Fizična geodezija po GPS

Helmut Moritz*

Povzetek

GPS tehnologija omogoča geometrično določanje topografske površine Zemlje. To bistveno spreminja geodetski robni problem: namesto prostega robnega problema imamo sedaj fiksen robni problem. Presenetljivo pri tem je, da za njegovo reševanje lahko uporabimo klasične računske formule po Molodenskem in drugih brez vsakršnih sprememb.

Abstract

GPS permits the geometrical determination of the topographic earth surface. The geodetic–gravimetric boundary value problem thus changes its nature fundamentally: from a free boundary–value problem it becomes a fixed boundary–value problem. Thus it is very surprising that the classical series solution of Molodensky and others can be applied without change.

A. Praktičen pomen fizične geodezije v zvezi z GPS-om

Fizična geodezija se ukvarja z določanjem Zemljinega gravitacijskega polja. Predvsem gre za določitev ploskve geoida in odklonov navpičnice.

GPS (Global Positioning System) je najpomembnejša metoda za določitev položaja točk na Zemljini površini. S to metodo hitro in natančno določamo geocentrične koordinate, ki se nanašajo na referenčni elipsoid (Hofmann-Wellenhof et al 1994). To koordinate so:

- elipsoidna širina ϕ,
- elipsoidna dolžina λ,
- elipsoidna višina h.

Horizontalni koordinati ϕ in λ ne povzročata težav, ker se njuna definicija ujema z navadno geodetsko definicijo. Iz ϕ in λ lahko izračunamo ravninske, pravokotne (Gauss-Krügerjeve) koordinate x, y.

Vertikalna koordinata h pa je problematična, saj predstavlja višino *nad elipsoidom*, ki nima neposredne fizične interpretacije in ni kompatibilna z navadnimi ortometričnimi ali nadmorskimi višinami H (višine *nad geoidom*). Ortometrične (grška beseda: "pravilno merjene") višine imajo naraven pomen, ker geoid in ne elipsoid nastopa v naravi. Na primer, višine GPS niso primerne za uporabo v hidrotehniki.

Osnovna enačba višin

Osnovna formula za terestrične višine je $h = H + N$ ali

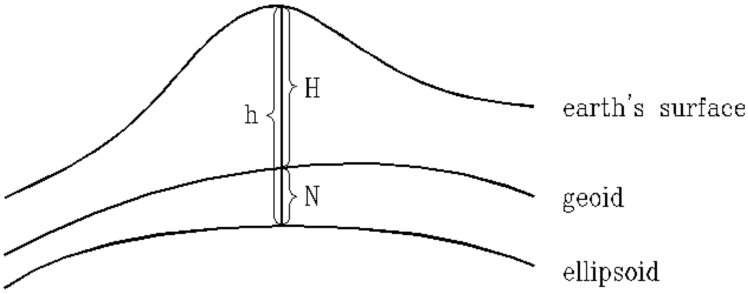
$$H - h + N = 0 \tag{1}$$

kjer so:

h .... višina nad elipsoidom ali elipsoidna višina (iz GPS-a),
H .... višina nad geoidom ali ortometrična (nadmorska) višina (iz nivelimana),
N .... višina geoida nad elipsoidom (geoidna višina), (glej sliko 1)

* o.Prof.Dr.techn.Dr.-Ing.E.h.Dr.h.c. Helmut Moritz, D.Sc.h.c., TU Graz, Avstrija

Formula (1) je izredno preprosta, vendar ima zelo pomembne posledice.



Slika 1 - Osnovne višine

Določanje geoida

Če poznamo ortometrično višino H in merimo elipsoidno višino h z GPS-om, sledi:

$$N = h - H \tag{2}$$

Tako dobimo odlično metodo za določanje geoida. Na goratem področju, se ne more uporabiti izključno ta metoda zaradi znanih težav pri niveliranju. Toda na ta način lahko določimo N v nekaterih opornih točkah, kjer imamo nivelman, in sicer za podporo in orientacijo astrogeodetskih ali gravimetričnih lokalnih geoidov. Za ta namen je verjetno najboljša metoda.

