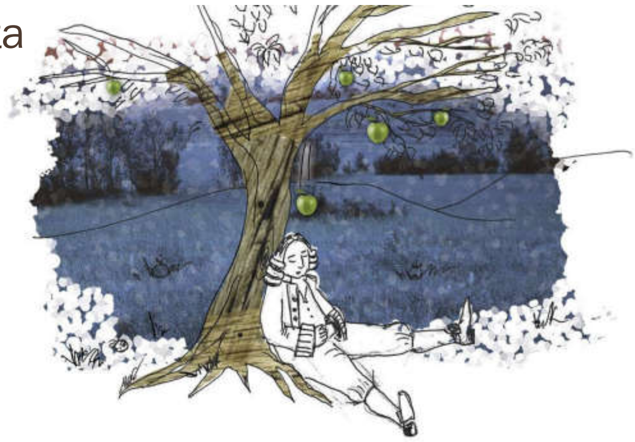
Kako predstaviti težnostno polje Zemlje?

- Univerzalni gravitacijski zakon:
  $\rightarrow$ gravitacijska (privlačna) sila;

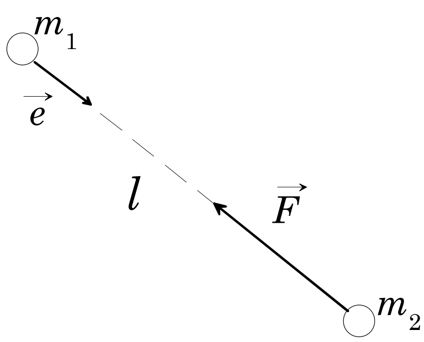
$$F = \mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{l^2}$$

- F sodi med t.i. centralne sile.
- G - univerzalna gravitacijska konstanta



Gravitacijska (privlačna) sila

- aktivna masa ("attracting mass");
- testna (pasivna) masa ("attracted mass");



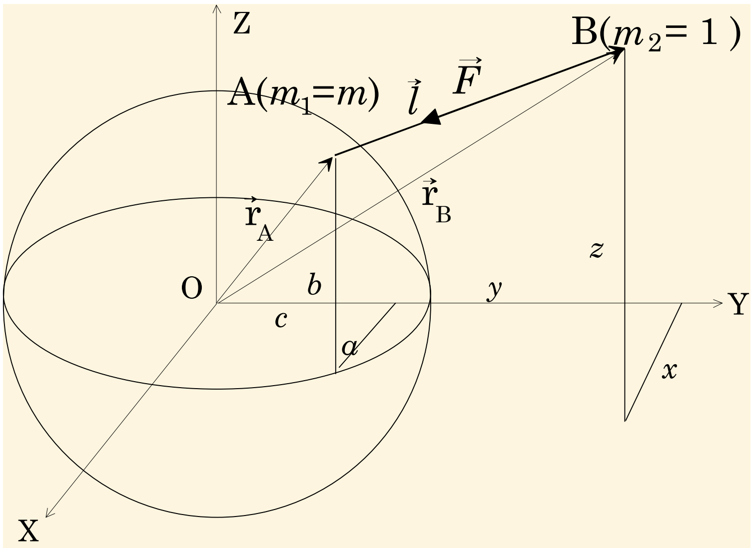
$$\mathbf{F} = -\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{l^2}\mathbf{e} = -\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{l^2}\frac{\mathbf{l}}{l}$$

- smer privlačne sile v nasprotni smeri enotskega vektorja $\boldsymbol{e}$;
- Grav. sila je pomembna le, če je vsaj eno telo astronomsko, na primer Zemlja.

Od gravitacijske sile do gravitacijskega potenciala

- Vsi računi se poenostavijo, če z vektorja preidemo na skalar – potencial!

$$V = G\frac{m}{l}$$



$$V = G\frac{m}{l}$$

Potencial privlačne (gravitacijske) sile

- Potencialna funkcija vektorja (privlačne - gravitacijske sile)

  $\rightarrow$ gravitacijski potencial: $V = G\dfrac{m}{l}$

- V fizikalnem pomenu je potencial gravitacijske sile v neki točki P negativno delo, ki ga mora opraviti gravitacijska sila na enoto mase, da bi privedla telo iz neskončne oddaljenosti, kjer je potencial *V*=0, v točko P.
- Potencial grav. sile ni enak potencialni energiji!

