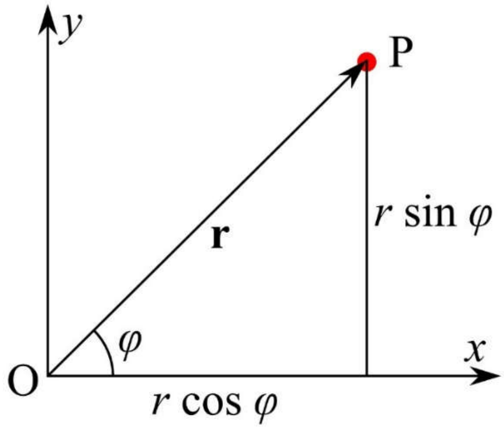

Slika: velikost smernega kota glede na predznak koordinatnih razlik

Primeri:

| točka | Y (e) | X (n) | $\nu_A^B = \frac{20}{-15} = -53{,}1301 + 180° = 126°{,}8699$ |
|---|---|---|---|
| A | 80 | 115 | |
| B | 100 | 100 | $\nu_B^C = \frac{-30}{25} = -50{,}1944 + 360° = 309°{,}8056$ |
| C | 70 | 125 | |
| D | 130 | 130 | $\nu_D^A = \frac{-50}{-15} = 73{,}3008 + 180° = 253°{,}3008$ |

## Izračun smernega kota s pomočjo kalkulatorja oz. preglednice MS Excel

Vsi kalkulatorji imajo ugrajeno možnost uporabe polarnih koordinat v ravnini in hkrati možnost pretvorbe med pravokotnimi in polarnimi koordinatami. Zavedajmo se, da ti uporabljajo matematični pravokotni koordinatni sistem:




slika : pretvorba med polarnimi in kartezičnimi koordinatami (matematični k.s.)

Torej, matematična os *X* je geodetska *e* (easting) oz. *Y*, matematična os *Y* je geodetska *n* (northing) oz. *X*. Kalkulator nam vrne polarni (smerni) kot v mejah $-\pi < \varphi < +\pi$. Če je ena koordinatna razlika negativna, nam bo vrnil negativen kot. Pravo vrednost polarnega (smernega) kota dobimo s prištevanjem $2\pi$ (360°).

V programu MS Excel nam enolično rešitev da uporaba funkcije ATAN2. Tudi tukaj je v rabi matematična orientacija pravokotnega koordinatnega sistema.

Sintaksa funkcije je:

- ATAN2 (št_x; št_y), kjer so argumenti:

- **št__x** koordinatna razlika $\Delta n$ ($\Delta x$);
- **št__y** koordinatna razlika $\Delta e$ ($\Delta y$).

Program nam vrne smerni kot v mejah $-\pi < \varphi < +\pi$. Če je ena koordinatna razlika negativna, nam bo vrnil negativen kot. Pravo vrednost smernega kota dobimo s prištevanjem $2\pi$ (360°). Opomba: MS Excel računa kote v ločni meri (radiani). Torej končno vrednost kota v stopinjah dobimo kot:

kot = kot *180/PI()

ali:

kot = DEGREES(kot)

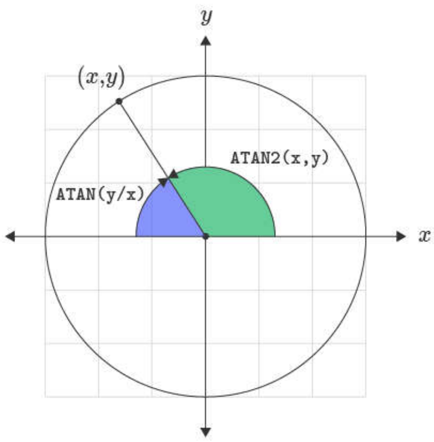
Obstaja tudi funkcija ATAN. Sintaksa te funkcije je:

- ATAN (število), kjer je argument **število**, ki predstavlja tangens kota, ki ga želimo izračunati. V našem primeru je število = $(e/n)$, oz. $(y/x)$.
  Funkicja ATAN vrne kot v mejah $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

Velika je razlika med funkcijama ATAN in ATAN2. Za kote v prvem in četrtem kvadrantu obe funkciji podata enako vrednost kota, skladno z zvezo med njima:

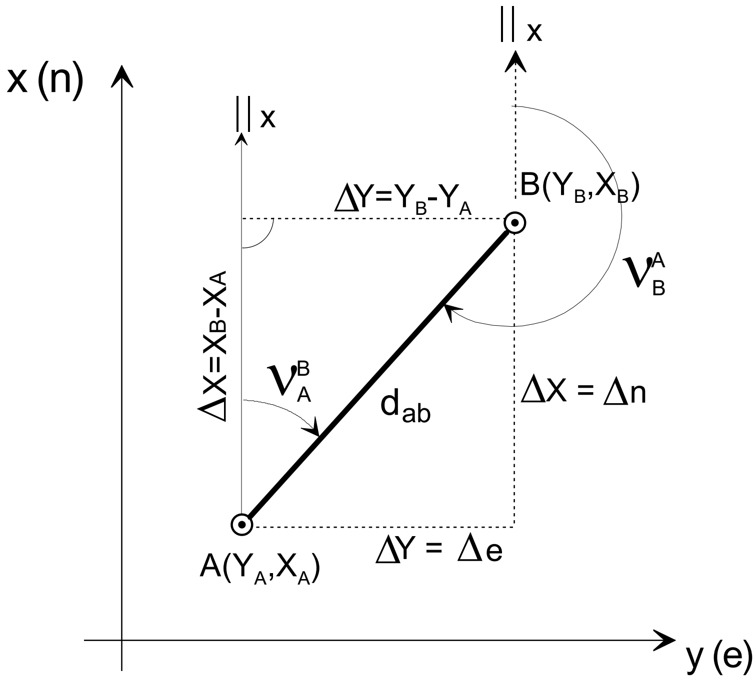
= ATAN($y$ / $x$) = ATAN2($x, y$)

argumenta se nanašata na matematično orientacijo koordinatnega sistema ($x$, $y$).




Za točke v drugem in tretjem kvadrantu koordinatnega sistema funkcija ATAN vrne kot glede na negativno smer osi X. Funkcija ATAN2 pa vrne kot glede na pozitivno os X.

## Zveza med pravokotnimi in polarnimi koordinatami




slika : zveza med pravokotnimi in polarnimi koordinatami

Zveza med pravokotnimi in polarnimi koordinatami izhaja iz znanih zvez v pravokotnem trikotniku, ki ga tvorijo razdalja *d*, ter koordinatni razliki med točkama *A* in *B*.

$$\tan \nu_A^B = \frac{\Delta e_A^B}{\Delta n_A^B} \frac{\Delta y_A^B}{\Delta x_A^B}$$

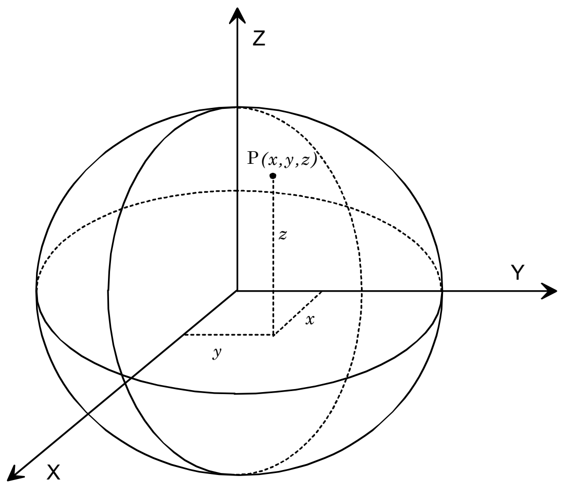
$$\Delta e_A^B (\Delta y_A^B) = d_{AB} \sin \nu_A^B \qquad d_{AB} = \frac{\Delta y_A^B}{\sin \nu_A^B} = \frac{\Delta e_A^B}{\sin \nu_A^B}$$

$$\Delta n_A^B (\Delta x_A^B) = d_{AB} \cos \nu_A^B \qquad d_{AB} = \frac{\Delta x_A^B}{\cos \nu_A^B} = \frac{\Delta n_A^B}{\cos \nu_A^B}$$

To zvezo lahko uporabimo za izračun pravokotnih koordinat nove točke, če poznamo dolžino in smerni kot proti tej točki.

