

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

Katedra za
matematično
in fizikalno geodezijo
ter navigacijo



Miran Kuhar

FIZIKALNA GEODEZIJA

- študijski pripomoček -

verzija: marec 2020

Predgovor

Zaradi pomanjkanja literature v slovenščini s področja preučevanja težnostnega polja Zemlje, sem poskušal predstaviti večji del snovi, ki se obravnava pri predmetu Fizikalna geodezija (I. letnik) na drugostopenjskem študiju Geodezija in Geoinformatika na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Učni pripomoček ni recenziran, tako da nikakor ni namenjen kot učbenik. Služi naj kot pomoč pri študiju in pripravi na izpit v povezavi z zapiski, ki si jih študent izdelava pri poslušanju predmeta. Za popolnejši pregled in študij naj študent poseže po literaturi, ki je navedena na koncu.

v Ljubljani, marec 2020

Miran Kuhar

Kazalo

Predgovor	1
Kazalo	3
1 Uvod.....	5
1.1 Kratek zgodovinski pregled.....	5
2 Zemlja – planet	8
2.1 Zgradba Zemlje	9
2.2 Dinamična Zemlja – ploščna tektonika.....	11
2.2.1 Geodinamika – geodezija.....	15
3 Težnostno polje Zemlje	18
3.1 Pomen raziskovanja težnostnega polja Zemlje	18
3.1.1 Gravitacijska sila in potencial.....	18
3.1.2 Gravitacijski potencial krogle	23
3.1.3 Lastnosti gravitacijskega potenciala	26
3.1.4 Centrifugalni potencial.....	27
3.1.5 Sila teže, potencial sile teže.....	29
3.2 Geometrija težnostnega polja	31
3.2.1 Nivojske ploskve in težiščnica	31
3.2.2 Ukrivljenost nivojskih ploskev in težiščnice	34
3.2.3 Analitični prikaz nivojskih ploskev	34
3.2.3 Gradient težnosti	38
3.2.4 Sistem naravnih koordinat	39
3.3 Prikaz gravitacijskega potenciala s pomočjo sfernih funkcij.....	41
3.4 Oblika Zemlje	45
3.4.1 Normalno težnostno polje	46
3.5 Časovne spremembe težnostnega polja.....	50
3.6 Anomalijsko težnostno polje Zemlje	51
3.6.1 Odklon navpičnice.....	54
3.6.2 Anomalije težnosti	59
3.6.3 Računanje topografskih odklonov navpičnice in anomalij težnosti.....	62
4 Sistemi višin	65
4.1 Srednja vrednost težnosti vzdolž težiščnice	75
4.2 Morska gladina	77
4.2.1 Srednja morska gladina	78
4.2.2 Topografija morske gladine	81
4.2 Višinski datum nivelmanskih mrež v Sloveniji	82
5 Določanje geoida (kvazigeoida)	86
5.1 Vrste podatkov za določanje geoida (kvazigeoida).....	87
5.2 Metode izračuna geoida	89

5.2.1	Dinamične satelitske metode – globalni geopotencialni modeli	90
5.2.2	Gravimetrična metoda	91
5.2.3	Astrogeodetska metoda	93
5.2.4	Geometrijska satelitska metoda	99
5.2.5	Satelitska altimetrija	101
5.2.6	Kolokacija po metodi najmanjših kvadratov	102
5.3	Upodobitev izračunanega geoida (kvazigeoida)	103
5.3.1	Interpolacija geoidnih višin iz celične mreže	107
6	Gravimetrija	108
6.1	Absolutne meritve težnega pospeška	108
6.2	Relativno merjenje težnega pospeška	111
6.2.1	Vplivi na izmerjene vrednosti težnega pospeška	114
6.3	Gravimetrična izmera	115
6.3.1	Gravimetrična izmera v Sloveniji	116
7	Literatura	119

1 Uvod

Skladno z klasično definicijo F.R. Helmerta iz leta 1880 je geodezija veda o izmeri in upodabljanju zemeljskega površja. Sodobna definicija razširja naloge geodezije in pravi, da je geodezija veda, ki se ukvarja z določevanjem oblike Zemlje in njenega zunanjega težnostnega polja, njene orientacije v prostoru, vse to kot funkcije časa.

Na ta način uvrščamo geodezijo med t.i. geovede, oz. vede o Zemlji. Fizikalna geodezija preučuje metode raziskav Zemlje kot fizikalnega in kot geometrijskega telesa. Zaradi tega pogosto fizikalno geodezijo uvrščajo v širše področje geofizike.

Geofizika je geodeziji verjetno najbolj sorodna veda tako, da v nekaterih deželah obravnavnajo geodezijo kot del geofizike. Zaradi tako ozke povezanosti je zelo težko postaviti ostro ločnico med njima. Predvsem geofizika potrebuje podatke o položaju in druge geometrične informacije o svojih opravljenih meritvah. Zelo pomembna je geometrična informacija o zemeljskih časovnih deformacijah (raziskave tektonskih premikov). Podatki o težnosti so skupni obema znanostima. Geodete zanimajo podatki o težnosti zaradi proučevanja geometrije težnostnega polja Zemlje, geofizika pa jih izkorišča za preučevanje nepravilnosti razporeditve mas v notranjosti Zemlje. Tako obe znanosti zbirata podatke gravimetrične izmere. Umetna razdelitev bi pomenila, da geodezijo zanimajo predvsem podatki na globalni in regionalni ravni, dočim geofiziko pa podatki na lokalni ravni. Geofizika podaja geodeziji vpogled v fizikalni odziv Zemlje na delovanje številnih sil, kot tudi informacije o možni porazdelitvi notranjih zemeljskih mas.

1.1 Kratek zgodovinski pregled

Vse do XVI. stoletja so bili tisti maloštevilni raziskovalci seznanjeni z fenomenom težnosti oz. težnega pospeška prek del Aristotela (IV. v. p.n.š.), ki trdi, da je hitrost padajočega telesa sorazmerna njegovi teži. V XVI. stoletju je Galileo Galilei z eksperimenti pojasnil pojav prostega pada in čase periodičnega gibanja nihala. Na tej osnovi je sto let kasneje Christian Huygens ustvaril teorijo matematičnega in fizikalnega nihala. On je bil tudi prvi, ki je konstruiral nihalno uro.

Skoraj celotna teorija fizikalne geodezije temelji na dosežkih Isaaca Newtona in njegovih aksiomov klasične mehanike ter zakona univerzalne gravitacije. Razvoju teorije potencialov (saj oblika Zemlje ni nič drugega, kot ploskev konstantnega potenciala) so prispevali mnogi znani matematiki: A.C. Clairaut (1713-1765), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), S.D. Poisson (1741-1840), G. Green (1793-1841), C.F. Gauss (1777-1855) in G.G. Stokes (1819-1903). V zadnjih dveh stoletjih so teoriji

fizikalne geodezije veliko prispevali znanstveniki, posvečeni večinoma geodeziji: Nemca H. Bruns (1848–1919) in F.R. Helmert (1843-1917), ter Rus M. S. Molodenski (1909-1991).