- Parcialni odvodi skalarne funkcije gravitacijskega potenciala so enaki komponentam vektorske funkcije gravitacijske sile: $\boldsymbol{F}\,(F_X, F_Y, F_Z) = \mathrm{grad}\;V$
- Gravitacijska sila je gradient gravitacijskega potenciala!

Gravitacijski potencial Zemlje

- Gravitacijska sila je med telesi, ki niso zanemarljivo majhna v primerjavi z njihovo medsebojno oddaljenostjo, odvisna od oblike, velikosti in lege teles v prostoru.

$$V = G\frac{m_1}{l_1} + G\frac{m_2}{l_2} + \ldots\ldots + G\frac{m_n}{l_n} = G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{l_i}$$

- Ob predpostavki, da so masne točke v notranjosti telesa razporejene zvezno v notranjosti, lahko preidemo z elementa mase *m* na zvezno razporejene elemente v prostornini *v* z gostoto ρ:

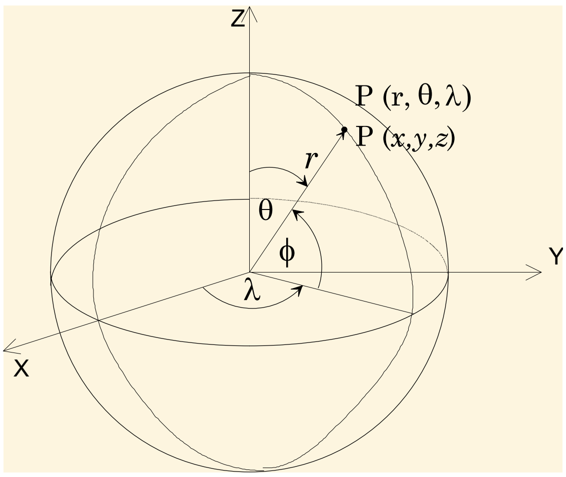
$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad \Rightarrow \quad V = G\iiint_v \frac{\mathrm{d}m}{l} = G\iiint_v \frac{\rho}{l}\mathrm{d}v$$

- Enačba velja tudi za Zemljo:

$$V = G\iiint_{\text{Zemlja}} \frac{\mathrm{d}m}{l} = G\iiint_{\text{Zemlja}} \frac{\rho}{l}\mathrm{d}v$$

Gravitacijski potencial krogle

- Krogelne koordinate na Zemlji:



- r je radij vektor, θ polarni kot ("colatitude"), λ sferna dolžina (dolžinski kot);

- Sferna lupina (f);
  - element df je prostorska parcela

Grav. potencial sferne lupine

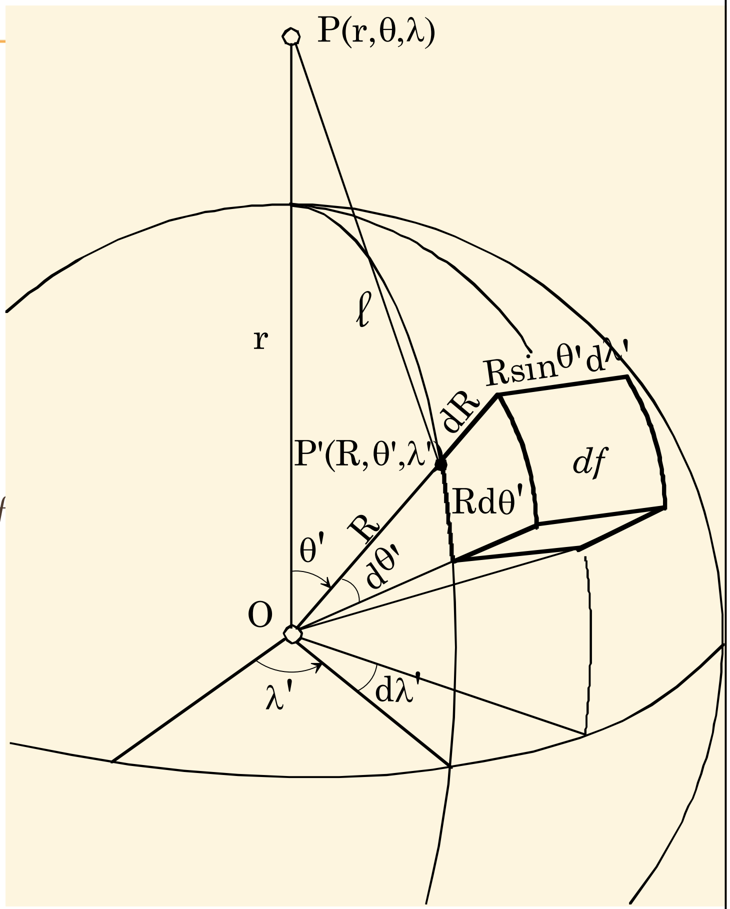
- Sferna lupina (*f*).
- Potencial računamo v točki P(r,θ,λ). njen položaj določen s točko P' (R, θ', λ').
- Potencial homogene sferne lupine:

