

# Določanje geoida (kvazigeoida)

- ✘ Določanje geoida (kvazigeoida) pomeni določanje oblike Zemlje oz. izračun ene določene nivojske ploskve Zemljinega težnostnega polja.
- ✘ Iščemo odgovor na vprašanje:
  - + Ali lahko določimo težnostno polje Zemlje v zunanjem prostoru brez poznavanja razporeda gostote v njeni notranjosti, samo z znanim potencialom na robu območja (površje Zemlje)?
  - + Matematično → reševanje **problema robnega pogoja** (PRP) parcialnih diferencialnih enačb:
    - ✘ Laplaceova d.e.  $\Delta V = 0$  ( $\Delta W = -2\omega^2$ ) → zunanji PRP;
    - ✘ Poissonova d.e.  $\Delta V = -4\pi G\rho$  ( $\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$ ) → notranji PRP.
- ✘ V splošnem je pri reševanju znana robna ploskev  $S$ , vendar pri reševanju **geodetskega problema robnih pogojev** (GPRP) robne ploskve  $S$  ne poznamo.

# Geodetski problem robnih pogojev

- ✘ **Geodetic boundary value problem** (GBVP):
  - + Gre za t.i. prosti GPRP, kjer poleg geometrije robne ploskve  $S$ , moramo določiti tudi potencial  $W$ . Pri določitvi geoida nas dejansko zanima samo  $S$ .
  - + Robne pogoje nam tu določa zvezna robna funkcija – težnostni potencial ( $W$ ). Ker potenciala ne moremo neposredno izmeriti, ga predstavimo s količinami, ki se dajo neposredno izmeriti.
  - + Te količine so ali t.i. **anomalijske količine težnostnega polja**, ali t.i. **moteče količine težnostnega polja**.
    - ✘ anomalije težnosti (moteča težnost), odkloni navpičnice (Helmertovi ali Pizzetijevi), ter geoidne višine (anomalije višin, kvazigeoidne višine).
  - + Vse te količine se lahko izrazijo v linearni obliki kot odvodi motečega potenciala  $T$ .
  - + Omenjene merjene količine podajajo robne pogoje, katerih rešitev je ploskev - približna oblika Zemlje.

# Pristopi k reševanju GPRP

- ✘ Dva pristopa k reševanju geodetskega problema robnih pogojev:
  - + klasični → rešitev je geoid.
  - + pristop po Molodenskem → rešitev je kvazigeoid.
- ✘ V grobem se pristopa ločita glede na redukcijo merjenih količin. Pri klasičnem pristopu merjene količine reduciramo na ničelno nivojsko ploskev ( $W_0 = \text{konst.}$ ) in rešitev je geoid. V nasprotnem primeru, če uporabimo merjene količine takšne kot so (na fizični površini Zemlje) je rešitev kvazigeoid.
- ✘ Pri geoidu so "merjene količine" anomaljske količine, pri kvazigeoidu pa so to "moteče količine". V prvem primeru moramo upoštevati določene pogoje. Redukcija merjenih količin na geoid predpostavlja uvajanje hipotez o gostoti mas znotraj Zemlje. Poleg tega pomeni redukcija na geoid, da zunaj robne ploskve - geoida ni nobenih motečih mas (atmosfera in topografija).
- ✘ Pristop po Molodenskem ne terja nobenih hipotez o razporeditvi gostote, kot tudi ni potrebno opraviti nobenih redukcij merjenih količin. Je pa ta postopek mnogo bolj zapleten.

## Rezultat izračuna geoida

- ✘ Končni rezultat izračuna geoida je določena oblika in velikost geoida (kvazigeoida) glede na izbrano referenčno ploskev elipsoida.
- ✘ Zaradi nepravilne razporeditve mas Zemlje je geoid nepravilne oblike in ni skladen z nobeno geometrijsko ploskvijo.
- ✘ V prostorskem smislu povezujejo geoid (kvazigeoid) in izbrani referenčni elipsoid **geoidne višine (kvazigeoidne višine oz. anomalije višin)**. To so odstopanja pravilne oblike elipsoida od nepravilne oblike geoida (kvazigeoida).
- ✘ Izračunane geoidne višine (anomalije višin) so, kot v primeru odklonov navpičnice, lahko **relativne** oz. **absolutne**.
  - + Absolutne se nanašajo na absolutni geocentrični elipsoid Zemlje, kot sta GRS 80 in WGS 84. Relativne geoidne višine se nanašajo na relativne referenčne elipsoide (Bessel, Hayford, Krasovski...)

## Vrste podatkov za določitev geoida (kvazigeoida)

---

- ✘ Meritve težnosti  $\rightarrow \Delta g$  ( $\delta g$ ).
- ✘ Astronomske meritve - astronomske geografske koordinate  $(\Phi, \Lambda) \rightarrow$  komponente odklona navpičnice.
- ✘ Koordinate točk, določene z izmero GNSS  $(\phi, \lambda, h) \rightarrow (N = h - H)$  ( $\zeta = h - H^N$ ).
- ✘ Opazovanja do umetnih zemljinih satelitov in med njimi  $\rightarrow$  geopotencialni model.
- ✘ Meritve satelitske altimetrije  $\rightarrow \Delta g$  na oceanih.

## Metode izračuna geoida (kvazigeoida)

---

- ✘ Razvrstitev glede uporabljenih podatkov:
  - + gravimetrične;
  - + astrogeodetske;
  - + satelitske metode.
- ✘ Integrirani pristop k določitvi geoida:
  - + uporabimo vse, kar imamo na razpolago.
- ✘ Vse sodobne metode upoštevajo tri vrste (skupine) podatkov:
  - + globalni geopotencialni model;
  - + terestrični podatki (težnost, odkloni na kopnem, altimetrija na oceanih);
  - + podatki o topografiji (DMV).

# Sodobni pristop k določitvi geoida

---

- ✘ Pri sodobnih metodah določitve geoida se uporabljajo tehnike **spektralne analize**.
- ✘ Količine, ki so vhodni podatki za računanje geoida se obravnavajo kot fizikalen pojav (zapis) z ustreznim spreminjanjem (fluktuacijo) v prostoru oz. času. Pogostnost ali fluktuacija je t.i. frekvenca oz. valovna dolžina in ima mnogo večjo vlogo, kot prostorske (časovne) koordinate pojava.
- ✘ S tehnikami spektralne analize je možno dani pojav transformirati v frekvenčno oz. spektralno domeno samo z preureditvijo danih podatkov.
- ✘ Transformacija prostorskega oz. časovnega zapisa se v frekvenčni domeni imenuje **spekter** ("spectrum").