Razvoj meritev težnega pospeška je potekal hkrati z razvojem matematične teorije. Francoski astronom Richer je leta 1672 odkril razliko med vrednostjo težnega pospeška v Parizu in Francoski Gvajani. Nihalo njegove ure, prilagojeno za merjenja v Franciji je v Južni Ameriki dnevno zamujalo dve minuti in pol. Bouguer je to odkritje izkoristil za določitev oblike in velikosti Zemlje (1735–1743). Pri meritvah meridianskega loka je uporabil nihalo konstantne dolžine in na ta način prvič praktično izvedel relativne meritve težnega pospeška.

H. Kater je leta 1818 konstruiral reverzibilno nihalo. John Herschel je prvi predlagal gravimeter na osnovi vzmeti. Cavendish je prvi določil gravitacijsko konstanto leta 1798. Madžarski geofizik Roland von Eötvös je leta 1896 izpopolnil deloavnje Coulombove tehtnice in omogočil določitev majhnih sprememb težnega pospeška. Takšen instrument imenujemo Eötvösevariomometer. V začetku XX. stoletja so množično začeli uporabljati gravimetrične meritve za iskanje nahajališč nafte.

Verjetno prvi geofizikalni instrument izvira iz odkritja, da se delček magnetita oz. železa, ki je bilo v stiku s tem, postavi približno v smer sever – jug. Ta pojav je bil znan že starim Kitajcem v tretjem tisočletju p.n.š. Peregrinus je leta 1269 odkril magnetne pole Zemlje in jih imenoval severni in južni. Dokazal je odbojnost istoimenskih polov in privlačnost različnoimenskih polov. Columbo je na svojem potovanju v Ameriko ugotovil, da je busola odstopala od smeri astronomskega severa. Hartmann je leta 1544 odkril inklinacijo busole (kompasa). W. Gilbert je na prehodu iz XV. v XVI. stoletje dokazal, da Zemlja deluje kot velik magnet. Dnevne spremembe Zemljinega magnetnega polja je prvič ugotovil francoski astronom D. Arago leta 1827. C.F. Gauss je prispeval obsežno teorijo pri razvoju metod za določitev geomagnetnega polja.

Busola za potrebe navigacije v obliki, v kateri jo poznamo danes je konstruirana leta 1876 (P. Barlow). Busolo so za prve prave geofizikalne raziskave uporabili že v XVII. st. (odkritje železove rude).

Začetki seizmologije segajo v XVIII. stoletje. John Mitchell je leta 1760 prvi ugotovil, da se nenadni pomiki kamenin, ki jih povzroča potres, prenašajo skozi Zemljo v obliki elastičnih tresljajev. Prvi sezmografi so bili izdelani v Italiji v sredini prejšnjega stoletja. Leta 1898 je dr. Albin Belar v Ljubljani ustanovil prvo seizmološko postajo v avstroogrski monarhiji. Postaja je delovala do leta 1919. S sistemačnimi geofizikalnimi raziskavami se je v Sloveniji začelo po koncu II. sv. vojne z ustanovitvijo Geološkega in

Seizmološkega zavoda.

2 Zemlja – planet

Zemlja je tretji planet od Sonca in peti po velikosti. Oddaljena je 149,5 milijonov kilometrov (oddaljenost je prevzeta kot enota za merjenje razdalj v astronomiji = astronomska enota). Sonce je ena od 200 milijard zvezd, ki so spete skupaj pod vplivom težnosti v velikanski spiralni galaksiji z imenom Rimska cesta. Zemlja je približno na 3/5 poti od središča galaksije, svetloba potuje 100 000 let skozi našo galaksijo.

Zemlja je stara približno 4,5 do 4,6 milijarde let, pri čemer zelo redko najdemo kamnine starejše od 4 mrd. Najstarejši najdeni fosili so stari 3,9 mrd. let. Njeno površje pa je še mlajše. V 500 mio letih (kar je zelo kratek čas po astronomskih standardih) sta erozija in tektonski procesi bistveno spremenili njen prvobitni videz. Dve tretjini (71% površine) je prekrita z vodo in Zemlja je edini planet v Osončju na katerem voda lahko obstaja v tekočem stanju.

Nekaj osnovnih podatkov:

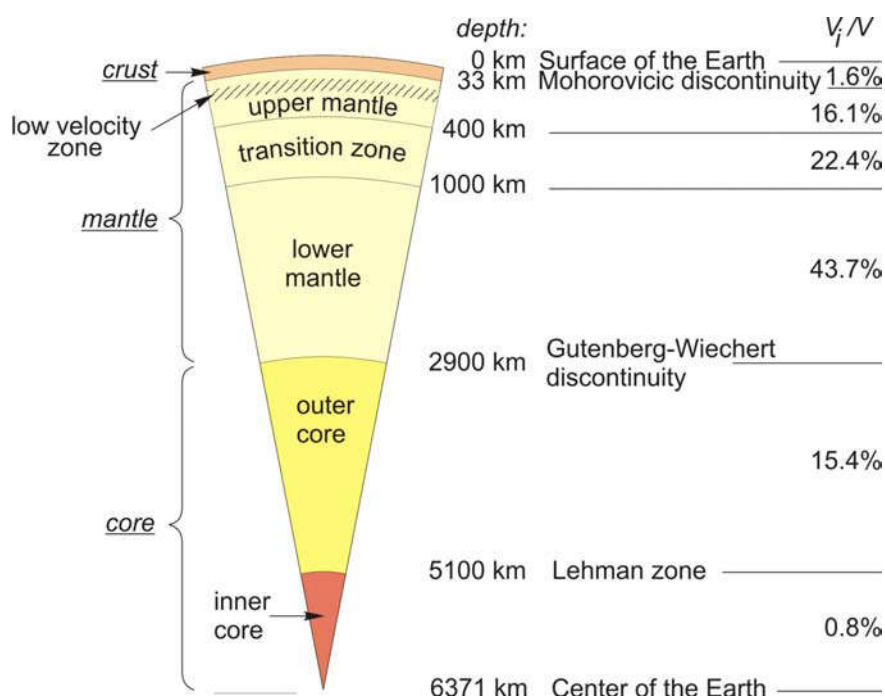
- Masa $5,9736 \times 10^{24}$ kg od tega:
 - atmosfera (0,000051),
 - oceani (0,0014)
 - skorja (0,026),
 - plašč (4,043),
 - zunanje jedro (1,835),
 - notranje jedro (0,09675).
- prostornina $108,321 \cdot 10^{10}$ km³
- Srednji radiji:
 - srednji ekvatorski radij $a_e = 6\,378\,140$ m (6 378 136 m IUGG)
 - srednji polarni radij $a_b = 6\,356\,755$ m (6 356 752 m IUGG)
 - sr. radij krogle $R_1 = 6\,371\,009$ m
 - sr. radij krogle z enako prostornino $R_2 = 6\,371\,001$ m
- sploščenost (eliptičnost) 0,0034
- srednja gostota 5520 kg/m³
- srednja težnost na ekvatorju 9,780 328 m/s²
- GM $3,986\,004 \times 10^{14}$ m³/s² (geocentrična gravitacijska konstanta)
- navidezna velikost -3,86

Temperatura na Zemlji se giblje med -88°C in $+58^\circ\text{C}$, in se spreminja s časom. Pred 100 mio let je bila temperatura približno 6° do 12°C višja kot je danes.

