

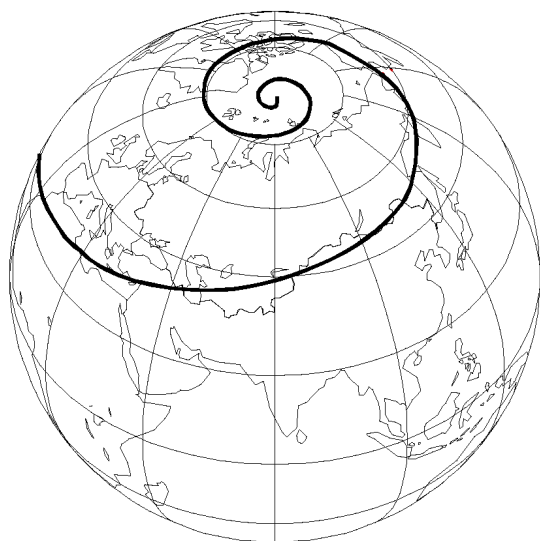
GEODETSKI NALOGI NA KROGLI

1 Pojem ortodrome in loksodrome

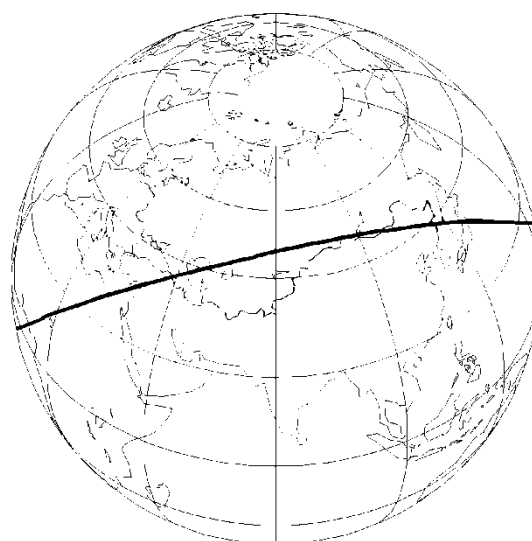
Najkrajša povezava – krivulja med dvema točkama na poljubni ploskvi se imenuje *geodetska krivulja – linija*. V primeru krogle je geodetska linija med dvema točkama na površju krogle lok velikega kroga, ki poteka skozi obe točki. V navigaciji in geodeziji se ta lok imenuje *ortodroma* (iz grščine "ortos" - pravi, "dromos" – pot).

Če obravnavamo Zemljo kot kroglo je ortodroma najkrajša pot med dvema mestoma na Zemlji. Ortodroma seka vsak meridian po drugim kotom, kar pomeni če plujemo po ortodromi, moramo neprestano spreminjati kurz oz. azimut po katerem pluje naše plovilo, kar je praktično nemogoče.

Loksodroma (iz grščine "loksos" – poševen) na krogli je krivulja, ki seka vse meridiane pod istim kotom. Ladja, ki pluje po loksodromi ima prednost konstantnega kurza in pomanjkljivost daljše poti. Loksodroma je prostorska krivulja, ki se polu neprestano približuje in ga nikoli ne doseže. Med dvema točkama na površju Zemlje - krogle je poljubno mnogo loksodrom, V poštev pride samo tista, ki pripelje iz ene v drugo točko v manj kot enem zavoju.