$$V' = G\iint_f \frac{\sigma}{l}\,df$$

- Položaj lupine je podan z elementom df (prostorska parcela):

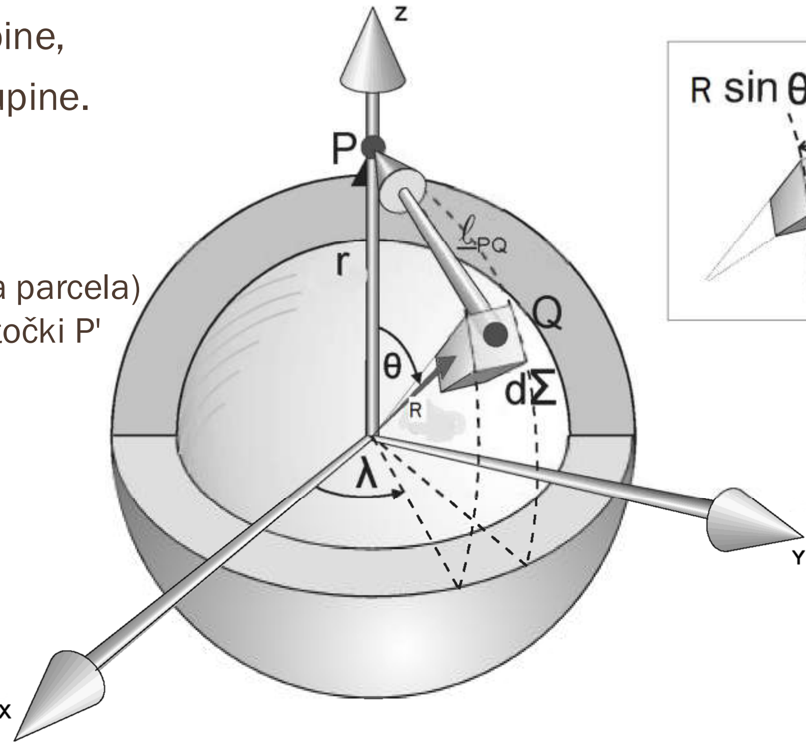
$$df = R^2 \sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

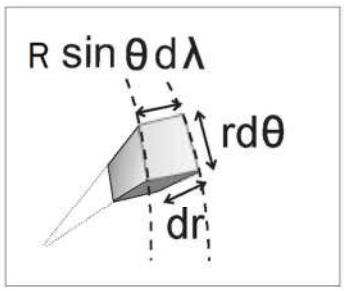
- Območje integracije razčlenimo s df na krogelne koordinate θ' in λ': $0 < \theta' < \pi;\ 0 < \lambda' < 2\pi.$



Grav. potencial sferne lupine (2)

- Ločimo dva primera, glede na položaj točke P:
  - točka P zunaj lupine,
  - točka P znotraj lupine.
- Op: točka Q (prostorska parcela) na sliki desno ustreza točki P' na prejšnji sliki!