2.1 Zgradba Zemlje

Notranjost Zemlje je sestavljena iz treh ovojev. Definicije območij niso povsod enotne. Nekateri znanstveniki jih spreminjajo, uvajajo nove pojme, slika notranjosti našega planeta pa postaja vse bolj kompleksna.

V središču je jedro, imenujemo ga tudi barisfera (iz grščine "baris" težko). Razdeljeno je na notranje in zunanje jedro (imenovano tudi ovoj ali lupina jedra). Jedro je zaradi visokih pritiskov v trdnem stanju. Debelina je okrog 1220 km, gostota pa znaša od 15000 do 18000 kg/m³, temperatura je okrog 4000 °C.



Slika 2.3: zgradba Zemlje

Zunanje jedro je debelo okrog 2260 km, temperatura je okoli od 2700 do 3000 °C, gostota pa od 5500 do 6500 kg/m³; je v tekočem stanju.

Za tem pride plašč, ki ga tvorita zgornji in spodnji plašč. Spodnji plašč je v trdnem stanju, prehodna cona in zgornji plašč pa sta v tekočem stanju. Debelina plašča je okoli 2800 km, gostota pa od 3300 kg/m³ do 5500 kg/m³. Temperatura je od 1500 °C do 2700 °C.

V litosfero uvrščamo skorjo in zgornji del plašča. Vsa je v trdnem stanju in je različno debela. Zemljina skorja na primer, je po nekaterih predstavitev omejena na področje od 5 do 50 km, po drugih, ki upoštevajo tudi skrajne primere, sega ta razpon od 3 do 80 km globoko. Pod oceani je tanjša kod podmladimi gorovji. Tako debelina niha od 6

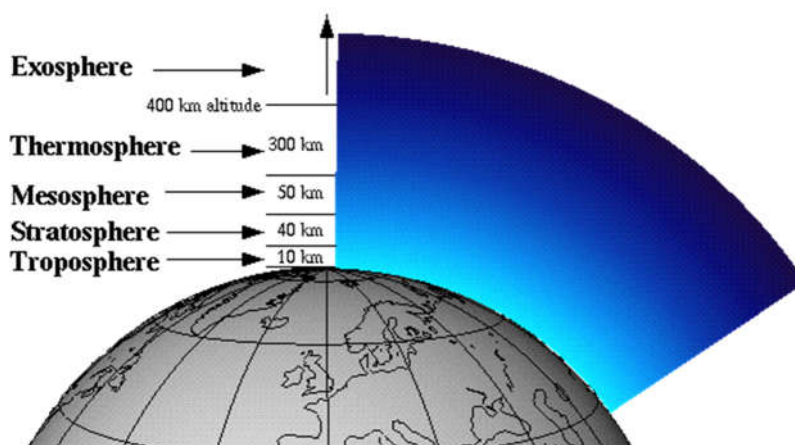
do 70 km. Kontinentalna skorja je najdebelejša pod Himalajo in Andi, najtanjša pa na robovih Atlantika. Debelina oceanske skorje je od 6 do 10 km.

globina [km]	Naziv
5144	Lehman – trdni Fe nasproti FeO, tekoči FeS
2885	Gutenberg – tekoči FeO, FeS nasproti Mg, Fe, silikati; zmanjšanje hitrosti potresnega valovanja, povečanje gostote
2870	D – tenka, mešanica materialov plašča in jedra
670	"670 km" – po celem svetu, ni žarišč potresov globlje od te plasti; še neraziskana dovolj glede spremembe sestava, faze in viskoznosti.
400	"400 km" – po celem svetu, sestava bolj spremenljiva zgoraj, sprememba faze.
50–200	LVZ – regionalno spremenljiva, dejansko vsebuje nekaj gradientov
4–55	Mohorovičić (Moho) – ostre spremembe v skorji, zelo tektonsko aktivna
5–30	Conrad – pogosto ni prisotna

Tabela 1: mejne plasti – diskontinuitete v notranjosti Zemlje

Za Zemljino notranjost so značilne t.i. *diskontinuitete* (nezveznosti) ali mejne plasti, pri katerih se ob prehodih z ene na drugo stran določene lastnosti kamnin bistveno spremenijo. Opazimo torej nekakšen skok pri določeni lastnosti, na primer hitrosti potresnega valovanja, gostoti ali sestavi snovi, glej tabelo 1.

Zemljina atmosfero tvori nekaj zelo različnih plasti: eksosfera, termosfera, mezosfera, stratosfera, in troposfera (slika).