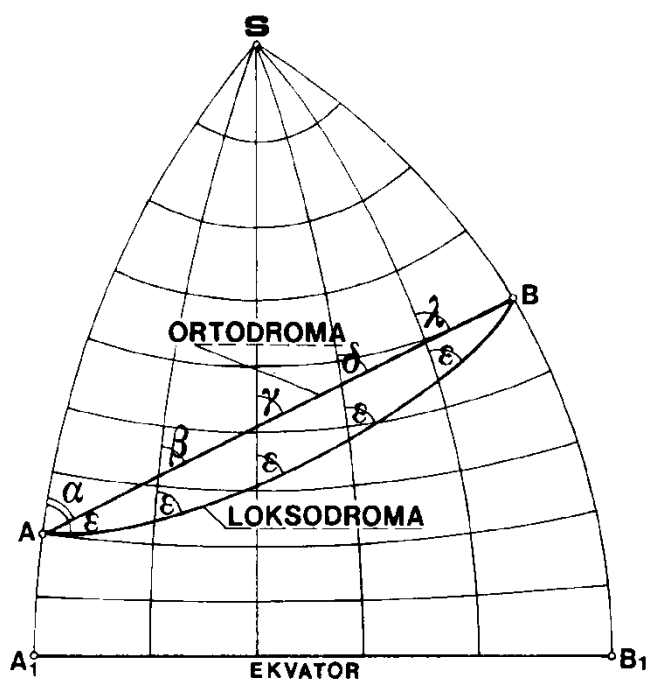


loksodroma



ortodroma

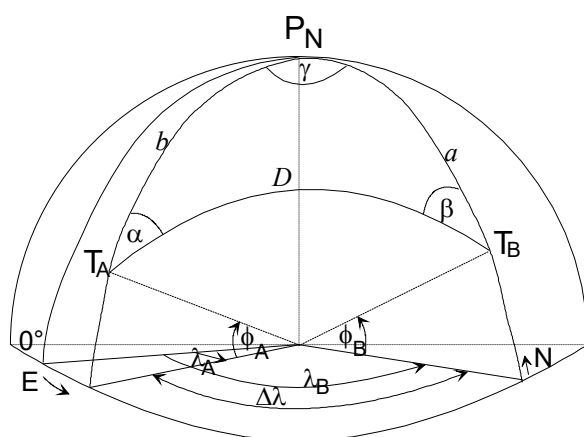
Poseben primer loksodrome na Zemlji so ekvator, vsi meridiani in vzporedniki. Vzporedniki so loksodrome z azimutom $A = 90^\circ$ oz. 270° .



Razlika med ortodromo in loksodromo

2 Prva in druga geodetska naloga

Prvo in drugo geodetsko nalogo imenujemo osnovni geodetski nalogi. Na krogli predstavlja reševanje geodetskih nalog dejansko reševanje splošnega sfernega trikotnika – navtičnega sfernega trikotnika.



elementi:

$$a = 90^\circ - \phi_B$$

$$b = 90^\circ - \phi_A$$

D – ortodromna razdalja

$$\gamma = |\lambda_B - \lambda_A|$$

$$\alpha = A_{AB}$$

$$\beta = 360^\circ - A_{BA}$$

Azimet je kot med tangentama na krog meridiana in geodetsko krivuljo iz točke T_A v točko T_B . Azimet v točki T_A je enak kotu α , azimet v drugi točki T_B je enak $A_{BA} = 360^\circ - \beta$.

Kurz plovila (letala) ali trenutna smer plovbe je kot, ki ga trajektorija plovila tvori z meridianom.

2.1 Prva geodetska naloga

Podano je: točka T_A s svojimi geografskimi koordinatami, ortodromna razdalja od točke T_A do točke T_B in azimut A_{AB} do točke T_B . Potrebno je izračunati geografske koordinate točke T_B ; torej:

Dano: $T_A (\phi_A, \lambda_A), D_{AB}, A_{AB}$.

Išče se: $T_B (\phi_B, \lambda_B)$

(V mednarodni literaturi je naloga znana kot "direct problem".)

Reševanje prve geodetske naloge pomeni reševanje splošnega sfernega trikotnika (III. tip naloge). Če je dani azimut v mejah med 0° in 180° , je to notranji kot v navtičnem trikotniku. Potem iskana točka T_B leži vzhodno od točke T_A . V primeru, da je dani azimut v mejah med 180° in 360° je to zunanji kot v oglišču (dana točka) in je dejansko dana točka T_B (skladno z našim označevanjem). Iskana točka leži zahodno od dane točke.