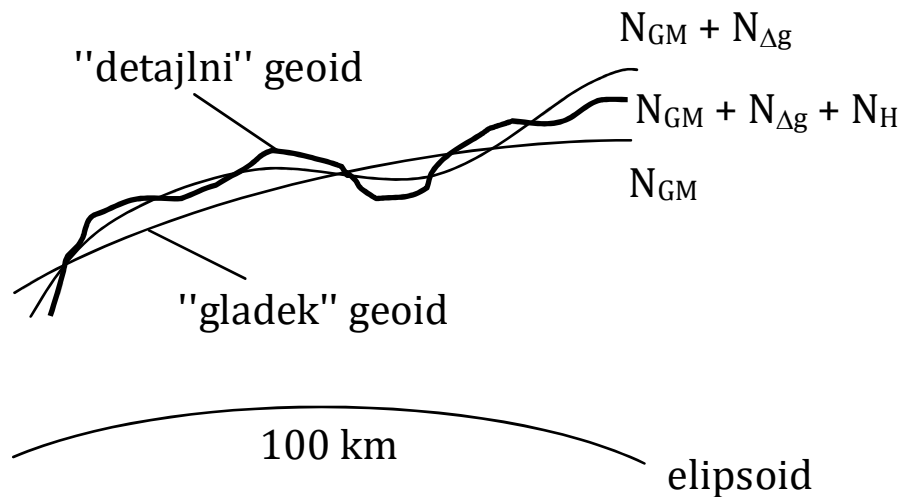
## Spekter težnostnega polja Zemlje (1)

---

- ✘ V našem primeru obravnavamo geoid (globalni) kot popolni spekter težnostnega polja Zemlje, ki ga lahko razčlenimo na **štiri frekvenčne dele**: nizki, srednji, visoki (in zelo visoki).
- ✘ Tako so tudi podatki razdeljeni glede na to, kakšen vpliv imajo na celotno geoidno višino (celotni spekter težnostnega polja Zemlje).
  - + Terminologijo smo si sposodili iz teorije digitalne obdelave signalov, zato se tudi iskana geoidna višina obravnava kot signal.

## Spekter težnostnega polja Zemlje (2)

- ✘ Prispevek posameznih vrst podatkov k **spektru težnostnega polja Zemlje**:



## Dinamične satelitske metode (1)

- ✘ S sledenjem pravilnosti tirov gibanja satelitov, ki krožijo okoli Zemlje na nižjih višinah, je možno določiti model za zemeljski gravitacijski potencial.

$$N = \left( \frac{GM}{a_e \gamma} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda)$$

- ✘ kjer so  $\Delta C$  in  $\Delta S$  koeficienti razvoja.
- ✘ Koeficiente razvoja lahko določimo na različne načine:
  - + z izključno satelitskimi opazovanji, ali v kombinaciji s podatki satelitske altimetrije in gravimetrične izmere (anomalije težnosti). Pri tem se uporablja metoda skupne izravnave oz. metoda integralnih enačb.

# Dinamične satelitske metode (2)

- ✘ Na določitev koeficientov vpliva predvsem člen  $(a_e/r)^{n+1}$ . Zaradi višine tirov gibanja satelitov je  $r > 600$  km in z naraščanjem  $n$  je člen vse manjši.
- ✘ Z kombinacijo različnih podatkov je možno določiti višje koeficiente razvoja, v tem trenutku vse tja do reda  $n=2190$  (EGM2008).
- ✘ Globalni geopotencialni modeli (terestr. podatki tudi z območja SLO):
  - + EGM96 (Earth Gravitational Model 1996);
  - + EGM08 (Earth Gravitational Model 2008).

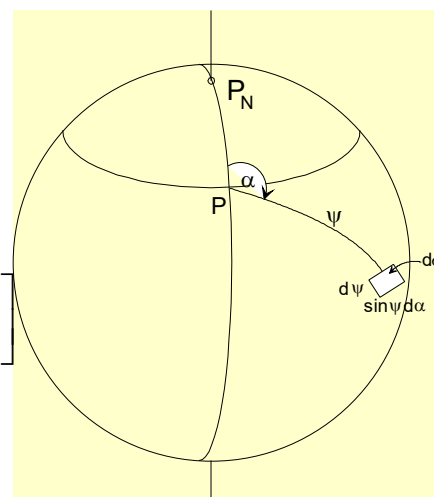
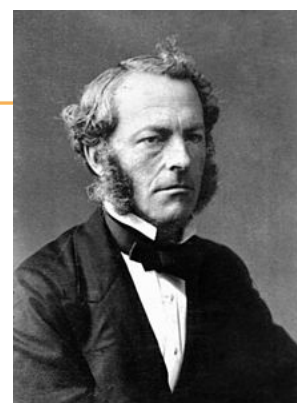
## Gravimetrična metoda

- ✘ Določanje ploskve geoida s pomočjo gravimetričnih podatkov predstavlja matematično reševanje problema geodetskega robnega pogoja.
- ✘ George Gabriel Stokes (l. 1849) - Stokesova enačba:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma$$

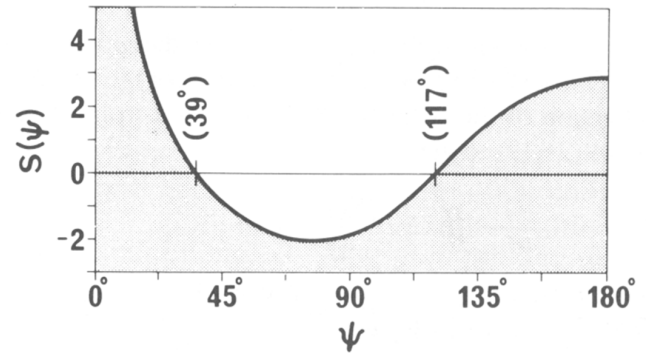
- ✘ kjer je  $\psi$  sferna razdalja med ploščinskim elementom  $d\sigma$  in točko izračuna P.  $R$  je radij krogle na kateri se točka nahaja,  $\gamma$  je normalna težnost na krogli.  $S(\psi)$  je Stokesova funkcija:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi \ln \left[ \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right]$$



## Gravimetrična metoda (2)

- ✘ Stokesova funkcija  $S(\psi)$  je odvisna samo od sferne razdalje  $\psi$  med točko izračuna  $P$  in ploščinskim elementom  $d\sigma$ . Lahko jo obravnavamo kot "utež" k anomaliji težnosti (moteči težnosti).



- ✘ Integracija v enačbi velja za celotno območje Zemlje. Zahteva je torej, da so znane vrednosti anomalij (motečih  $t.$ ) v celotnem območju integracije oz. v vsaki točki geoida (površja Zemlje).
- ✘ Rešitev enačbe otežujejo v praksi nekateri pogoji: vrednosti  $\Delta g$  so podane na geoidu; geoid je krogla (s polmerom  $R$ ); zunaj geoida ni motečih mas (atmosfera in topografija). Vse naštetje pogoje lahko upoštevamo z uvedbo ustreznih popravkov oz. z ustrezno redukcijo merskih podatkov.