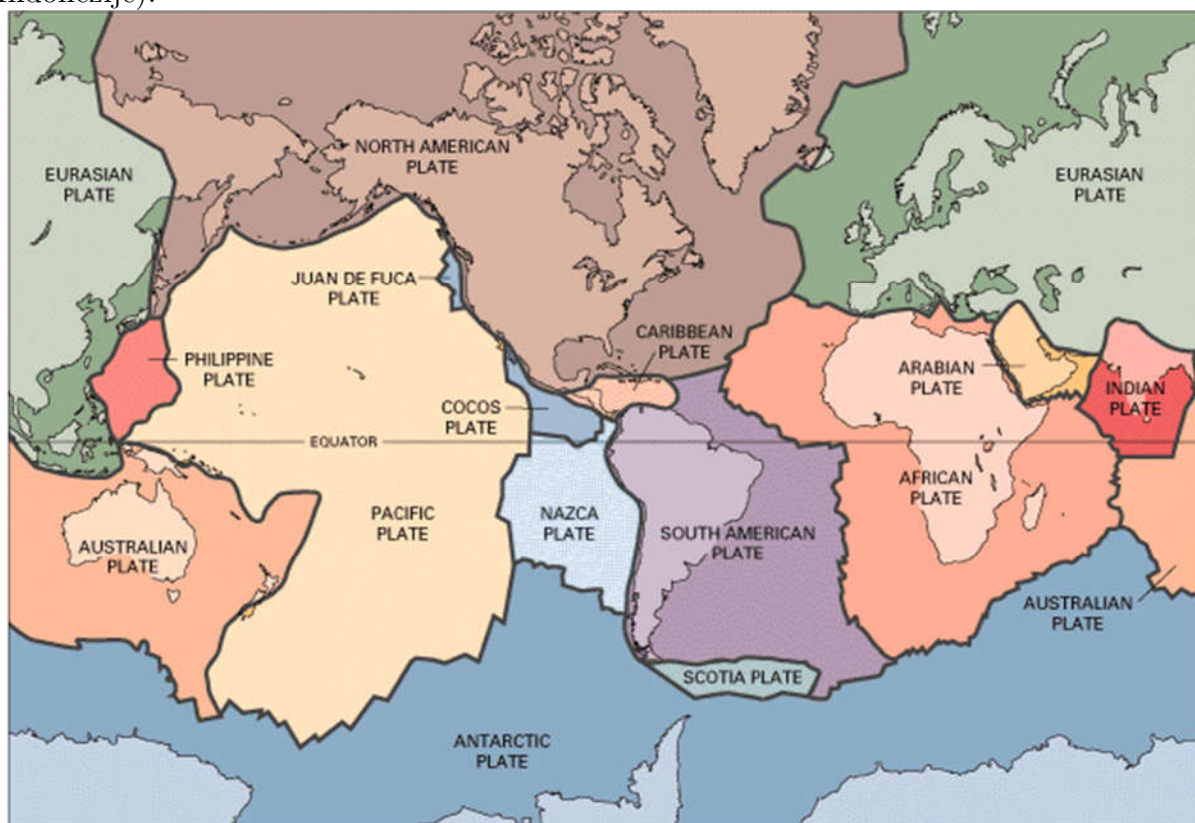
Slika 2.4: plasti v Zemljini atmosferi

Mezosfero zaradi obilice ionov imenujejo tudi ionsfera.

2.2 Dinamična Zemlja – ploščna tektonika

Zemlja je dinamičen planet, ki je podvržen nenehnim spremembam v notranjosti kot tudi zunanosti. Njeno preobrazbo povzročajo endogeni (notranji) procesi kot sta tektonika in vulkanizem ter eksogeni (zunanji) procesi kot sta erozija in sedimentacija. Litosfera je po novejših predstavah razdeljena na kakšnih 20 manjših in večjih plošč ali segmentov. Te sestavljajo mozaiku podobno strukturo. Del tega mozaika je podan z obrisi današnjih celin ter večjih otokov, torej kopnega, katerega medsebojne razdalje in oblike se venomer spreminjajo, torej se celine neprestano gibljejo. Tvorec teorije kontinentalnih premikov je bil avstrijski znanstvenik Alfred Wegener v začetku XX. stoletja. Kontinentalni premiki naj bi pred 200 milijoni leti obstoječi prakontinent *Pangea* preobrazili v sliko današnjega sveta. Zaradi dnevnega vrtenja Zemlje naj bi razdrobljeni bloki celin počasi težili k ekvatorju, vse pa naj bi se zgodilo od mezozoika (200 mio let) do današnjih dni.

Včasih se nam zdi, da je teza o potujočih celinah kar težko predstavljljiva. Vendar današnje geofizikalne raziskave in tudi rezultati geodetskih meritev na globalni ravni to samo potrjujejo. Ogromne gorske verige se spuščajo v oceanske bazene in globokomorske jarke z večjimi globinami, kot so višine najvišjih gorskih vrhov. Najdemo območja, kjer so anomalije težnosti izjemno velike na kopnem kot tudi v morskih globinah (primer Vening Meineszovih podmorskih meritev na obalah Indonezije).



slika 2.5: glavne tektonske plošče

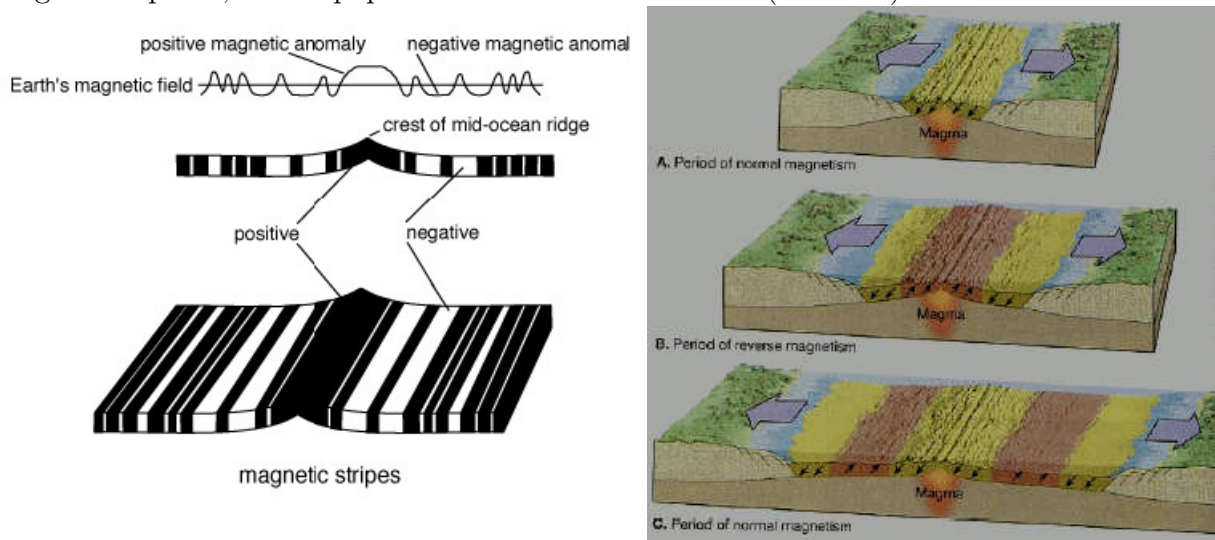
Največje tektonske plošče so:

- Severnoameriška plošča: sev. Amerika, zahodni severni Atlantik, Grenlandija;
- Južnoameriška plošča: južna Amerika in zahodni južni Atlantik;
- Antarktična plošča: Antarktika in "južni ocean";
- Evrazijska plošča: vzhodni severni Atlantik, Evropa, Azija (brez Indije);
- Afriška plošča: Afrika, vzhodni južni Atlantik in zahodni Indijski ocean;
- Indo-avstralska plošča: Indija, Avstralija, Nova Zelandija in večina Indijskega oceana;
- Nacza plošča: vzhodni Pacifik ob južni Ameriki;
- Pacifiška plošča: večina Tihega oceana ter južna obala Kalifornije.

Med manjše sodijo pa: Arabska plošča, Cocos, Filipinska plošča, Karibska, Juan de Fuca, Scotia, Rivera itd. Poleg velikih, oz. manjših (v svetovnem merilu) so znanstveniki ugotovili tudi obstoj t.i. mikroplošč, na primer v Sloveniji obstaja jadransko–dinarska mikroplošča, katere del tvori tudi Idrijski prelom, prizorišče katastrofalnega potresa iz leta 1511.