Gravitacijski potencial Zemlje - krogle, sestavljene iz homogenih koncentričnih lupin

- Točka zunaj Zemlje: $V_z = G \iiint\limits_{Zemlja} \frac{dm'}{r} = G\frac{M}{r}$
- Točka v notranjosti Zemlje:
  - dva člena: prvi člen povzročajo mase v notranjosti krogle r=R=const.,
  - drugi člen je potencial lupine debeline a–r, (a je ekvatorialni radij Zemlje):

$$V_n = \frac{4\pi G}{r}\rho\int_0^r R^2 dR + 4\pi G\rho\int_r^a R\,dR$$

  - rešitev zgornjih integralov je:

```
In[8]:= Integrate[R^2, {R, 0, r}]
Out[8]= r^3/3
In[7]:= Integrate[R, {R, r, a}]
Out[7]= a^2/2 - r^2/2
```

- Za homogeno Zemljo–kroglo (ob predpostavki ρ=const) dobimo: (točka je na oddaljenosti r od koord. izhodišča):

$$V_n = \frac{4}{3}\pi G\rho r^2 + 2\pi G\rho\left(a^2 - r^2\right) = 2\pi G\rho\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right)$$

Lastnosti grav. potenciala (1)

- Prvi odvodi gravitacijskega potenciala V (komponente privlačne sile) so zvezne, enolične in omejene funkcije v celotnem prostoru (v zunanjosti in notranjosti Zemlje):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x = -G\iiint\limits_{Zemlja} \frac{x-a}{l^3}dm \ldots$$

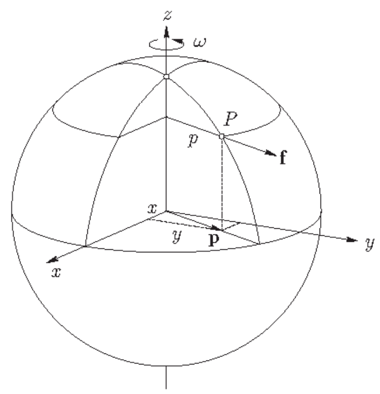
- To ne velja za druge odvode potenciala. Drugi odvodi vsebujejo diskontinuiteto zaradi hitrega preskoka gostote na mejni ploskvi med atmosfero in trdnim delom (Zemlja).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx} = -G\iiint\limits_{Zemlja} \frac{1}{l^3}dm + 3G\iiint\limits_{Zemlja} \frac{(x\text{-}a)^2}{l^5}dm \ldots$$

Lastnosti grav. potenciala (2)

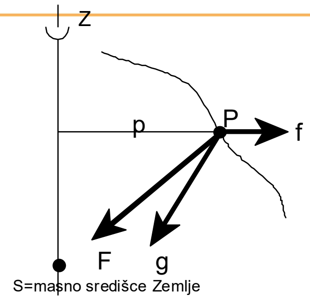
- Gravitacijski potencial znotraj Zemlje zadošča Poissonovi diferencialni enačbi: $\Delta V = -4\pi G\rho$.
- Zunaj Zemlje v odprtem prostoru, kjer je $\rho = 0$, zadošča gravitacijski potencial Laplaceovi diferencialni enačbi: $\Delta V = 0$.
- Znak Δ je t.i. Laplaceov operator, predstavlja operacijo drugega reda, vsoto drugih odvodov: $$\Delta f(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x,y,z)$$
- Rešitve Laplaceove diferencialne enačbe so tako imenovane harmonične funkcije. Torej je gravitacijski potencial harmonična funkcija zunaj mas, ki privlačijo telesa, ne pa tudi v notranjosti teh mas.

Centrifugalni potencial



- Na točko P, ki se nahaja na površini Zemlje in se vrti skupaj z njo deluje centrifugalna sila.
- Centrifugalni pospešek, ki ga občuti telo enotske mase: $f = \omega^2 p$.
- Kotna hitrost rot. Zemlje: $\omega = 7{,}292115\times10^{-5}$ rad/s (znana iz astronomije z visoko natančnostjo).
- Centrifugalni potencial: $$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\omega^2 p^2 \qquad \boldsymbol{f} = \operatorname{grad}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
- Centrifugalni potencial ima enako dimenzijo kot gravitacijski potencial; pomeni energijo, ki jo ima enota mase zaradi rotacije okoli osi *Z*.
- Za točke na ekvatorju, ima centrifugalni potencial vrednost $\Phi = 1{,}1\times10^5 \mathrm{m^2 s^{-2}}$, centrifugalni pospešek pa $f = |\boldsymbol{f}| = 0{,}034 \mathrm{ms^{-2}}$ (≈ 0,35% gravitacije).