Ortometrične višine iz GPS-a

Da, to je mogoče in je ena od najbolj perspektivnih uporab GPS-a. Enačbo (1) napišemo v obliki

$$H = h - N \tag{3}$$

če merimo h z GPS-om in poznamo višino N geoida nad elipsoidom, dobimo nadmorsko višino H brez nivelmana, ki je najpočasnejša in najbolj dolgočasna merska metoda v geodeziji. Če želimo dobiti natančnost 1 cm višinske razlike ΔH, moramo meriti Δh in poznati ΔN vsaj z enako natančnostjo. Natančne "diferencialne" GPS-meritve so možne, in za ΔN potrebujemo tako imenovani "cm-geoid". V načelu je to tudi mogoče. Zdaj poznamo v Avstriji geoid z natančnostjo nekaj cm. Če bomo imeli "cm-geoid", bo to verjetno najbolj pomembna vloga geoida v geodetski praksi.

Praktičen pomen fizične geodezije

GPS ni odvisen od Zemljinega gravitacijskega polja. Klasične geodetske meritve (razen razdaljemerov) in tudi inercialna geodezija (geodetska verzija dobro znane inercialne navigacije) so odvisne od tega polja. Na srečo je zelo lahko transformirati lokalni "naravni" geoidni sistem, odvisen od naravne navpičnice (vertikale) in horizontale, v elipsoidni

(GPS) sistem in obratno. Imamo tri "transformacijske parametre": geoidno višino N in odklon navpičnice s komponentama ξ in η

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \phi \\ \eta &= (\Lambda - \lambda)\cos\phi \\ N &= h - H \end{aligned} \tag{4}$$

Tretja enačba ni nič drugega kot naša osnovna formula (1). Prva in druga enačba izražata ξ in η kot razliki astronomsko merjenih količin Φ (širina) in Λ (dolžina) in ustreznih geodetskih količin, določenih z GPS-om.

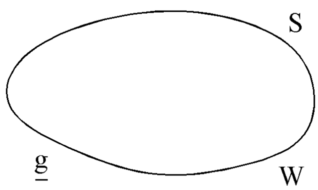
Torej je prehod od "naravnega" (Φ,Λ,H) do "geodetskega" (ϕ,λ,h) sistema zelo enostaven. Kot smo videli, je takšen prehod predvsem pomemben za računanje višin. Pod posebnimi pogoji so pomembni tudi odkloni navpičnice, na primer za merjenje tunelov v visokogorju. Gerard Lachapelle je imel takšne probleme pri merjenju železniškega tunela skozi Rocky Mountains v Kanadi; ta tunel ima dolžino 15 km (Lachapelle et al., 1984)!

Kakorkoli, ni mogoče uporabljati GPS v tunelih, ker tam ne vidimo satelitov. GPS se ustavlja pred vrati tunela. V notranjosti moramo uporabljati klasične metode, v prihodnosti verjetno inercialno geodezijo. V obeh primerih je potreben prehod po enačbi (3).

B. Teoretična vprašanja u zvezi z teorijo Molodenskega
Robni Problem Molodenskega (RP1)

V geodetski teoriji je splošno znan problem Molodenskega: določanje topografske površine Zemlje in njenega gravitacijskega polja iz naslednjih geodetskih podatkov: sile težnosti in gepotenciala ki se določa s pomočjo nivelmana. To je precej zapletena teorija, vendar obstajajo dobre praktične rešitve. V matematični terminologiji je to *robni problem* (RP), ki ga lahko formuliramo na sledeči način.

Na topografski površini S poznamo vektor težnosti $\underline{g}$ in geopotencial W (slika 2). Površina (ploskev) S je *neznana* ("prosta"), in jo moramo določiti.



Slika 2 - Topografska površina S, vektor težnosti $\underline{g}$ in geopotencial W

Osnovna enačba izraža $\underline{g}$ s pomočjo S in W:

$$\underline{g} = f(S, W) \tag{5}$$

Ta relacija izraža znano dejstvo, da če poznamo S in W na površini S, sta zunanji potencial W in s tem vektor težnosti $\underline{g}$ kot gradient potenciala:

$$\underline{g} = \mathrm{grad}W \tag{6}$$

določena z rešitvijo problema Dirichleta.