Kakšni so dokazi o ploščni tektoniki? Računalniško je dokazana geometrijska skladnost obal zahodne Afrike in Južne Amerike (čeprav od globin kakšnih 900 m dalje). S tehniko datiranja z radioaktivnimi izotopi je potrjena enaka starost kamnin v plasteh na eni in drugi obali. Obstajajo fosili, najdeni še v XIX. st. v evropskih rudnikih, ki so bili zelo sorodni tistim, ki so jih našli v skladih premoga v vzhodnih državah ZDA. Fosilno praprot so našli v skladih kamnin iz poznega paleozoika v Indiji, pa tudi v kamninah podobne starosti v Južni Ameriki, južni Afriki, Avstraliji in Antarktiki. Tudi to je dalo podlago za sklepanje o obstoju južnega superkontinenta Gondvane. Paleomagnetizem je del geofizike, ki se ukvarja z raziskovanjem Zemljinega starodavnega magnetnega polja. Dal je veliko podatkov v prid teoriji gibanja plošč. Čeprav Zemlja ni močen magnet ima dovolj močno magnetno polje, da magnetizira veliko kamnin. Med te sodijo tudi eruptivne in sedimentne kamnine. Eruptivne kamnine so prišle na dan iz Zemljine notranjosti in to v obliki gosto tekočih razžarjenih gnot. Te se na površju polagoma ohlajajo in tvorijo kamnite sklade. Pri ohlajanju tekočih kamnin se začno v njih magnetni minerali kristalizirati, pri tem pa je pomembno to, da smer magnetnega polja kamnin sovpada z smerjo magnetnega polja Zemlje v tistem času, ko je prišlo do kristalizacije. Svaka nova snov, ki se je razporedila v sedimentacijskih plasteh morskih bazenov, stremi za tem, da bi se usmerile vzporedno z lokalnimi magnetnimi polji oz. vsaka kamnina je v sebi ohranila podatke o smereh magnetnih silnic Zemljinega magnetnega polja v obdobju, ko je nastajala. Prav tako pa se je ohranil tudi podatek o polarnosti magnetnega polja. Na ta način je postalo možno rekonstruirati magnetna polja Zemlje iz preteklosti. Primerjava rezultatov sedanjih meritev (z različnih celin) s podatki rekonstruiranih magnetnih polj iz preteklosti, pove,

da kažejo kamnine enakih starosti smeri k magnetnima poloma, ki naj bi istočasno ležala na dokaj različnih območjih. To pa seveda ni možno, ker je Zemlja vedno bila dipolno magnetno polje. Torej premaknile naj bi se celine, pri tem bi se tudi zasukale. Pri tem je v preteklosti prihajalo tudi do spremembe polaritete (preobrata) Zemljinih magnetnih polov, kar se popolnoma sklada z meritvami (slika 2.6).



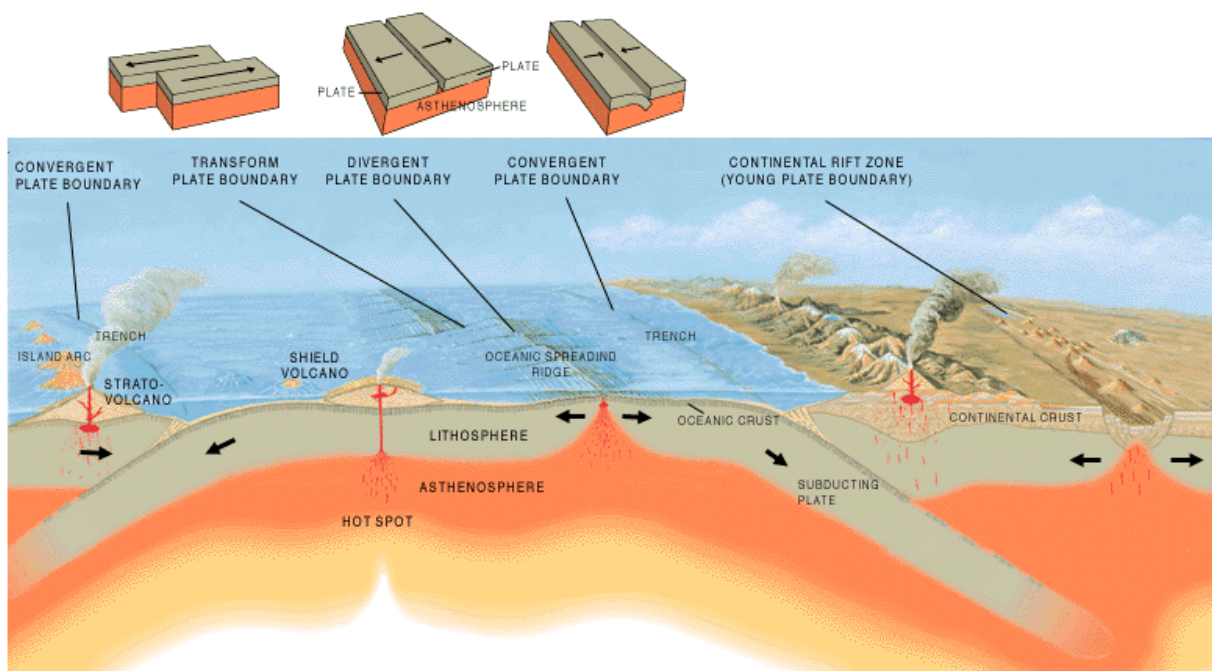
slika 2.6: magnetne anomalije na oceanskem dnu (vzporedne z oceanskim hrbtom)

Magnetne meritve v okolici centralnega atlantskega hrbta so tudi dokaz za razširjanje oceanskega dna. V štiridesetih letih XX. st. so začeli s sondiranjem dna Atlantskega oceana. Pri tem je bil v središču pozornosti srednjeoceanski atlantski hrbet, podvodna vzpetina na morskem dnu. Ta je del največje verige gorstev na svetu, ki meri v dolžino kar 64 400 km. Sredi tega hrbta teče razpoka, ob njej se pojavljajo zelo šibki potresi. Z vrtnjem je bila potrjena hipoteza, da prihajajo ob tej osi centralnega atlantskega hrbta na dan vedno znova sveže mase magme iz Zemljinih globin → "sea floor spreading" (razširjanje morskega dna), v litosferi in pod njo ležeči astenosferi se ohlajeni tokovi počasi oddaljujejo od srednje osi proti vzhodnim obalam južne Amerike in zahodno afriškimi. Novoformirane plasti (stripes – trakovi) oceanskega dna so namagnetene izmenično v normalni in obratni polariteti, tako kot se je spreminjala polariteta Zemljinega magnetnega pola.

Na mejah med ploščami nastajajo različni geološki procesi, ki se na površju različno odražajo, glede na to vrsto gibanja dveh sosednjih plošč. Na primer na mejah kjer prihaja do stikanja ali trka dveh plošč (pa tudi njihovih delov) začne ena izmed njih spodrivati drugo in nastajajo deformacije. Te deformacije se v milijonih letih kažejo v nastajanju novih gorovji, ki se dvigajo in so dejansko še v procesih nastajanja. Nova Zemljina skorja – zgornji del litosfere – nastaja ob oceanskih hrbtih, se odmika od njihovih osi na levo ter desno, končno pa se začne v oceanskih globinah zopet pogrezati v globlje dele litosfere, oz. v Zemljin plašč. Pogostokrat nastajajo potresi ravno ob mejah tektonskih plošč. Znanstveniki so razdelili meje med ploščami v tri kategorije:

divergentne ali razhajajoče, stikajoče ali konvergentne in strižne (transformne). Takšni so tudi stiki med ploščami.