Sila teže, potencial sile teže



- Na masno točko *P* na površini Zemlje, kot vektorska rezultanta delovanja centrifugalne in gravitacijske sile, učinkuje sila teže ("gravity"):

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{f}$$

- Sila teže je vektor, torej ima svojo smer in velikost. Smer vektorja **g** je v vsakdanjem življenju znan kot težiščnica (ponazarjata jo smer vertikalne osi horizontiranega geodetskega instrumenta, oziroma smer grezila); velikost vektorja $g = |\mathbf{g}|$, pa je jakost sile teže oz. kratko težnost.

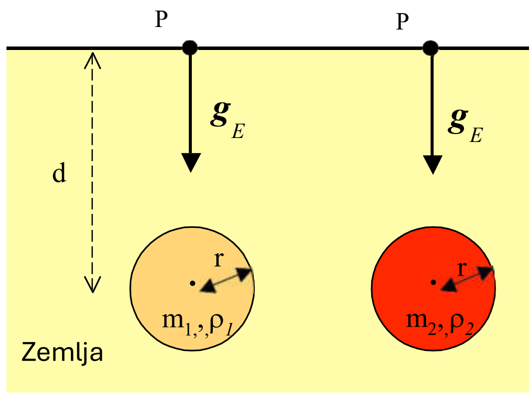
- Velikost vektorja sile teže – težnost ima fizikalno dimenzijo pospeška. V praksi (posebej geodetski in geofizikalni) je lažje delati s skalarjem, zato se namesto sile, obravnava pospešek.

Enote za težnost

količina	SI enote	uporabniške
težnost	10^{-2} ms^{-2}	1 Gal
(težni pospešek)	10^{-5} ms^{-2}	1 mGal
	10^{-8} ms^{-2}	1 μGal
težnostni potencial	10 m^{2}s^{-2} = 1 g.p.u.	1 kGalm

Spremembe težnosti (1)

- Obravnavamo telo krogelne oblike v bližini Zemljinega površja:
- Prvi primer:
  - r = 100 m (polmer predmeta);
  - globina središča d = 200 m;
  - gostota ρ_1 = 2000 kg/m^3 ; (apnenec)
- Drugi primer:
  - kamnina gostote ρ_2 = 3000 kg/m^3 (bazalt).
- Obravnavamo prispevek mase m_2 na težnostno polje na površju Zemlje.



Spremembe težnosti (2)

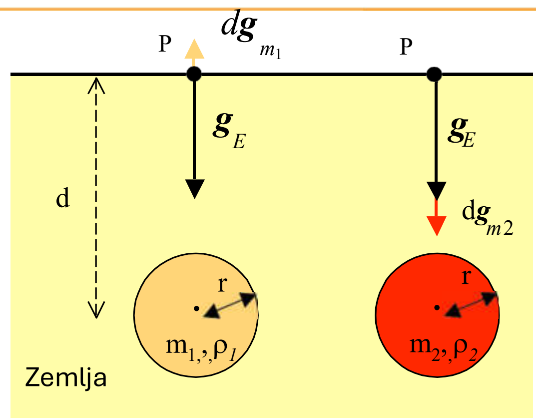
$$g_{m_1} = G\frac{m_1}{d^2} = G\frac{\rho V}{d^2}$$

$$V_{\text{krogla}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$g_{m_1} = \frac{4G\rho_1\pi r^3}{3d^2}$$

$$g_{m_1} = \frac{4\times 7\times 10^{-11}\times 2\times 10^3\times 3{,}14\times 10^6}{3\times 4\times 10^4}$$

$$g_{m_1} \approx 14\times 10^{-6}\,\text{ms}^{-2} = 1{,}4\times 10^{-5}\,\text{ms}^{-2} = 1{,}4\,\text{mGal}$$