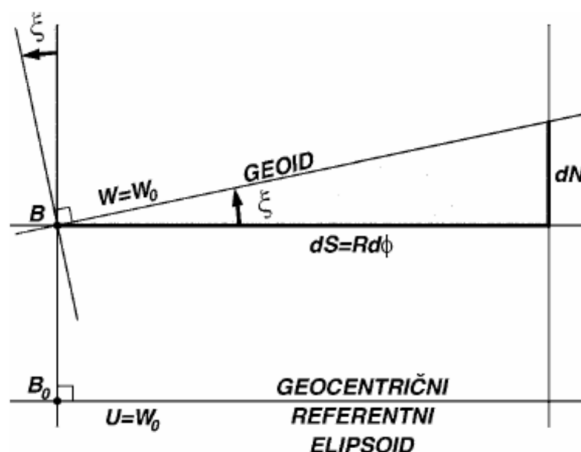
## Gravimetrična metoda (3)

- ✘ Pristop k rešitvi geodetskega robnega pogoja po Molodenskem je drugačen. Tu namesto  $\Delta g$  na geoidu upoštevamo vrednosti moteče težnosti  $\delta g$  na zemeljskem površju. Rezultat integracije so, namesto geoidnih višin, ustrezne "kvazigeoidne" oz. anomalije višine  $\zeta$ .
- ✘ Pri praktičnem računanju se Stokesov integral računa z eno od metod numerične integracije, ali pa s pomočjo hitre Fourierove transformacije (FFT). Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo kolokacije po metodi najmanjših kvadratov.

# Astrogeodetska metoda (1)

- ✘ Odklon navpičnice je dejansko naklon geoidne ravnine glede na elipsoid v točki obravnave. V smeri meridiana in prvega vertikalala je zveza naslednja (odvajamo na geoidu):

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\phi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi}, \quad \eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}$$



$R$  je tukaj srednji polmer Zemlje. Za pravilno ovrednotenje zgornjih enačb moramo poznati odklone na geoidu, torej moramo izmerjene astronomske koordinate reducirati na geoid za vpliv ukrivljenosti težiščnice. Negativni znak je skladno z dogovorom o predznakih komponent odklona.

Identična enačba povezuje komponente odklona po Molodenskem in kvazigeoidno višino  $\zeta$ , s to razliko, da so odvodi določeni na površju Zemlje.

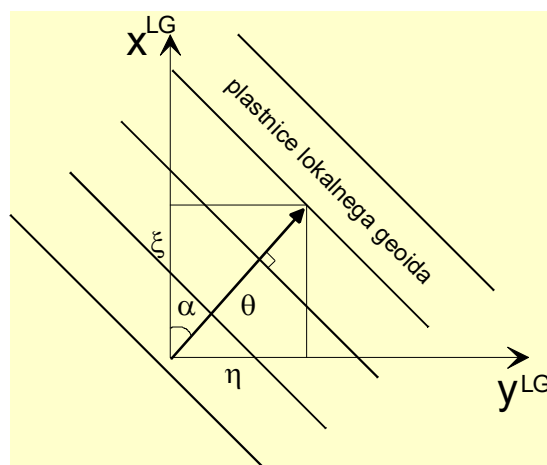
# Astrogeodetska metoda (2)

- ✘ Z uvedbo Brunsove enačbe dobimo zvezo med motečim potencialom in komponentami odklona navpičnice:

$$\xi = \frac{T}{R\gamma_0^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \phi} - \frac{1}{R\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \phi}, \quad \eta = -\frac{1}{R\gamma_0 \cos \phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

- ✘ Če zanemarimo vpliv ukrivljenosti težiščnice vidimo, da nam astron. geografske koord.  $(\Phi, \Lambda)$  ter geodetske koordinate  $(\phi, \lambda)$  v neki točki zemeljske površine dajo vse osnovne informacije o nagibu ploskve geoida v tej točki:

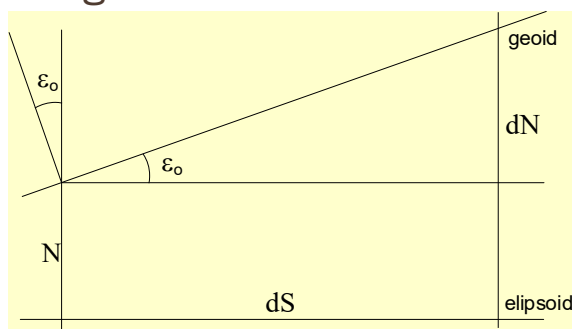
- + smer odklona navpičnice sovпада s smerjo največjega naklona (gradienta) geoidne ploskve;
- + velikost odklona ustreza samemu gradientu.



# Astronomski nivelman

- ✗ Iz izmerjenih komponent odklona lahko pridobimo vrednosti razlik geoidnih višin. **Helmertova enačba** daje zvezo med odklonom navpičnice  $\varepsilon_0$  na geoidu in prirastkom geoidne višine  $dN$  na odseku razdalje  $dS$ :

$$+ dN = -\varepsilon_0 dS.$$



- ✗ Z integracijo zgornje enačbe je možno določiti potek ploskve geoida med dvema točkama:

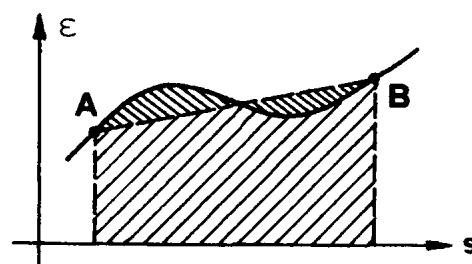
$$\Delta N_{12} = N_2 - N_1 = -\int_1^2 \varepsilon_0 dS = -\int_1^2 (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) dS$$

## Astronomski nivelman - geoidni profil

- ✗ Če odklone  $\varepsilon_0$  prikažemo grafično kot funkcije poti (razdalje  $S$ ), ustreza vrednost integrala ploščini pod krivuljo  $\varepsilon_0 = f(S)$ .

- ✗ Geoidni profil med dvema točkama:

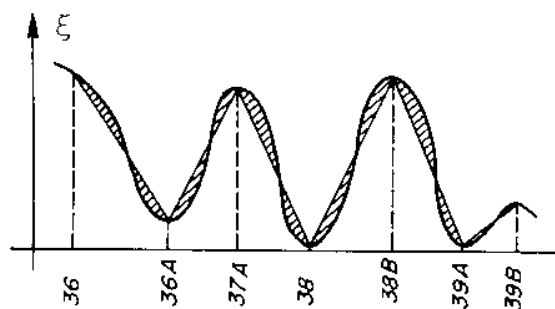
$$+ \Delta N_{AB} = -\frac{1}{2} (\varepsilon_A + \varepsilon_B) \Delta s$$



- ✗ Geoidni profil med dvema danima točkama lahko aproksimiramo s premico.

- ✗ V primeru, da je ploščina trapeza enaka ploščini pod krivuljo, je aproksimirana geoidna višinska enaka točnemu izrazu z integralom.

- ✗ Če so točke na profilu izbrane tako, da nam tetiva v najboljši možni meri aproksimira potek geoidne ploskve, se vpliv sistematičnih pogreškov izniči, saj so te porazdeljene enakomerno pozitivno in negativno.