Najtežavnejši problem je reševanje enačbe (5) za izračun S, simbolično:

$$S = F(\underline{g}, W) \tag{7}$$

To res ni trivialno, ker je f težaven nelinearen operator. Zato je reševanje enačbe (5) v obliki (7) težaven primer nelinearne funkcionalne analize, "trdi inverzni problem", kot ga je poimenoval L. Hörmander (Moritz, 1980, pog. 40 in 51).

V praksi ta problem lineariziramo in ga rešujemo z razvojem v vrsto Molodenskega in drugih (Moritz, 1980, str. 41 - 46).

Moderni Robni Problem (RP2)

Tu lahko štejemo površino (ploskev) S za *znano* (s pomočjo GPS-a) in če poznamo tudi težnost g, (to je norma tega vektorja), lahko neposredno izračunamo zunanji geopotencial W (Koch, 1971). RP2 je "vezan" (S je znana), medtem ko je RP1 "prost" (S je neznana).

Torej vidimo, da je moderni robni problem RP2 (s pomočjo GPS-a) bistveno bolj enostaven kot problem Molodenskega RP1.

Linearizacija

Linearizirana verzija teh robnih problemov je zelo enostavna.

RP1 (Molodenski)

Na osnovi ploskve S in referenčnega elipsoida E lahko definiramo pomožno ploskev Σ, če zahtevamo

$$U(Q) = W(P) \tag{8}$$

Točka Q in njena višina H^*, tako imenovana "normalna višina", sta znani, če poznamo W, in če definiramo elipsoidno normalno težnostno polje z normalnim potencialem U.

Potem poznamo *težnostno anomalijo* (anomalijo težnosti):

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) \tag{9}$$

kjer je $\gamma(Q)$ normalna težnost v točki Q. Težnostna anomalija se uporablja za izračun *višinske anomalije* (anomalije višin) ζ, ki podaja GEOMETRIJO topografske površine (ploskve) S, ker je višina nad elipsoidom h podana:

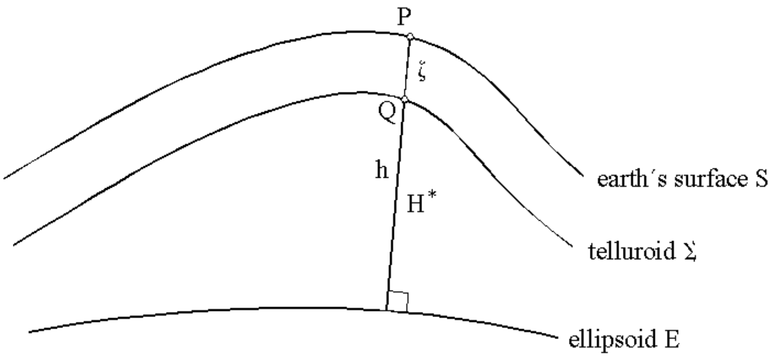
$$h = H^* + \zeta \tag{10}$$

in FIZIKO gravitacijskega polja, ker

$$T = \gamma\zeta \tag{11}$$

in

$$W = U + T \tag{12}$$



Slika 3 - Topografska površina, teluroid in elipsoid

Tako izračunamo geopotencial *W* ne samo na površini (ploskvi) *S,* ampak tudi v zunanjem prostoru.

Če bi bila *S* nivojska ploskev, kot je geoid, bi rešitev dobili s pomočjo Stokesove formule:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) \mathrm{d}\sigma \tag{13}$$

kjer je Stokesova funkcija definirana kot

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \tag{14}$$

s pomočjo Legendrevih polinomov $P_n(\cos\psi)$. Ta formula velja za sferno aproksimacijo; R = 6371 km je srednji radij Zemlje in ψ je sferna razdalja med točko izračuna za ζ in točko na katero se nanaša ploščinski element dσ enotske krogle σ. Težnostna anomalija Δg se nanaša na dσ.