Plošče priraščajo vzdolž t.i. robov priraščanja *akrecije*. Ti so večinoma po sredini oceanov in tu se plošče razmikajo. Raztaljena magma prodira skozi razpoko do površja (oceanskega dna), se ohlaja in lepi na robove plošče, i tako stalno priraščajo. Preostala magma se izlije na oceansko dno in gradi podmorske vulkane, ki se družijo v *srednjeoceanske hrbte* (na primer že omenjeni srednjeatlantski hrbet, ki se na Islandiji izjemoma dvigne celo nad morsko gladino).



slika 2.7: meje med ploščami

Ker je ostala velikost Zemlje ves čas enaka, se morajo plošče zaradi širjenja na enem robu, premikati na drugem. Stik dveh premikajočih se plošč imenujemo *kolizija*. To se dogaja vzdolž robov *konsumpcije*, kjer ena izmed plošč izginja pod drugo, se pogreza vse globlje in končno raztali. Poznamo tri poglavitne tipe kolizije. Prvi nastane, ko sta stiku plošči, ki nosita oceansko skorjo. Ena izmed plošč se uviha in potone pod drugo – *subdukcija* (podrivanje). Tako nastane oceanski jarek, kakršnih je veliko v Pacifiku. Lava, ki prodre skozi na oceansko dno, postopoma zgradi vulkansko otočje (npr. Tonga, Mariani, deloma japonsko otočje). Drugi tip kolizije nastane, če se stikata plošča s kontinentalno skorjo in plošča z oceansko, ki se vedno uviha in potone pod prvo. V takem primeru nastajajo na kontinentalni plošči gorovja z andezitnim vulkanizmom (najlepši primer so Kordiljere, ki spremljajo zahodni rob obeh Amerik, pod katerega tone pacifiška plošča). Kadar kolidirata plošči, ki nosita kontinentalno skorjo se srečamo s tretjim primerom. Kontinentalna skorja preprečuje, da bi katera potonila. Zato se - dokler se premiki ne preusmerijo - plošči vse bolj stikata in na takšnem stiku

nastajajo najvišja gorovja na svetu (primer Himalaja, kjer kolidirajo avstralsko-indijska in evroazijska plošča).

Znane so še *konservativne* meje (robovi), kjer plošči drsita druga mimo druge; imenujemo jih *transformni prelomi* in so vir stalnih potresov (najbolj značilna takšna meja na svetu je prelom Sant Andreas v Kaliforniji, kjer se stikata pacifiška in severno-ameriška plošča).

Razmestitev plošč ni stalna in se je med zgodovino Zemlje stalno spreminjala. Zato se pogosto dogaja, da se subdukcija nekje prekine, zaradi česar se spremenijo tudi konvekcijski tokovi v litosferi. Tako začno nekje drugje trgati dotlej trdno ploščo. Ker astenosfera ni ravno tekoča, temveč bolj plastična, so dogodki zelo počasni. Sredi kontinenta najprej nastane vdorni jarek, v kakršnem ležijo npr. vzhodnoafriška jezera ali Mrtvo morje. Jarek se postopoma širi in pogloblja, tako da ga prej ali slej zalije morje. V nadaljnjem se morski bazen širi in prerašča v ocean, po sredini pa se izoblikuje srednjeoceanski hrbet s svojim vulkanskim delovanjem. Atlantski ocean se razmika s hitrostjo 4 cm na leto, pomiki na obrobju pacifiške plošče pa so ponekod več kot dvakrat večji.

2.2.1 Geodinamika – geodezija

Skupnost vseh pojavov, povezanih s premeščanjem kamninskih gmot imenujemo *geodinamika*. Naloga geodinamike je modeliranje delujočih (zunanjih in notranjih) sil v funkciji opazovanih sprememb (oblike, težnosti, položaja, Zemljine rotacije itd.) in obratno. Z drugimi besedami se geodinamika ukvarja s možnostjo pretvorbe dinamičnih količin v kinematične ter obratno. Geodete pri tem zanimajo modeli za spremembe v funkciji delujočih sil. Nasprotno, geofizike zanimajo modeli za sile v funkciji sprememb.

Geodetski prispevek ploščni tektoniki je modeliranje časovnih sprememb položaja opazovanih točk. To nam pomaga izboljšati določitev terestričnih referenčnih sestavov ("reference frame") oz. referenčnih koordinatnih sistemov in daje vpogled v medsebojen vpliv kinematike plošč in rotacije Zemlje. Gibanje plošč lahko opišemo z naslednjo enačbo:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{\Omega} \times \vec{X}$$

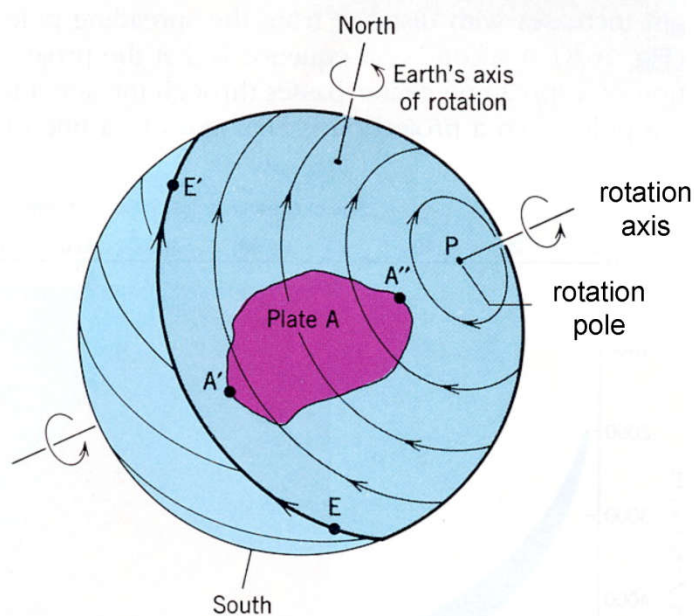
kjer so: \vec{X} krajevni vektor točke na gibajoči se plošči, $\dot{\vec{X}}$ je vektor hitrosti gibanja točke, in $\vec{\Omega}$ je vektor, ki definira Eulerjevo gibanje plošče. Cilj spremljanja gibanja plošč je določitev vektorja $\vec{\Omega}$ za različne plošče.

Ločimo geofizikalne modele premikanja plošč (NUVEL-1, NNR-NUVEL-1...). Ti so povprečje gibanja plošč v obdobju milijon let in so izvedeni z geofizikalnim

modeliranjem premikov oceanskega dna (predvsem podatki paleomagnetizma), določitve položaja tektonskih prelomnic in azimutov razširjanja potresnih sunkov. Po drugi strani poznamo tudi *Dejanski kinematični model* – APKIM "ActualPlateKinematicModel", ki je izveden na osnovi satelitskih merskih tehnik (VLBI, GPS, SLR).