# Astronomski nivelman - računanje v mreži

- ✘ Posamezne razlike geoidnih višin med točkami izračunamo:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2\rho''} [(\xi_i + \xi_k)(\phi_k - \phi_i)M + (\eta_i + \eta_k)(\lambda_k - \lambda_i)N \cos \phi_m]$$

lahko računamo v ravnini kartografske projekcije ( $y = e$ , oz.  $x = n$ ):

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2\rho''} [(\xi_i + \xi_k)(x_k - x_i) + (\eta_i + \eta_k)(y_k - y_i)]$$

- ✘ Če privzamemo geoidno višino ene točke kot dano, lahko izravnamo razlike geoidnih višin v mreži:

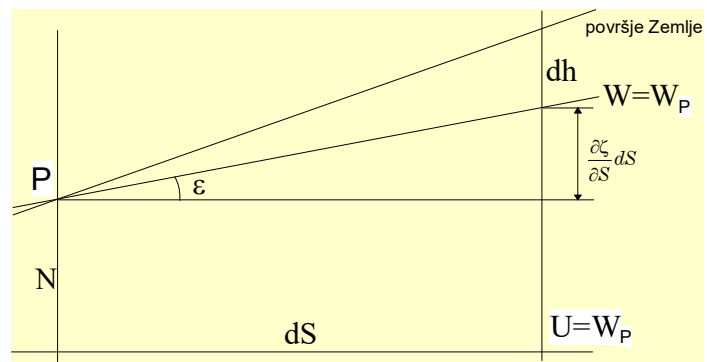
+ enačba opazovanj:  $\Delta N_{ik} = N_k - N_i$ ,

+ enačba popravkov:  $v_{ik} + \delta N_i - \delta N_k = N_k^0 - N_i^0 - \Delta N_{ik}$ .

## Astronomski nivelman po Molodenskem

- ✘ Helmertova enačba za astronomski nivelman se v primeru kvazigeoida in anomalij višin glasi:

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial S} dS + \frac{\partial \zeta}{\partial h} dh$$



- ✘ Zemljino površje ni nivojska ploskev, zato imamo v enačbi poleg horizontalnega člena še višinski člen. Prisoten je zaradi spremembe višine med točkama in je običajno manjši od horizontalnega člena.

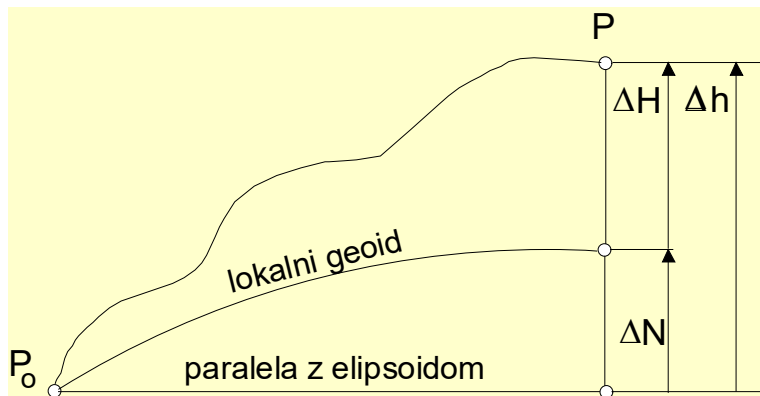
# Geometrijska satelitska metoda

- ✘ Znana tudi kot metoda **satelitsko določenih koordinat** točk na Zemlji. V točkah z opravljenimi meritvami GNSS lahko določimo nadmorsko višino:

$$N = h - H$$
$$(\zeta = h - H^N)$$

- ✘ Zveza se lahko predstavi tudi v obliki razlik višin:

$$\Delta N = \Delta h - \Delta H$$



## Lokalni geoid

- ✘ Na manjšem območju lahko potek lokalne geoidne ploskve predstavimo z regresijsko ploskvijo:

$$N = N(y, x) \text{ oz. } N = N(e, n)$$

- ✘ spremenljivki  $y$  in  $x$  sta ravninski koordinati točk v mreži. Običajno se koordinate podajajo v lokalnem koordinatnem sistemu (lahko tudi v državnem koord. sistem).
- ✘ Funkcija  $N(y, x)$  predstavlja regresijsko (interpolacijsko) ploskev, določeno s številom točk z znanimi geoidnimi višinami.
- ✘ Primer, ravnina:

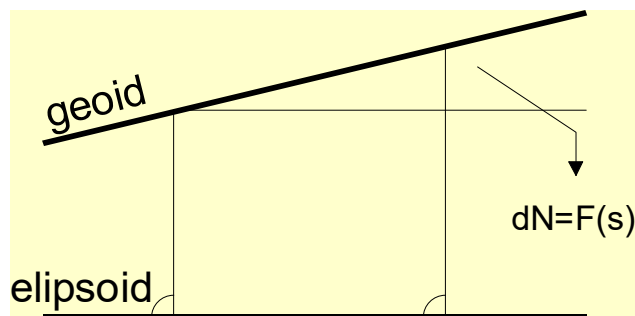
$$N(y, x) = C + Ay + Bx$$

- ✘ Če se spremenljivki  $y, x$  nanašata na težišče mreže, imajo koeficienti polinoma ustrezno geometrijsko pojasnitev.

# Lokalni geoid - ravnina

$$N(y,x) = C + Ay + Bx$$

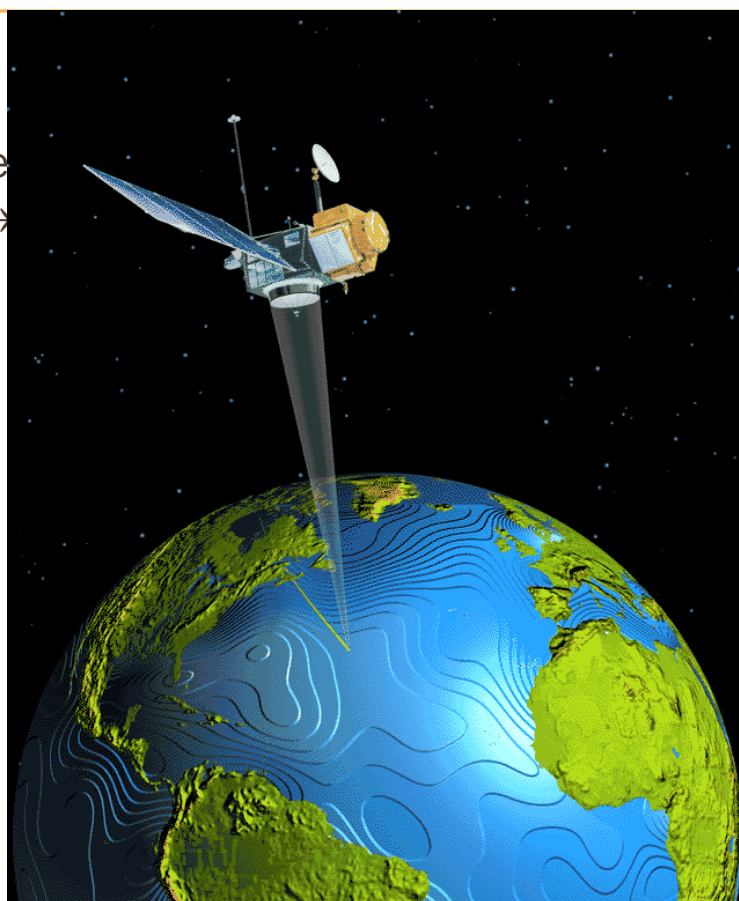
- ✘ Koeficient C predstavlja vzporedni odmik elipsoida od geoida.
- ✘ Linearna člena polinoma s koeficientoma A in B predstavljata razliko naklona tangentne ravnine na elipsoid in ustrezne geoidne ploskve v težiščni točki, in to v smeri koordinatnih smeri (A naklon vzhod – zahod, B naklon sever – jug).
- ✘ Smerni kot, ki ga določata koeficienta A in B, nam poda tudi smer največjega naklona ploskve lokalnega geoida.
- ✘ Če se omejimo samo na tri linearne člene predpostavimo, da imata obe ploskvi enako ukrivljenost, vendar sta medsebojno nagnjeni pod določenim kotom.