Ker je ortodromna razdalja D_{AB} podana v dolžinskih enotah, jo moramo pretvoriti v kotne enote:

$$D^\circ = \frac{D_{\text{km}} 180^\circ}{\pi R_{\text{km}}}$$

Stranico a izračunamo po kosinusuovem stavku za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos D + \sin b \sin D \cos \alpha$$

$$(b = 90^\circ - \phi_A , A_{AB} = \alpha)$$

$$a = 90^\circ - \phi_B \Rightarrow \phi_B = 90^\circ - a$$

Kota β in γ izračunamo s pomočjo Napier-jevih enačb:

$$\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b - D}{2}}{\cos \frac{b + D}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b - D}{2}}{\sin \frac{b + D}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2}$$

$$\gamma = \Delta\lambda \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A \pm \Delta\lambda$$

Pri izbiranju oznak točk (dana, iskana) moramo upoštevati velikost danega azimuta. Oznake si nato ustrezno priredimo. Enako velja za predznak $\pm\Delta\lambda$. Če je dani azimut $A < 180^\circ$, $\Delta\lambda$ prištejemo, če pa je dani azimut $A > 180^\circ$, $\Delta\lambda$ odštejemo. Izjeme nastopajo, če sta točki na različnih straneh Greenviškega meridiana oz. datumske meje.

2.1.1 Rešitev s pomočjo kotangensnega izreka

Razlika je samo v računanju neznanih kotov β in γ . Stranico a izračunamo prav tako po kosinusnem izreku.

Kotangensni izrek za elemente $\alpha b \gamma$:

$$\cot D \sin b = \cos b \cos \alpha + \cot \gamma \sin \alpha$$

Od tod izrazimo neznani kot γ :

$$\cot \gamma \sin \alpha = \cot D \sin b - \cos b \cos \alpha$$

$$\tan \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cot D \sin b - \cos b \cos \alpha}$$

Kotangensni izrek za elemente $\beta D \alpha b$:

$$\cot b \sin D = \cos D \cos \alpha + \cot \beta \sin \alpha$$

Od tod izrazimo neznani kot β :

$$\cot \beta \sin \alpha = \cot b \sin D - \cos D \cos \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cot b \sin D - \cos D \cos \alpha}$$

2.2 Druga geodetska naloga

Podano sta točki T_A in T_B s svojimi geografskimi koordinatami (ϕ_A, λ_A) , (ϕ_B, λ_B) . Potrebno je izračunati ortodromno razdaljo med točkama D_{AB} in oba azimuta.

Dano: $T_A (\phi_A, \lambda_A)$, $T_B (\phi_B, \lambda_B)$

Išče se: D_{AB} , A_{AB} , A_{BA} .

(V mednarodni literaturi je naloga znana kot "inverse problem".)

Reševanje druge geodetske naloge pomeni reševanje splošnega sfernega trikotnika (III. tip naloge).

Razdaljo D izračunamo s pomočjo kosinusnega izreka za stranice:

$$\cos D = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$(a = 90^\circ - \phi_B , b = 90^\circ - \phi_A , \gamma = |\Delta\lambda|)$$

Izračunano razdaljo D_{AB} izrazimo v dolžinskih enotah:

$$D_{\text{km}} = \frac{\pi R_{\text{km}}}{180^\circ} D^\circ$$

Kota α in β dobimo s pomočjo Napier-jevih enačb:

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{a + b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Azimuta sta: $A_{AB} = \alpha$, $A_{BA} = 360^\circ - \beta$

2.2.1 Rešitev s pomočjo kotangensnega izreka

Razlika je samo v računanju neznanih kotov α in β . Ortodromno razdaljo izračunamo prav tako po kosinusnem izreku.

Kotangensni izrek za elemente $a\gamma b\alpha$:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot \alpha \sin \gamma$$

rešimo kot α :

$$\cot \alpha \sin \gamma = \cot a \sin b - \cos b \cos \gamma$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \gamma}{\cot a \sin b - \cos b \cos \gamma}$$