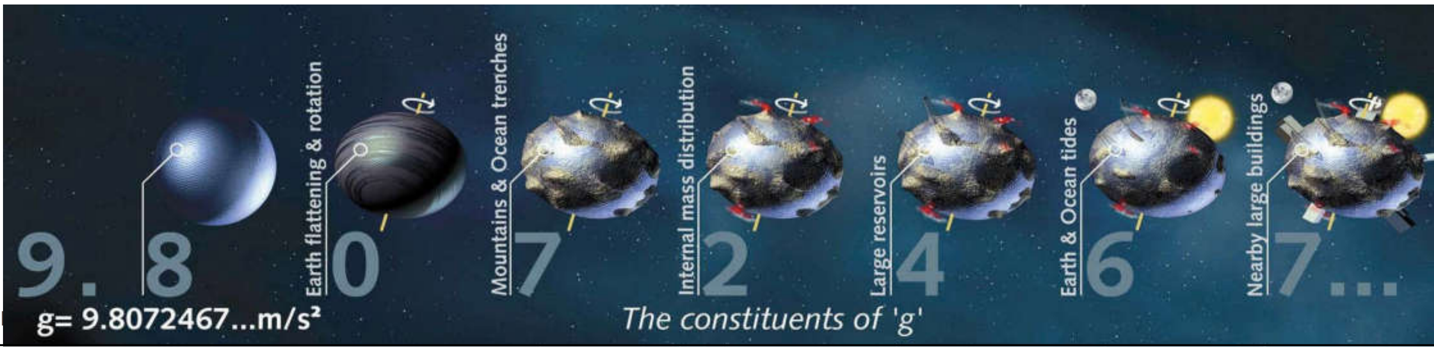
- Gostota telesa m_2 je 1/3 manjša od gostote telesa m_1.
- $\Rightarrow$ prispevek težnosti telesa m_2 je 1/3 večji:
- $\Rightarrow$ $g_{m_2} = 2{,}1\,\text{mGal}$

- Prispevek telesi m_1 in m_2:
  - $m_1 \Rightarrow$ težnost je manjša od povprečja na površju Zemlje
  - $m_2 \Rightarrow$ težnost manjša od povprečja na površju Zemlje
- Mali prispevek:
  - povprečna težnost na površju Z. ~ 10^6 mGal
  - prispevek m_1 in m_2 ~ 10^{-6} ;
  - natančnost potrebna da zaznamo prispevka teles m_1 in m_2!

Spremembe težnosti na Zemlji

- Velikostni razredi vplivov na vrednosti težnega pospeška, glede na izmerjeno vrednost g-ja v kleti FGG: g = 9,806 156 66 ms^{-2}

10^{1}	Zemlja kot krogla ($g \approx 9{,}8$ ms^{-2})
10^{-3}	sploščenost in centrifugalni pospešek (1 / 300)
10^{-4}	gore, doline, depresije, oceanski hrbti ...
10^{-5}	spremembe gostote v Zemljini skorji in plašču
10^{-6}	sedimenti, solni čoki, rudna ležišča
10^{-7}	plimovanje trdne Zemlje in oceanov, vremenske fronte
10^{-8}	časovno odvisni vplivi v oceanih, vodni režim, nihanje podtalnice
10^{-9}	topografija morske gladine, premikanje polov
10^{-10}	splošna teorija relativnosti



Potencial sile teže

- Potencial sile teže (težnostni potencial) dobimo kot vsoto potenciala privlačnosti in potenciala centrifugalne sile:

$$W = V + \Phi = G \iiint_{Zemlja} \frac{\rho}{l} dv + \frac{\omega^2}{2} p^2$$

- V matematičnem zapisu predstavlja težni (težnostni) pospešek gradient težnostnega potenciala: $\boldsymbol{g} = \mathrm{grad}\ W$.

- Potencial *W* in njegovi prvi in drugi odvodi so enolične, zvezne funkcije, kot posledica lastnosti potencialov V in Φ, razen v primerih, ki nas geodete toliko ne zanimajo: z naraščanjem l prek vseh meja, $l \to \infty$.
- Drugi odvodi niso zvezni v primerih nepričakovane spremembe gostote.

Geometrija težnostnega polja

- Težnostni potencial mora vsebovati vse informacije, ki obstajajo o težnostnem polju. Zato je pričakovati, da "gladek" potencial ustreza "gladkemu" težnostnemu polju in obratno; "nepravilni" potencial ustreza "nepravilnemu" težnostnemu polju.