# Krogelne koordinate (geografske koordinate na Zemlji krogli)

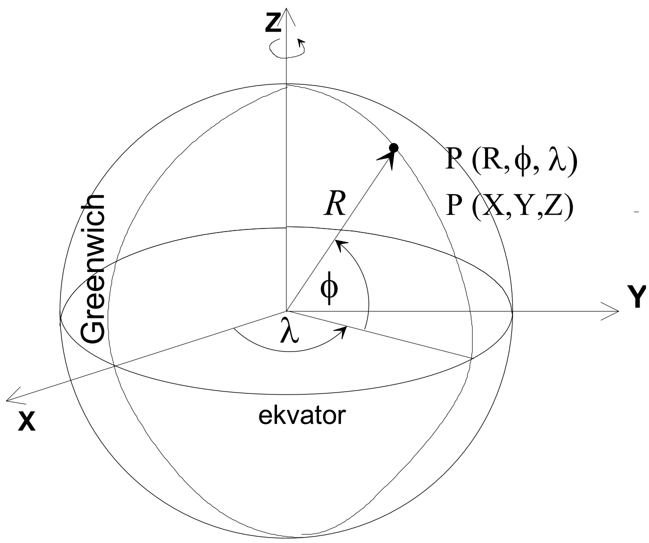
Izhodišče pravokotnega koordinatnega sistema postavimo v središče krogle s polmerom R. Položaj točke P v na površini krogle je enolično določen s karteizičnimi koordinatami (X,Y,Z).




slika: pravokotne koordinate in krogla

Položaj točke na površju krogle lahko podamo tudi z krogelnimi koordinatami. Krogelne koordinate so:

- R radij vektor (polmer),
- krogelna širina $\phi$,
- krogelna dolžina $\lambda$.



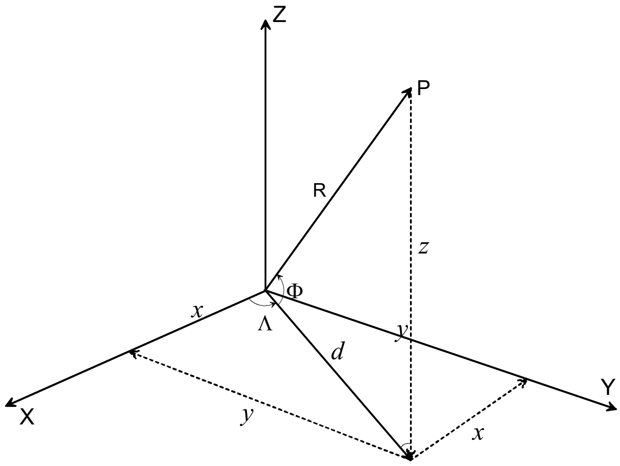

slika: krogelne koordinate

N krogli $R$=konst. je točka enolično določena samo z dvema kotnima koordinatama: krogelno širino $\phi$ in krogelno dolžino $\lambda$. Če je ta krogla s konstantnim polmerom Zemlja, sta ti dve koordinati: $\phi$ *geografska (zemljepisna) širina* in $\lambda$ *geografska (zemljepisna) dolžina.*
Rotacijska os Zemlje seka kroglo v dveh protitočkah: severnemu ($P_N$) i južnemu polu ($P_S$). Geografska širina je sferna razdalja točke od ekvatorja, računano v ravnini meridiana. Geografska širina je tudi kot v ravnini meridiana med radij vektorjem točke P in ravnino ekvatorja. Štejemo jih severno in južno od ekvatorja od 0° do +90° oz. od 0° do –90°. Oznaka je lahko tudi N (+) in S (–). Ekvator je veliki krog na Zemlji-krogli in je presečišče Zemlje-krogle z ravnino, ki poteka skozi središče krogle.
Meridiani (poldnevniki) so veliki krogi na Zemlji-krogli, so presečišče Zemlje-krogle z ravninami, ki potekajo skozi središče krogle in skozi oba pola. Geografska dolžina točke je njena sferna razdalja od začetnega Greenwiškega meridiana, računano v ravnini ekvatorja. Geografska dolžina točke je tudi kot v ravnini ekvatorja med ravninami izhodiščnega meridiana in krajevnega meridiana točke. Geografske dolžine štejemo vzhodno in zahodno od izhodiščnega Greenwiškega meridiana od 0° do 180°.
Vzporedniki (širinski krogi) so mali krogi na Zemlji-krogli, ki so vzporedni z ekvatorjem. Vsi kraji na istem vzporedniku imajo enako geografsko širino. Vsi kraji na istem meridianu imajo enako geografsko dolžino.