- ✘ Če obstaja večje število **danih višinskih točk**, je možno izračunati predoločeno rešitev s pomočjo metode najmanjših kvadratov.

# Satelitska altimetrija

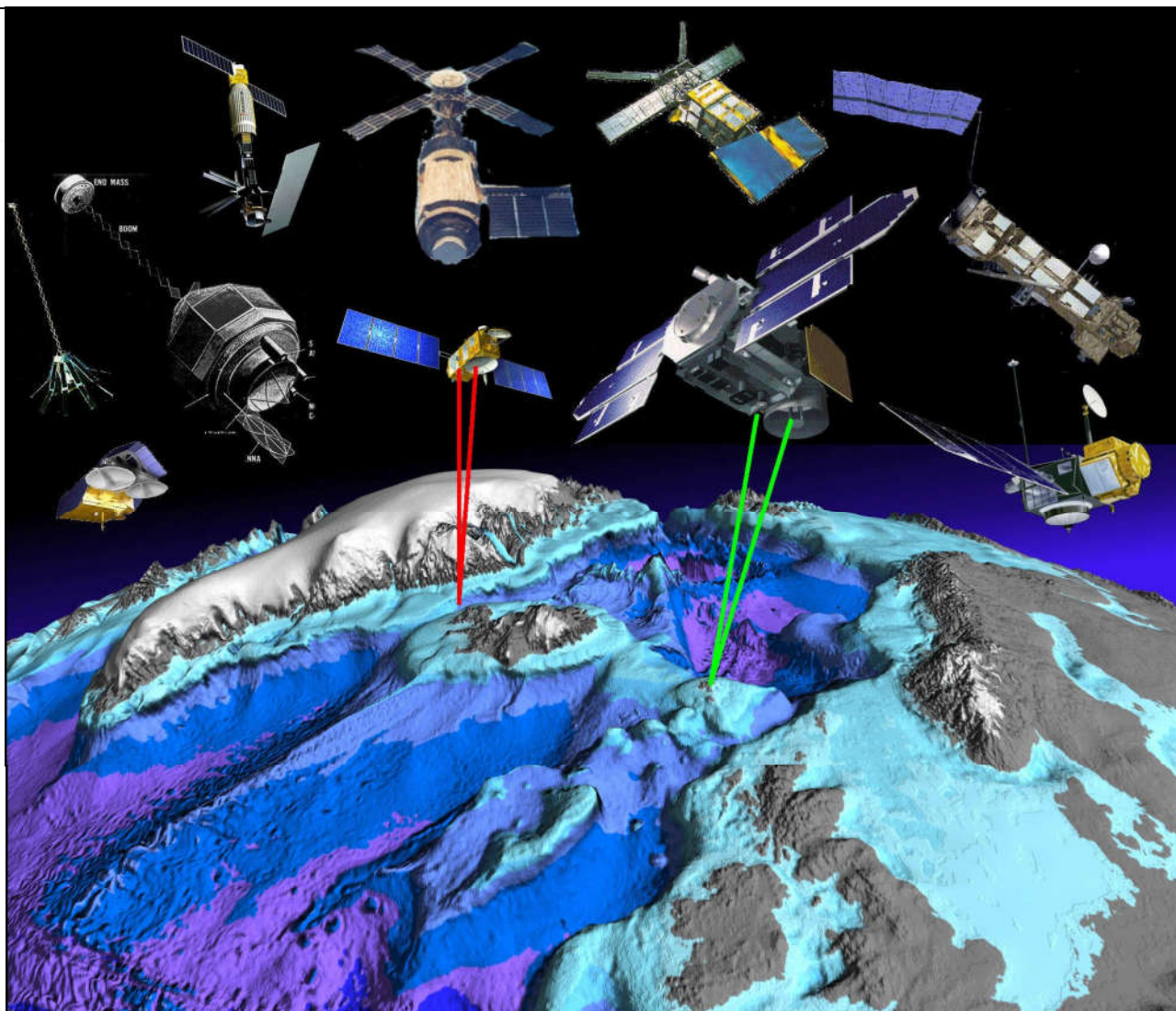
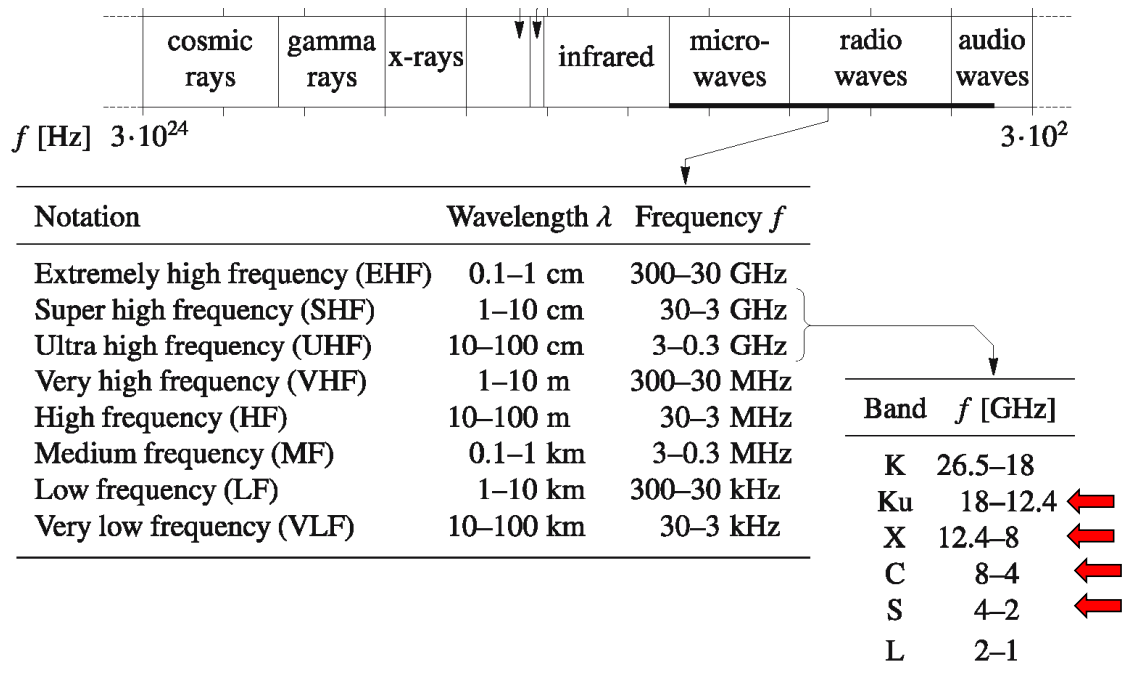
- ✘ Tehnika satelitske geodezije, ki omogoča določitev srednje morske gladine nad oceanskimi območji → geoid na morju.
- ✘ Razvoj začel v 60-tih letih in še vedno traja.