Kotangensni izrek za elemente $\beta a \gamma b$:

$$\cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$$

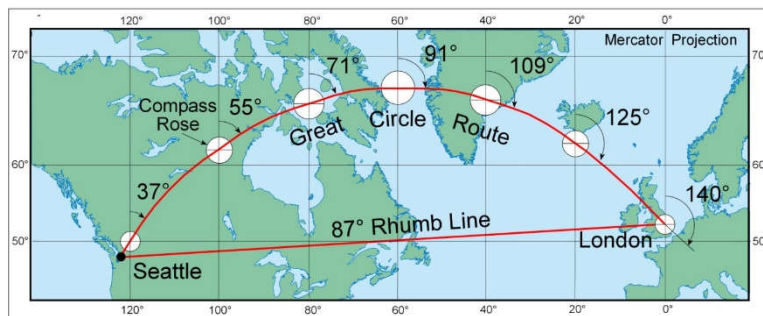
rešimo kot β :

$$\sin \gamma \cot \beta = \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma$$

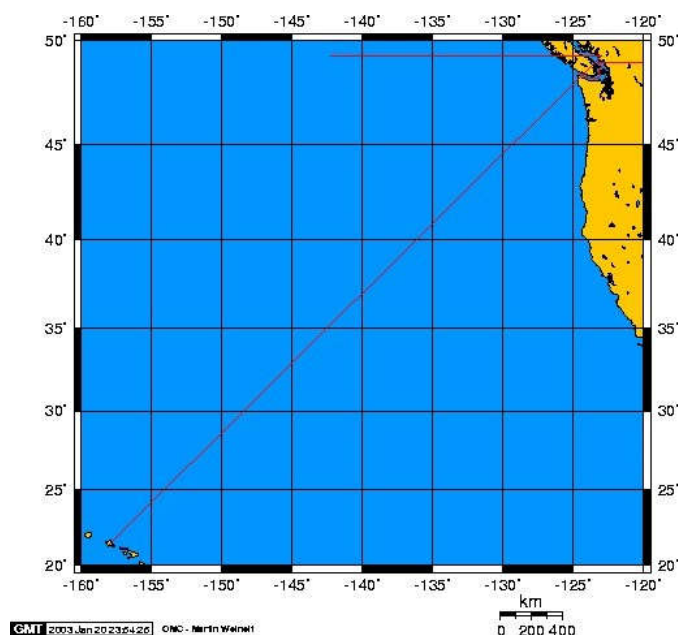
$$\tan \beta = \frac{\sin \gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos \gamma}$$

2.3 Plovba po loksodromi

Plovba po ortodromi terja stalno menjava kurza, kar je praktično nemogoče. Zato se na velike razdalje (nekaj tisoč kilometrov) pluje po loksodromi, največkrat tako, da se ortodroma med izhodiščem in ciljem aproksimira z loki posameznih loksodrom in se le občasno, na nekaj sto kilometrov prevožene poti, menja kurz ladje. Na krajše razdalje (do tisoč kilometrov) pa se v praksi skoraj vedno pluje po loksodromi, saj je razlika med dolžino ortodromne in loksodromne poti neznatna in je reda velikosti 2 km (morska milja).



Loksodroma in ortodroma na karti v Merkatorjevi projekciji



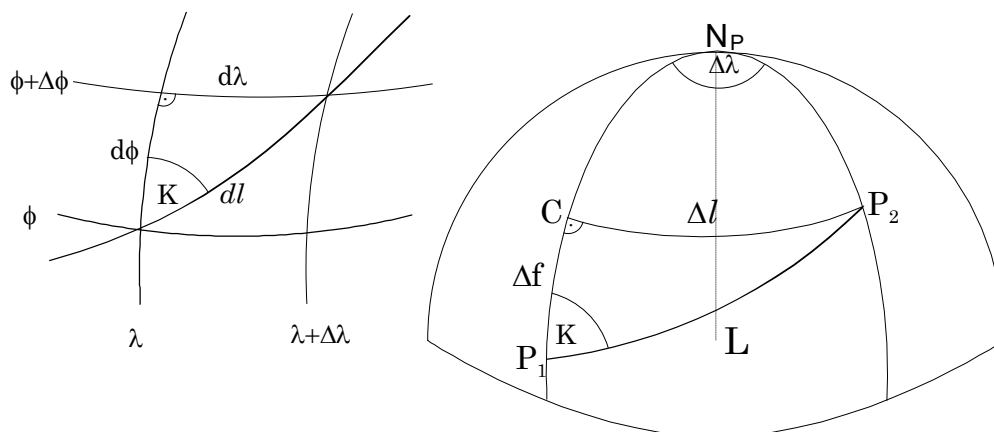
Loksodroma na karti v Merkatorjevi projekciji

Loksodroma ima tudi to prednost, saj je njena projekcija na pomorskih kartah, ki so izdelane v Merkatorjevi projekciji, premica.