Koordinate točke, ki je podana z geografskimi koordinatami zapišemo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| T: | $\phi$: | N 45° 24' 16",3 | $\lambda$: | E 14° 56' 33",7 |
| | | + 45° 24' 16",3 | | – 14° 56' 33",7 |

## Pretvorba med kartezičnimi in krogelnimi koordinatami




slika : pretvorba med pravokotnimi in polarnimi krogelnimi koordinatami

Pretvorba iz sistema ($R$, $\phi$, $\lambda$) v sistem ($X$ , $Y$, $Z$) je podana z enačbo:

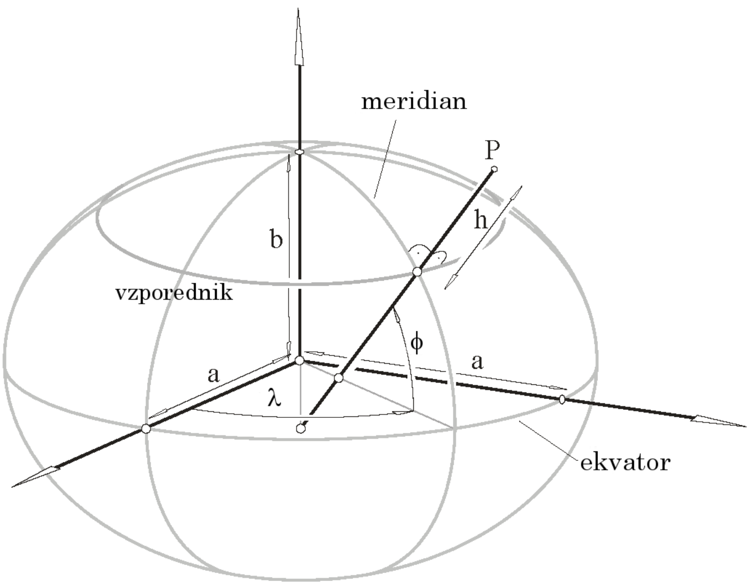
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$

Pretvorba iz sistema ($X$ , $Y$, $Z$) v sistem ($R$, $\Phi$, $\Lambda$) je podana z enačbo:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\dfrac{Z}{d}; \arcsin\dfrac{Z}{R} \\ \arctan\dfrac{Y}{X} \\ \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \end{bmatrix} \qquad d = \sqrt{Y^2 + X^2}$$

$d$ je pomožna količina in je diagonala pravokotnika s stranicami enakimi koordinatam $X$, $Y$ točke P.

## Geodetske (elipsoidne) koordinate




slika: geodetske koordinate

Geodetske koordinate ($\phi$, $\lambda$, $h$) so definirane z normalo (pravokotnico) na elipsoid. Geodetska (elipsoidna) širina $\phi$ je kot med normalo in ekvatorsko ravnino. Geodetska (elipsoidna) dolžina $\lambda$ je kot med ravninama izhodiščnega (Greeenviškega) in krajevnega meridiana točke. Elpsoidna višina $h$ je oddaljenost točke na površju Zemlje od elipsoida, vzeto po normali.

## Pretvorba med kartezičnimi in geodetskimi koordinatami

Pretvorba iz geodetskih koordinat ($\phi$, $\lambda$, $h$) v pravokotne koordinate ($X$, $Y$, $Z$) je podana z enačbo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ \left[(1-e^2)N+h\right]\sin\phi \end{bmatrix} \qquad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}} \qquad e^2 = 2f - f^2$$

pri čemer so:

- $N$ polmer ukrivljenosti v smeri prvega vertikala vtočki obravnave,
- $e$ je prva ekscentriciteta referenčnega elipsoida,
- $f$ je sploščenost referenčnega elipsoida.

Obratna pretvorba iz pravokotnih koordinata je možna po iterativni poti ali z rešitvijo enačbe 4. stopnje.