# Frekvenčni pas

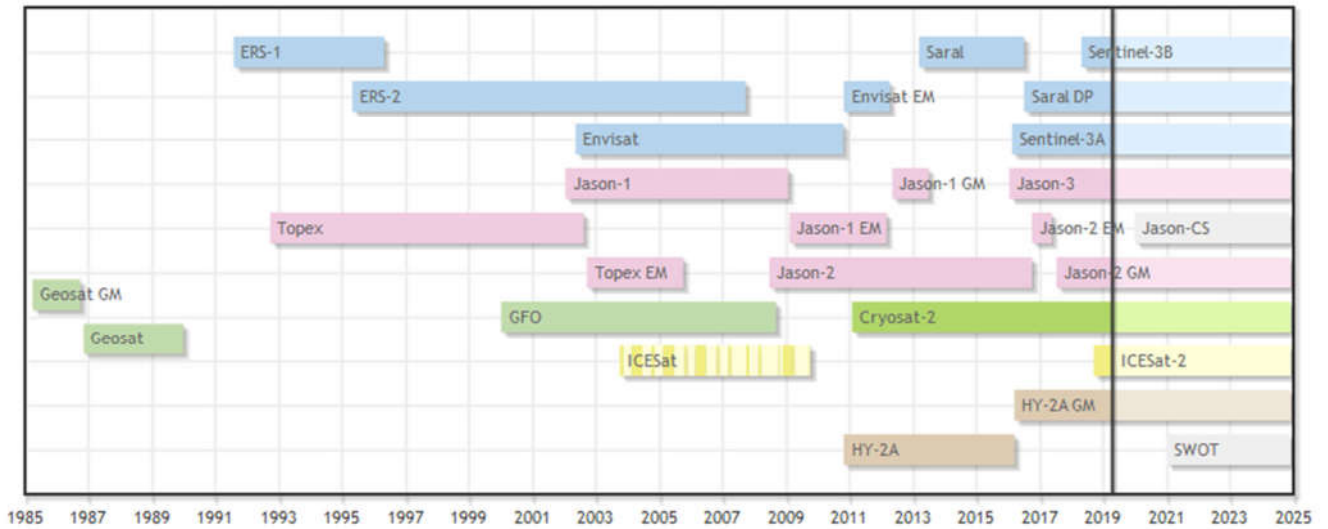
## ✘ Mikrometrsko področje EMV (2 - 18 GHz):

- + fr. pas omogoča lažje ločevanje odboja signala od naravnega sevanja morske gladine.



# Misije sat. altimetrije

## Missions



27

Mission	Operational	accuracy	cycle/d	altitude/km
Skylab	1973 9 month	100 m		435
GEOS-3	1975-1978	1-2 m	30 days	840
SEASAT	1978 3 month	10 cm		762
GEOSAT	1986-90	5 cm		800
Topex/Poseidon	1992 - present	< 5 cm	9,9	1337
ERS-1	1991 - 2000	5 cm	35, 163	780
ERS-2	1995 - 2003	5 cm	35	780
GFO-1	1998 - present	5 cm		800
Jason-1	Dec 2001 - pres.	< 5 cm	9,9	1337
ENVISAT	Mar 2002 - pres.	< 5 cm	35	796
Cryosat	Sep 2004		369	720
MGS Mars	1996-2000	2-30 m		378
ICESat Earth	Jan 2003 - present	< 10 cm	8, 91	600
SELENE Moon	Sep 2004	5 m		100 km

# Izvor signala radar ali laser?

## ✘ Radarska altimetrija:

- + velikost odtisa 2 - 20 km,
- + vertikalna natančnost < 5 cm,
- + neodvisnost od vremena,
- + robustna tehnologija,
- + dolgo delujoča,
- + deluje na večini alt. misij,
- + odboj od vode in ledu.

## ✘ Laserska altimetrija:

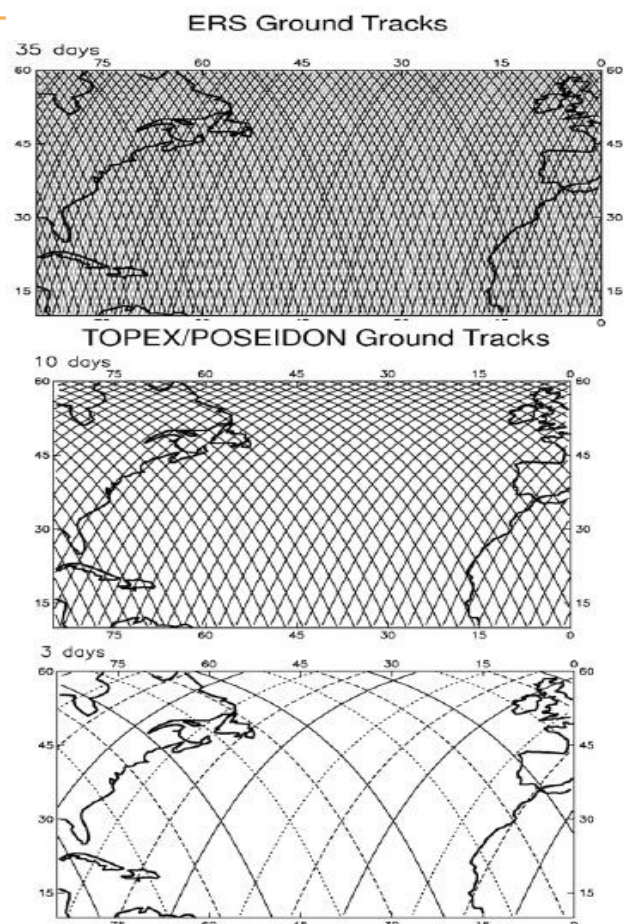
- + velikost odtisa 40 - 70 m,
- + vertikalna natančnost < 10 cm,
- + odvisnost od vremena (oblaki),
- + energetsko potratna tehnologija, ni robustna,
- + za kratke misije,
- + deluje na ICESat, Mars Explorer, SELENE,
- + odboj od vode, ledu, tal.