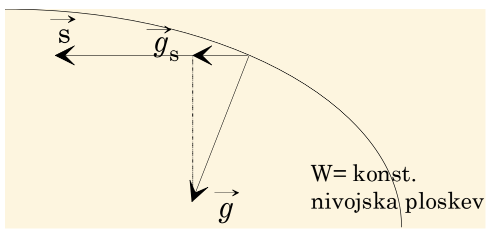
- Krajevne značilnosti težnostnega polja opišemo prek naslednjih količin:
  - ekvipotencialne ploskve (nivojske ploskve);
  - težiščnice;
  - sistem naravnih koordinat.

Nivojske (ekvipotencialne) ploskve

- Ploskve s konstantnim potencialom imenujemo ekvipotencialne ploskve ali nivojske ploskve: $W(x,y,z)=\mathrm{C}=\mathrm{konst.}$

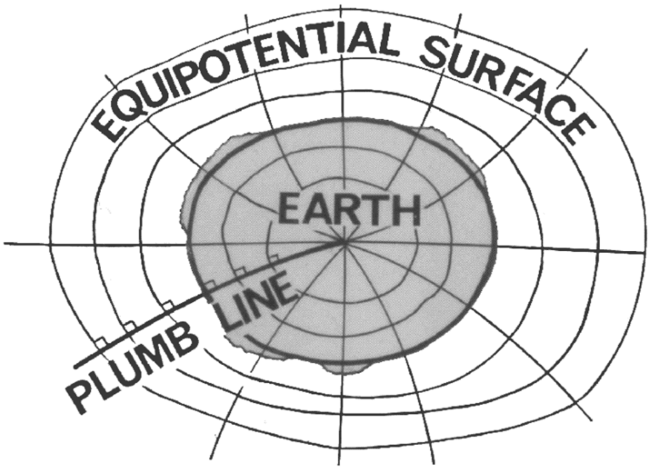
- L. Durang Clay je podal naslednjo definicijo nivojske ploskve:
  - "Nivojska ploskev je ploskev, ki jo lahko obhodimo brez vzpenjanja ali spuščanja in na kateri je potemtakem delo sile teže za masno točko, ki se po njej giblje, enako nič. Ta ploskev je v vseh svojih točkah pravokotna na smer sile teže. To smer imenujemo navpičnica."

- Odvod polja v smeri poljubnega vektorja ***s*** (na tabli)!



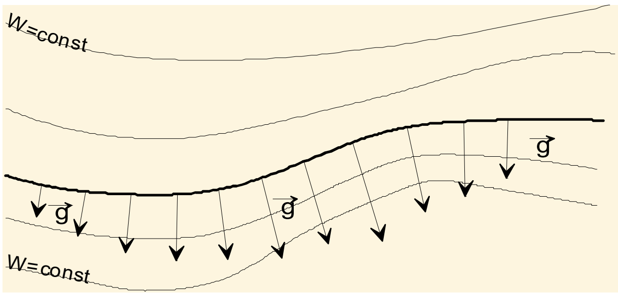
Težičnice, navpičnice (1)

- Težnostno polje je vektorsko polje, silnice – smerne krivulje vektorskega polja.
- Če vektorsko polje ni nikjer ničelni vektor, poteka skozi vsako točko vektorskega polja ena silnica. Silnice se med seboj ne sekajo. Grafično lahko ponazorimo vektorsko polje tudi tako, da narišemo silnice polja.
- Silnice težnostnega polja: $\rightarrow$ težiščnice.



Težičnice, navpičnice (2)

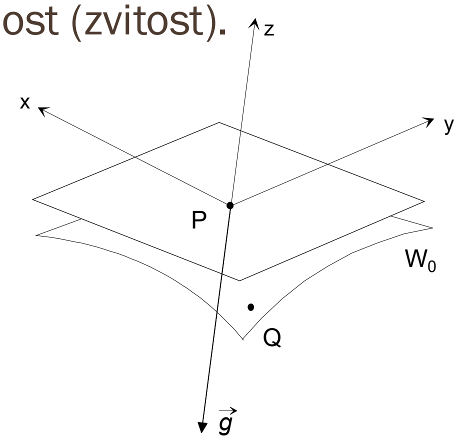
- Odvod polja v smeri naraščanja višin (tabla).
- Enačba, ki podaja zvezo med višino in potencialom: $\mathrm{d}W = -g\mathrm{d}H$.
- Druga oblika enačbe: $g = -\dfrac{\partial W}{\partial H}$
  - je težni pospešek negativni vertikalni gradient težnostnega potenciala W, ali pa vertikalna komponentna vektorja grad *W*.