Gibanje tektonskih plošč se pojasnjuje skladno z Eulerjevim teoremom: *Poljubna rotacija (ali zaporedje rotacij) okrog neke točke je ekvivalentna eni sami rotaciji okrog neke osi skozi to točko.*

Gibanje tektonske plošče na Zemlji krogli opišemo kot zasuk (z ustrezno kotno hitrostjo) okoli ustrezno izbrane rotacijske osi. Ta os predstavlja t.i. *Eulerjev vektor*. Presečišča osi z Zemljo - kroglo imenujemo Eulerjeva pola. Eulerjev vektor je povsem določen s koordinatami pola (geografska širina in dolžina) in kotno hitrostjo (velikost vektorja). Predznak zasuk je dogovorno izbran kot pozitiven v protiurni smeri.



slika 2.8: Eulerjevo gibanje tektonske plošče

Izračun vektorja hitrosti gibanja posamezne točke $T(\phi, \lambda)$ je podan tako, da prvo lociramo, na kateri tektonski plošči se nahaja točka. Izberemo parametre Eulerjevega pola te plošče in izračunamo komponente hitrosti za posamezno točko:

$$v_{\phi} = R \cdot \Omega \cdot \cos \phi_{POL} \cdot \sin(\lambda - \lambda_{POL})$$

$$v_{\lambda} = R \cdot \Omega \cdot [\cos \phi \cdot \sin \phi_{POL} - \sin \phi \cdot \cos \phi_{POL} \cdot \cos(\lambda - \lambda_{POL})]$$

3 Težnostno polje Zemlje

Na začetku smo se seznanili s tem, da težnostno polje Zemlje preučuje gravimetrija. Sama gravimetrija pomeni *merjenje težnosti*. Izhaja iz latinske besede “gravis” – težek in grške besede “μετροω” – meriti. Gravimetrija predstavlja skupino metod uporabne geofizike, ki se ukvarjajo z merjenjem težnega pospeška in s proučevanjem težnostnega polja. Pri preučevanju težnostnega polja Zemlje bomo iz gravimetrije vzeli samo tisto, kar zanima nas geodete. Rezultati gravimetrične izmere imajo velik pomen za geodezijo (ožje gledano t.i. fizikalno geodezijo), satelitsko geodezijo itd., vsaj se vse geodetske meritve opravljajo v težnostnem polju. Na primer nehorizontirani instrument pomeni neupoštevanje vpliva težnosti na opravljene meritve. Brez poznavanja celostne teorije težnostnega polja Zemlje je tudi naše geodetsko znanje nepopolno.

3.1 Pomen raziskovanja težnostnega polja Zemlje

Pomen raziskovanja težnostnega polja Zemlje lahko najkrajše strnemo v naslednjem:

- Zunanje težnostno polje Zemlje služi kot referenčni sistem za veliko število geodetskih merskih količin. Težnostno polje moramo dobro poznati, če hočemo te količine reducirati (prevesti) v geometrično točno določen sistem.
- V primeru znanega razporeda vrednosti težnostnega polja na površini Zemlje lahko, v kombinaciji z drugimi geodetskimi meritvami, določimo obliko zemeljske površine (določimo ploskev, ki v najboljši meri ponazarja obliko Zemlje).
- Geoid je najpomembnejša referenčna ploskev za določanje višin in višinskih razlik, ta pa ni nič drugega kot nivojska ploskev zemeljskega težnostnega polja.
- Opazovanja umetnih Zemljinih satelitov so osnova satelitske geodezije. Ti krožijo okoli Zemlje kot posledica dejstva njene privlačne sile. Opis in izračun tirov gibanja umetnih zemljinih satelitov ni možen brez poznavanja gravitacijskega polja Zemlje.
- Raziskave zunanjega težnostnega polja Zemlje nam podajo tudi informacije o strukturi in lastnostih Zemljine notranjosti. Z določanjem ustreznih parametrov težnostnega polja geodezija prispeva k raziskavam teoretične geofizike in geologije.

3.1.1 Gravitacijska sila in potencial

Vsa telesa se medsebojno privlačijo z gravitacijsko silo. Ta učinkuje tudi na daljavo in skozi brezračni prostor. Gravitacijska sila teles je odvisna od njihove mase in od njihove medsebojne oddaljenosti. Čim masivnejša so telesa in čim bližje so drugo drugemu, tem močnejša je gravitacijska privlačna sila med njimi.

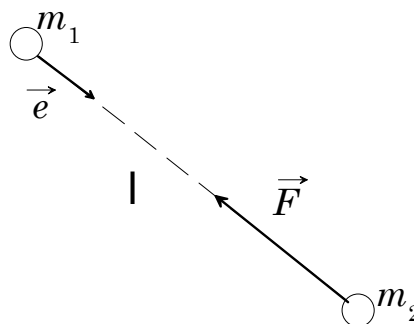
Odvisnost gravitacijske sile od mase teles in njihove razmaknjenosti, t.i. gravitacijski zakon, je prvi izpeljal angleški fizik Isaac Newton leta 1687, ko je pojasnil kroženje planetov okoli Sonca (v skalarni obliki, enačba podaja jakost grav. sile):

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (3.1)$$

"Telo z maso m_1 in telo z maso m_2 , ki sta razmaknjeni za l , se medsebojno privlačita z "gravitacijsko silo", ki je premosorazmerna z zmnožkom mas obeh teles in obratno sorazmerna s kvadratom njune oddaljenosti". Sila deluje v smeri veznice težišč obeh teles. G je gravitacijska konstanta in znaša $G=6,67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, rel. negotovost 128ppm ($1,3 \times 10^{-3}$). Lahko jo označimo kot splošno lastnost vsake mase. V fizikalnem pomenu predstavlja G razmerje med obnašanjem neke mase kot izvora privlačanja (gravitacije) in obnašanjem te iste mase kot odziva na privlačenje drugega telesa (mase). Prvi je gravitacijsko konstanto določil leta 1798 Cavendish s torzijsko tehtnico. Znanstveniki se s sedanjimi raziskavami trudijo izboljšati relativno natančnost določanja konstante, ki sedaj znaša 10^{-4} . Gravitacijska konstanta spada med fundamentalne fizikalne konstante. Zaenkrat znanstveniki domnevajo, da konstanta ni odvisna od časa, vendar poskusi tega še niso potrdili. Absolutna vrednost konstante zanima astronomijo in vse geoznanosti. Na primer s poznavanjem produkta GM je možno določiti maso M in srednjo gostoto posameznega nebesnega telesa. Vrednost gravitacijske konstante potrebujemo pri raziskavah gostote kamnin, pri katerih primerjamo gostote izračunane na podlagi gravimetričnim meritev in vrednosti gostote izvedenih iz geofizikalnih modelov.