2.3.1 Enačba loksodrome

Podani sta dve točki z geografskimi koordinatami, P_1 in P_2 .

Izračunajmo dolžino loksodrome (L) med obema točkama in kurz plovila iz prve točke proti drugi (K).



Loksodromski trikotnik

Obravnavamo "pravokotni loksodromski" trikotnik P_1CP_2 . Stranica P_1P_2 je lok loksodrome, stranica P_2C je dolžina vzporednika točke P_2 , stranica P_1C je dolžina loka meridiana točke P_1 .

Stranica CP_1 je enaka loku meridiana točke P_1 :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$CP_1 = \Delta f = \Delta\phi \times R$$

(Δf pomeni dolžino loka meridiana med P_1 in P_2).

Stranica CP_2 je enaka:

$$CP_2 = \Delta l = \Delta\lambda \times R_\phi = \Delta\lambda R \cos \phi, \text{ pri čemer je } \Delta l \text{ dolžina loka vzporednika točke } P_2.$$

Če obravnavamo samo infinitezimalno majhen del loksodrome, ki poteka skozi točko P_1 , (slika levo):

$$\Delta\lambda \rightarrow d\lambda$$

$$\Delta\phi \rightarrow d\phi$$

lahko loksodromski trikotnik obravnavamo kot raven pravokotni trikotnik. Tangens kota K (kurz) je:

$$\tan K = \frac{R d\lambda \cos \phi}{R d\phi}$$

Od tod imamo:

$$\frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{\tan K}{\cos \phi}$$

Rešitev diferencialne enačbe nam da:

$$\frac{d\lambda}{\tan K} = \frac{d\phi}{\cos \phi} \quad \text{oz.}$$

$$\frac{\lambda}{\tan K} = \int \frac{d\phi}{\cos \phi} = \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) + C$$

Enačba loksodrome z kurzom K se glasi:

$$\lambda = \tan K \int \frac{d\phi}{\cos \phi}$$

$$\lambda = \tan K \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) + C$$

Integracijska konstanta C nam da množico loksodrom. Loksodroma, ki poteka skozi točki P_1 in P_2 se glasi:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan K \left[\ln \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_2}{2} \right) - \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_1}{2} \right) \right]$$

oz.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan K \ln \frac{\tan \left(45^\circ + \frac{\phi_2}{2} \right)}{\tan \left(45^\circ + \frac{\phi_1}{2} \right)}$$

razlika geografskih dolžin $\lambda_2 - \lambda_1$ je podana v radianih.

Kurz je enak:

$$\tan K = \frac{\Delta\lambda_{[rad]}}{\ln \left[\frac{\tan \left(45^\circ + \frac{\phi_2}{2} \right)}{\tan \left(45^\circ + \frac{\phi_1}{2} \right)} \right]}$$

Dolžino loksodrome lahko izračunamo tudi iz "ravnega" pravokotnega trikotnika:

$$\cos K = \frac{Rd\phi}{dl} \quad dl = \frac{Rd\phi}{\cos K}$$

$$l = \frac{R}{\cos K} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{R}{\cos K} (\phi_2 - \phi_1)$$

Dolžino loksodrome lahko neposredno izračunamo v [km]:

$$L_{[km]} = \frac{R}{\rho^\circ} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\cos K} = 111,195 \frac{(\phi_2 - \phi_1)^\circ}{\cos K}$$

ali [mm]:

$$L_{[mm]} = \frac{(\phi_2 - \phi_1)'}{\cos K}$$

Razlika geografskih širin je podana v ločnih minutah.