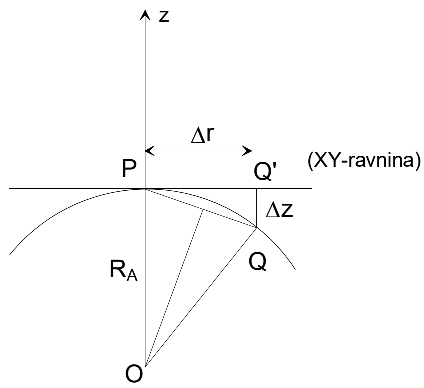


- Vrednost težnega pospeška narašča od ekvatorja proti polu (relativno zmanjšanje razdalje med sosednjima niv. ploskvama znaša pribl. 0,54%).

Ukrivljenost nivojskih ploskev in težišnic

- Težiščnice so prostorske krivulje. Zaradi nepravilnosti v ukrivljenosti nivojskih ploskev in sprememb gostote zemeljske notranjosti, vsebujejo težiščnice razen fleksijske ukrivljenosti (upognjenosti), tudi torzijsko ukrivljenost (zvitost).





- Ukrivljenost nivojskih ploskev in težiščnic je odvisna od drugih odvodov težnostnega potenciala. Ti vsebujejo nezveznost na mestih nenadnih sprememb gostote.

Gradient težnosti

- Z odvajanjem vektorja težnega pospeška dobimo tenzor gradienta težnosti ali t.i. *Eötvösev* tenzor* (drugi odvodi težnostnega potenciala):

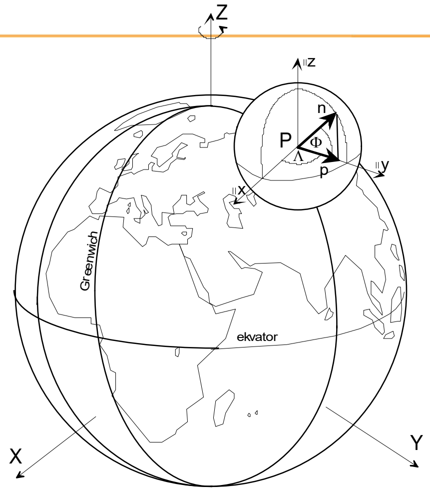
$$\operatorname{grad}\boldsymbol{g} = \operatorname{grad}(\operatorname{grad}W) = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}$$

- Tretja vrstica v tenzorju predstavlja gradient težnega pospeška. To je vektor, ki kaže v smeri največjega naraščanja težnosti ($W_Z = -g$).

$$\operatorname{grad} g = \begin{bmatrix} \partial g / \partial x \\ \partial g / \partial y \\ \partial g / \partial z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} W_{zx} \\ W_{zy} \\ W_{zz} \end{bmatrix}$$

- Osnovna enota gradienta težnega pospeška je Eötvös (E):
- $$1\ \mathrm{E} = 1\times10^{-9}\mathrm{s}^{-2} = 1\ \mu\mathrm{ms}^{-2}/\mathrm{km} = 0{,}1\ \mathrm{mGal/km}$$
- *Loránd Eötvös (1848-1919), madžarski geofizik

Sistem naravnih koordinat



- Sistem naravnih koordinat tvorijo:
  - *astronomska geografska širina* Φ,
  - *astronomska geografska dolžina* Λ,
  - *težnostni potencial* W.

- Zveza med fizikalnim in geometrijskim pristopom geodezije.
- Če izhajamo iz fizike (težnostni potencial), lahko določimo astronomske koordinate Φ, Λ, kot tudi geometrijo prostora (n.pr. ukrivljenost zemeljskega površja).

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Lambda \\ \cos\Phi\sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{bmatrix}$$