Vrsto (14) lahko sumiramo analitično s klasičnim rezultatom:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) \tag{15}$$

RP2 (GPS)

Če je površina *S* znana, teluroid ni potreben. Geodetsko višino *h*, ali višino nad elipsoidom, lahko neposredno določimo z GPS-om tako da, namesto težnostne anomalije (9), lahko uporabimo *težnostno motnjo* (motečo težnost).

$$\delta g = g(P) - \gamma(P) \tag{16}$$

kjer se tudi γ nanaša na P, saj je sedaj ta točka znana.

Ta zveza med T in δg je sedaj dana za poseben primer nivojske ploskve S s Hotine-Kochovo formulo:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta g K(\psi) d\sigma \tag{17}$$

kjer je

$$K(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi) \tag{18}$$

Ti dve formuli sta očitno v tesni povezavi s (13) in (14). Razlika med (14) in (18) je imenovalec: $n + 1$ namesto $n - 1$. (Nato moramo začeti sumirati z $n = 0$ v (18), in ne v (14).) To neposredno sledi iz definicije težnostne motnje v primerjavi z težnostno anomalijo, primerjaj (Heiskanen in Moritz, 1967, enačbe (2-153) in (2-155)).

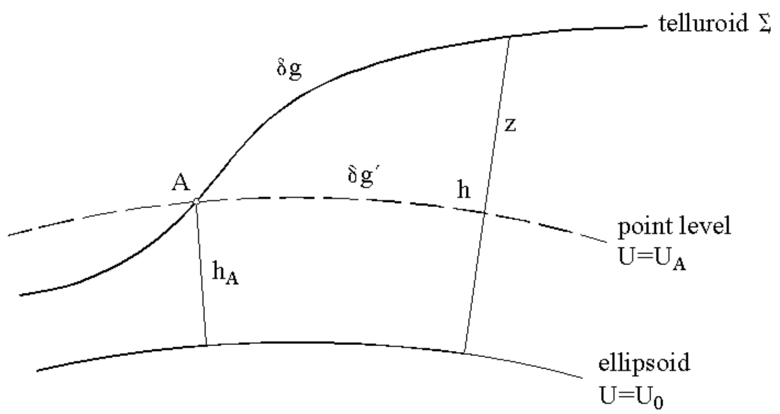
Spet moremo sumirati (18). Rezultat je funkcija Hotine-Kocha

$$K(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - \ln\left(1 + \frac{1}{\sin(\psi/2)}\right) \tag{19}$$

Enačbi (17) in (19) je prvič izpeljal Hotine (1969, str. 311 in 318), njen temeljni pomen za fizično geodezijo v povezavi z GPS-om pa je prvi odkril in analiziral Koch (1970), ki je priznanje izrazil Hotinu.

Vrsta Molodenskega

Prvo rešitev za RP1 je podal Molodenski, ki je reševal integralsko enačbo. Druga rešitev je bila dobljena na "elementaren" način s pomočjo *analitičnega nadaljevanja* s Taylorjevo vrsto. Sam Molodenski je upošteval to možnost že okoli leta 1945, vendar jo je zavrgel, zaradi teoretične težavnosti analitičnega nadaljevenja. To metodo je vnovič odkril Bjerhammar leta 1963. Marich in, neodvisno od njega Moritz sta jo uporabila okoli leta 1969 za odkritje nove vrste Molodenskega tipa. Ta vrsta je popolnoma ekvivalentna rešitvi, ki jo je dobil Molodenski iz integralske enačbe. To je dokazal Pellinen leta 1972. Primerjaj (Moritz, 1980, del D).



Slika 4 - Analitično nadaljevanje na nivo točke

Geometrično situacijo prikazuje slika 4, ki je identična v RP1 in RP2. Res δg ima isto harmonično obnašanje kot Δg, ker sta tako δg kot Δg harmonični funkciji (Heiskanen in Moritz 1967, enačbe (2-153) in (2-155)).