29

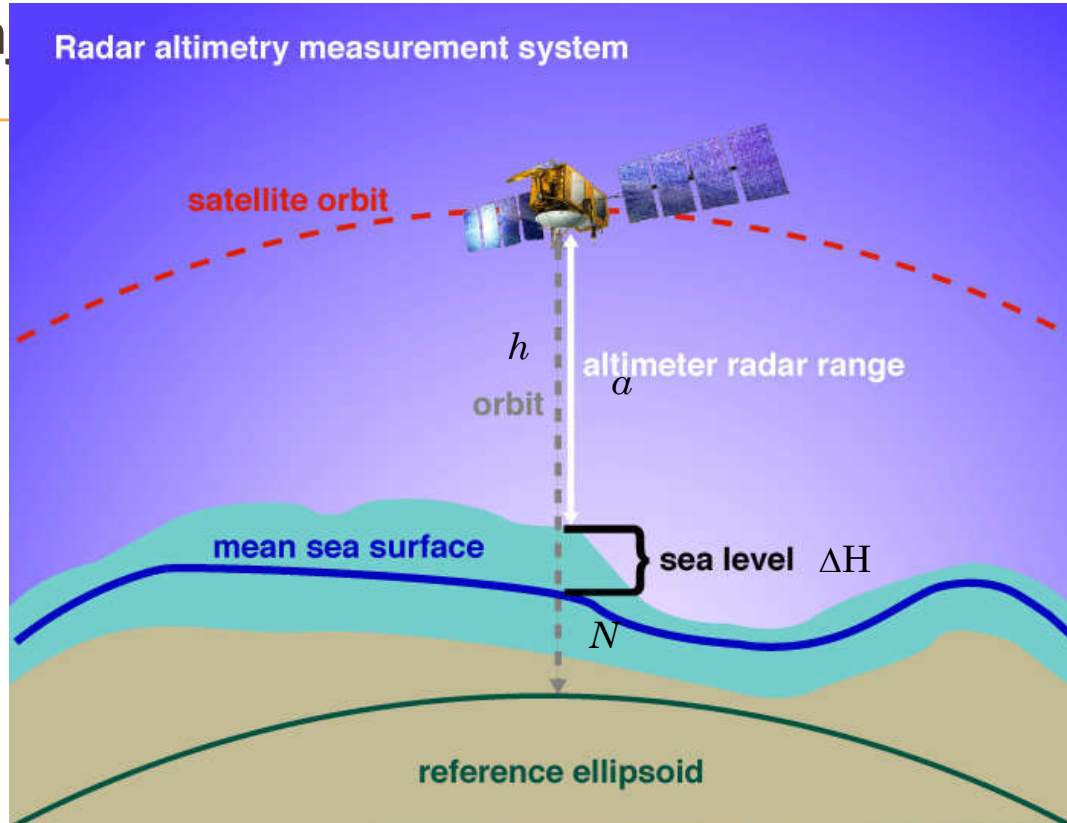
## Projekcije tirnic

### ✘ Kompromis med prostorsko in časovno ločljivostjo:

- + raziskave statičnih pojavov terjajo dobro prostorsko ločljivost (anomalije težnosti na morju);
- + raziskave dinamičnih pojavov terjajo dobro časovno ločljivost (oceanski, morski tokovi).



# Princip merjenja



višina satelita nad srednjo trenutno morskó gladino ( $a$ );

višina satelita nad elipsoidom ( $h$ );

razlika med srednjo morskó gladino (MSSH) in geoidno višino  $N$  je SST.

## Podrobneje

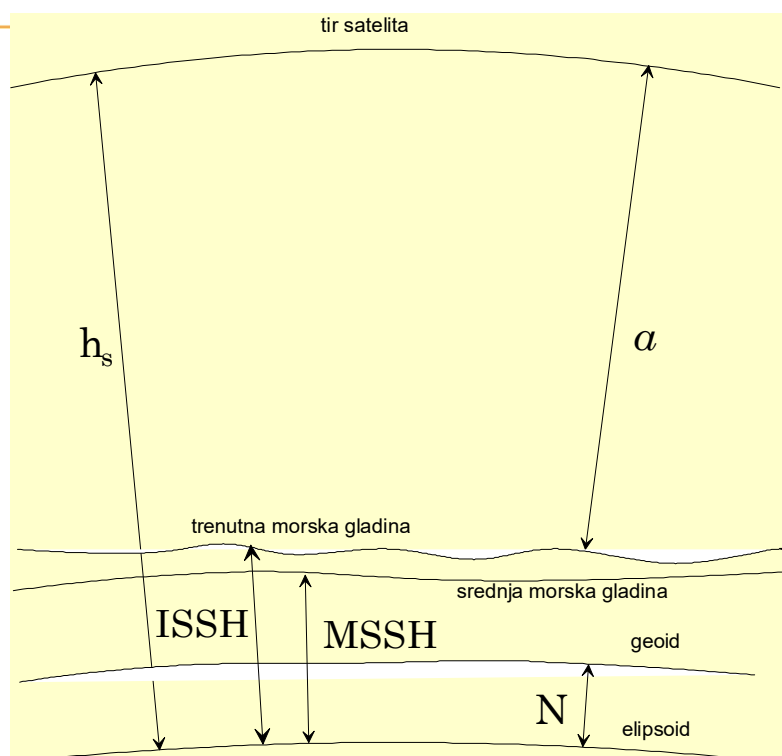
$$h_s = N + ISSH + \Delta H + a$$

$$MSSH = ISSH + \Delta H$$

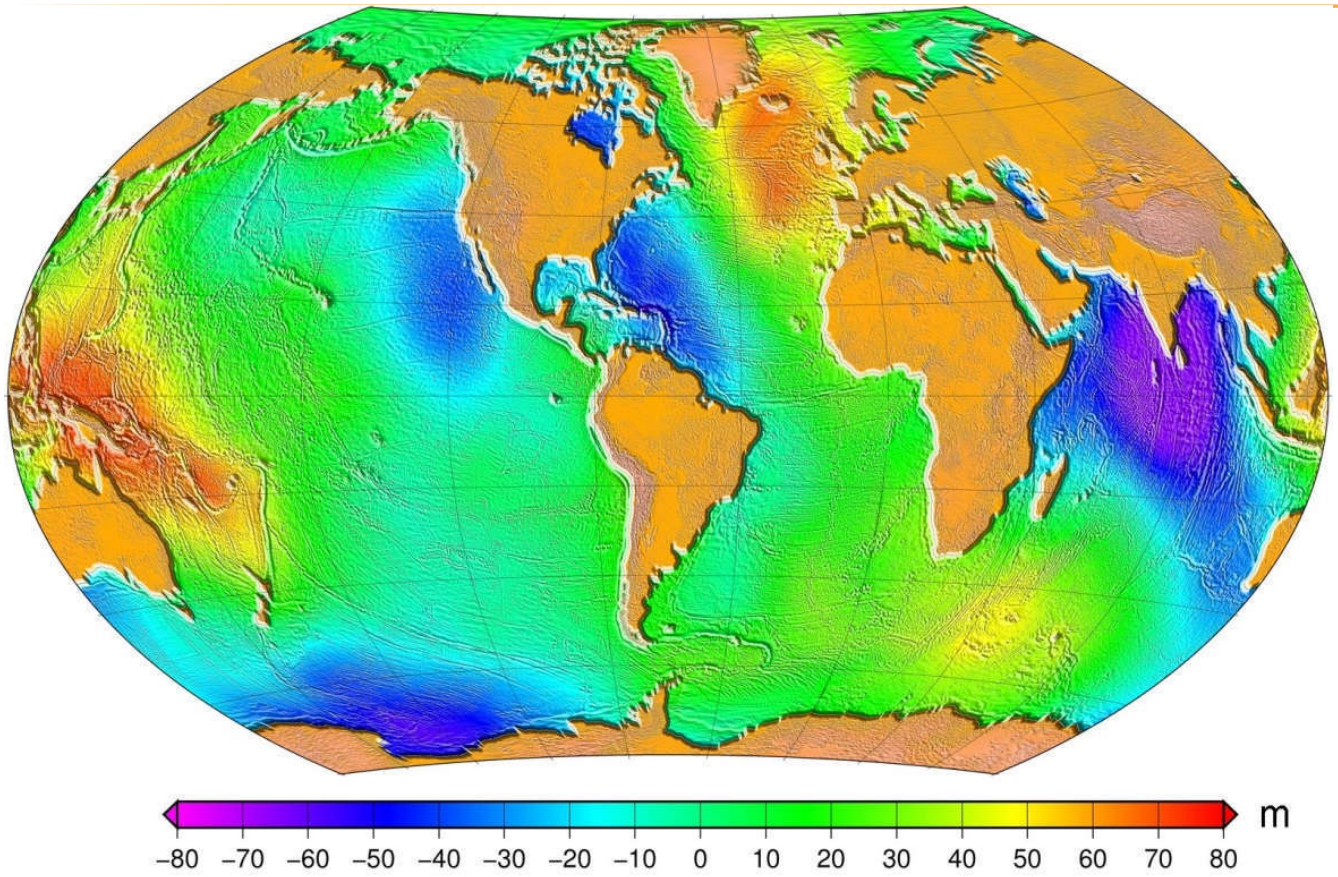
$\Delta H = \text{DOT}$  ("Dynamic Ocean Topography")