Torej ne pride do nobenih sprememb, če nadomestimo Δg z δg. Iz tega sledi, da lahko enostavno uporabimo naše osnovne enačbe iz knjige (Moritz, 1980, str. 386-387):

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma^0} \iint_\sigma \delta g K(\psi) \mathrm{d}\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{4\pi\gamma^0} \iint_\sigma g_n K(\psi) \mathrm{d}\sigma \tag{20}$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma^0} \iint_\sigma \delta g \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\psi} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \mathrm{d}\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\gamma^0} \iint_\sigma g_n \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\psi} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \mathrm{d}\sigma \tag{21}$$

kjer je γ^0 globalna srednja vrednost, na primer 980 gal. Popravke lahko izračunamo rekurzivno:

$$g_n = -\sum_{r=1}^{n} z^r L_r(g_{n-r}) \tag{22}$$

kjer je

$$g_0 = \delta g \tag{23}$$

in

$$z = h - h_A \tag{24}$$

Za operatorje L_i imamo tudi rekurzivne formule:

$$L_n(f) = \frac{1}{n} L_1[L_{n-1}(f)] \tag{25}$$

$$L_1(f) = \frac{R^2}{2\pi} \iint_\sigma \frac{f - f_P}{l_0^3} \mathrm{d}\sigma \tag{26}$$

Te formule so vse, kar potrebujemo za aproksimacije poljubno visokega reda. Vsi operatorji, ki so tam, so sistematično reducirani na ponovljeno uporabo integrala (26).

Končno konkretiziramo to metodo za n = 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} g_1 &= -zL_1(\delta g) \quad , \\ g_2 &= -zL_1(g_1) - z^2 L_2(\delta g) \quad , \\ g_3 &= -zL_1(g_2) - z^2 L_2(g_1) - z^3 L_3(\delta g) \quad . \end{aligned} \tag{27}$$

če se omejimo na n = 1, sledi:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma^0} \iint_\sigma \left[\delta g - (h - h_A) \frac{\partial \delta g}{\partial h} \right] K(\psi) \mathrm{d}\sigma \tag{28}$$

ker je

$$g_1 = (h - h_A) L_1(\delta g) = -(h - h_A) \frac{\partial \delta g}{\partial z} = -(h - h_A) \frac{\partial \delta g}{\partial h} \tag{29}$$

Operator L_1 lahko interpretiramo kot vetikalni odvod (Heiskanen in Moritz 1967, pog.8-8, in 8-9).

Za numerično izračunavanje primerjaj (Kraiger et al.1987).

Iz ζ dobimo geoidno višino N:

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_B}{\gamma^0} h \tag{30}$$

(Heiskanen in Moritz 1967, str. 8-13). γ^0 pomeni globalno srednjo vrednost (980 ali 981 Gal), Δg_B je Bouguerjeva težnostna anomalija.

Kot smo že videli, N poterbujemo za spreminjanje GPS višine h v nadmorsko višino H, $H = h + N$.

Podobne izraze dobimo za komponente odklona navpičnice ξ in η. Z N, ξ in η lahko spreminjamo geometrične koordinate h, ϕ, λ v fizične koordinate H, Λ, Φ in obratno.

Literatura

Heiskanen W. A., and Moritz H. (1967), Physical Geodesy, W.H. Freeman, San Francisco (reprint available from Section of Physical Geodesy, Steyrergasse 30, A–8010 Graz).

Koch K. R. (1971), Die geodätische Randwertaufgabe bei bekannter Erdoberfläche, Zeitschrift für Vermessungswesen, 96, pp. 218–224.

Kraiger G., Kühtreiber N., Wang Y. M. (1987), The correction terms of the solution of Molodensky's problem by analytical continuation in the central Alps of Austria, in: The Geoid in Austria, Publication of the Austrian Geodetic Commission, IV, Graz.

Lachapelle G., Dennler M., Lethaby L., Cannon E. (1984), Special order geodetic operations for a Canadian Pacific railway tunnel in the Canadian Rockies, The Canadian Surveyor 38 (3), p. 163 -176.

Moritz H. (1980), Advanced Physical Geodesy, Wichmann, Heidelberg (2nd ed. 1990).

Sünkel H. (1983), Geoidbestimmung: Berechnungen an der TU Graz, 2. Teil, in: Das Geoid in Österreich, Publication of the Austrian Geodetic Commission, III, Graz.