$\Delta H = \Delta H_{\text{plim}} + \Delta H_{\text{atm}} + \dots$

$$SST = MSSH - N$$

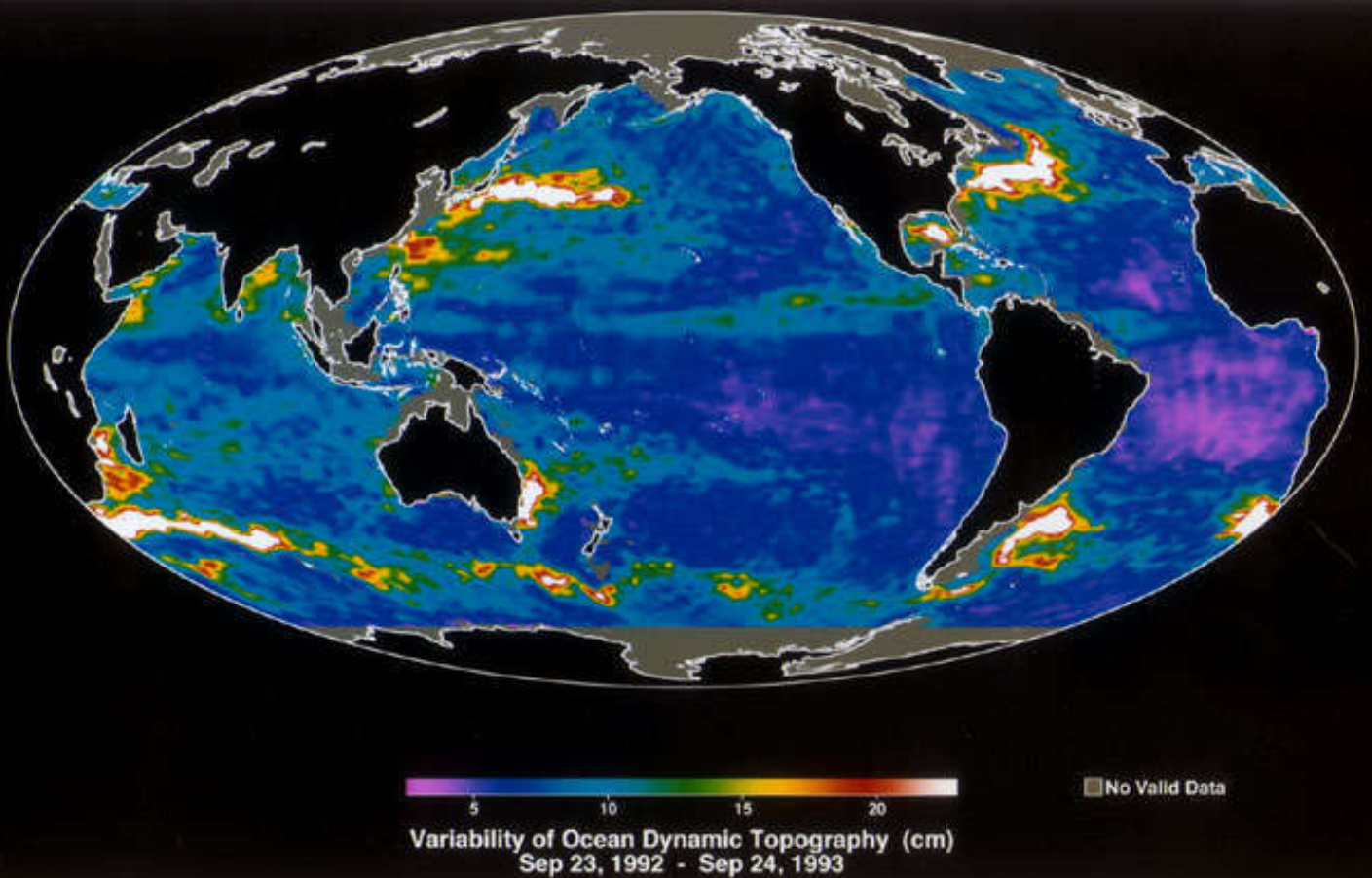


# Mean Sea Surface (2011)



33

# MDT - Mean Dynamic Topography, (sprememba SST)



# Zaključek - pomen določanja geoida

---

- ✘ Določanje geometrije površine Zemlje.
- ✘ Redukcija terestričnih geodetskih meritev na elipsoid.
  - + Popravek, ki ga moramo upoštevati pri redukciji dolžine  $S$  (dolžine reducirano na ničelno nivojsko ploskev) na elipsoidno ploskev:

$$\delta S = -\frac{N}{R} S$$

Splošno velja, da neupoštevanje vsakih 6,0 m geoidne višine povzroči relativni sistematični pogrešek velikosti 1 ppm ( $1 \times 10^{-6}$ ), reducirane elipsoidne dolžine.

- ✘ Višinski datum za geodetsko izmero.
- ✘ Povezava terestrične izmere z meritvami opravljenimi s satelitskimi merskimi tehnikami  $\Rightarrow$  transformacija koordinat.
- ✘ GNSS-višinomerstvo.
- ✘ Raziskave v geodinamiki in geofiziki.
- ✘ Oceanografske raziskave.