Čeprav se telesi privlačita povsem simetrično, se običajno eno telo poimenuje "masa, ki učinkuje, vsiljuje privlačnost" (*attracting mass*) in drugo telo na katerega deluje privlačenje "privlačevana masa" (testna masa), (*attracted mass*). Izračuni se poenostavijo, če podamo "privlačevani mase" enotsko maso, $m=1$. V vektorskem prikazu ima privlačna sila smer, nasprotno smeri enotskega vektorja \mathbf{l} , ki kaže v smeri naraščanja koordinat (koordinatno izhodišče je postavljeno v središče izvora gravitacije, v telesu, ki vsiljuje privlačno silo). Znak minus torej pomeni, da sila deluje v smeri proti telesu, ki učinkuje.

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{l^2} \mathbf{e} = -G \frac{m_1 m_2}{l^2} \frac{\mathbf{l}}{l}$$



Newtonov gravitacijski zakon velja za vsa telesa, tudi za telesa na zemeljskem površju. Gravitacijska sila med telesi je zelo šibka (le neznatno vpliva na gibanje teles) in jo večinoma zanemarimo v primerjavi z drugimi silami. Ta sila je pomembna le, če je vsaj eno telo astronomsko, na primer Zemlja. Newtonov zakon lahko brez zadržkov uporabimo za planete in Sonce. Njihova velikost je namreč majhna v primerjavi z oddaljenostjo in je zato vseeno, od kod do kod merimo razdaljo l , ki nastopa v zakonu. Pri telesih na zemeljskem površju pa je vprašanje, katera razdalja je l . Če telesa niso majhna v primerjavi z njihovo medsebojno oddaljenostjo (če torej niso točkasta telesa), je gravitacijska sila med njimi odvisna tudi od oblike, velikosti in lege teles v prostoru. Za takšna telesa gravitacijski zakon v obliki (3.1) ne velja. Pomagamo si tako, da telesa v mislih razdelimo na diferencialno majhne dele, za katere potem uporabimo zakon v obliki (3.1). Izračunamo delne gravitacijske sile med posameznimi pari točkastih delov obeh teles in poiščemo njihovo rezultanto, ki predstavlja celotno gravitacijsko silo med obema telesoma.

Vzemimo sedaj Zemljo takšno kot je, z vso njeno nepravilno fizično površino in nehomogeno strukturo. Postavimo izhodišče pravokotnega kartezičnega koordinatnega sistema v težišče Zemlje. Os Z sovpada z zemeljsko vrtilno osjo, osi X in Y pa ležita v ekvatorski ravnini (slika 3.1). Točki A in B sta dve materialni točki pri čemer je točka A (a, b, c) na zemeljskem površju, z elementom mase $m_1 = m$, in točka B (x, y, z) enotske mase $m_2 = 1$, na oddaljenosti l od Zemlje. Točka A je telo, ki vsiljuje privlačenje in točka B je testna masa (*attracted mass*). Med njima deluje gravitacijska, privlačna sila F :

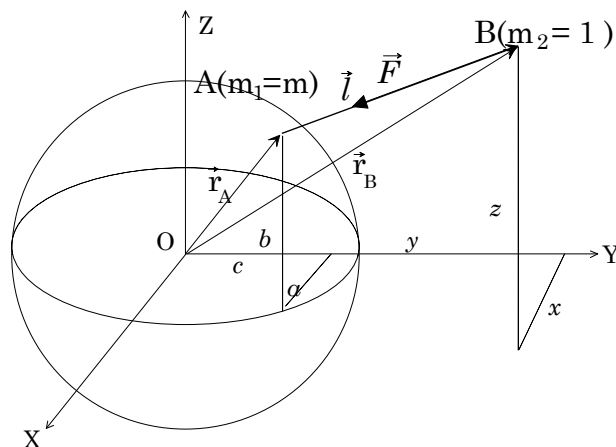
$$F = G \frac{m}{l^2} \quad (3.2)$$

Privlačno silo lahko predstavimo z vektorjem \mathbf{F} , velikosti F . To pomeni, da lahko poiščemo komponente vektorja \mathbf{F} v smereh koordinatnih osi. Te dobimo, če vektor množimo s kosinusi kotov, ki jih vektor oklepa s koordinatnimi osmi:

$$F_x = -F \cos \alpha \quad F_y = -F \cos \beta, \quad F_z = -F \cos \gamma \quad (3.3)$$

Vemo, da je:

$$\cos \alpha = \frac{x - a}{l}, \quad \cos \beta = \frac{y - b}{l}, \quad \cos \gamma = \frac{z - c}{l}. \quad (3.4)$$



slika 3.1: privlačna sila \mathbf{F} med točkama A in B

Z zamenjavo (3.4) in (3.2) v (3.3) dobimo (upoštevajoč, da dolžino l dobimo iz koordinat točk):

$$\begin{aligned}
 F_x &= -Gm \frac{x-a}{l^3} \\
 F_y &= -Gm \frac{y-b}{l^3} & l &= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \\
 F_z &= -Gm \frac{z-c}{l^3}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ker je gravitacijska sila vektor, pomeni, da v območju v okolici telesa, na katerem telo učinkuje na druga podobna telesa, deluje vektorsko polje sile. Polje gravitacijske, privlačne sile, se imenuje gravitacijsko polje.

Vsa računanja se poenostavijo, če z vektorskega polja preidemo na skalarno polje. Skalarna funkcija, katere parcialni odvodi so enaki komponentam vektorja gravitacijske sile, se imenuje gravitacijski potencial (V) oz. potencial privlačne, gravitacijske sile (Green je to funkcijo poimenoval skalarna funkcija, Gauss pa kratko potencial):

$$V = G \frac{m}{l} \tag{3.6}$$

V fizikalnem pomenu je potencial gravitacijske sile v neki točki P negativno delo, ki ga mora opraviti gravitacijska sila na enoto mase, da bi privedla telo iz neskončne oddaljenosti, kjer je potencial $V=0$, v točko P.

Poiščimo parcialne odvode funkcije (3.6):

$$\begin{aligned}
 l &= \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 \frac{1}{l} &= \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \right]^{\frac{1}{2}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} = -G \frac{m}{l^2} \frac{\partial l}{\partial x} = \\ &= -G \frac{m}{l^2} \frac{1}{2} \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2(x-a) = -Gm \frac{x-a}{l^3}\end{aligned}\quad (3.7a)$$

Podobno dobimo za ostali dve komponenti oz. parcialna odvoda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= -Gm \frac{y-b}{l^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -Gm \frac{z-c}{l^3}\end{aligned}\quad (3.7b)$$

Očitno je (3.5) enako (3.7a) in (3.7b) oz.:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \frac{\partial V}{\partial y} = F_y \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_z.$$

Torej velja, da so parcialni odvodi skalarne funkcije gravitacijskega potenciala enaki komponentam vektorske funkcije gravitacijske sile. Z oznakami vektorske analize zgornji odnos lahko prikažemo kot:

$$\mathbf{F} (F_x, F_y, F_z) = \text{grad } V \quad (3.8)$$

Gravitacijska sila je gradient gravitacijskega potenciala. Pogosto se za gradient uporablja oznaka ∇ , operator nabra (v matematiko ga je vpeljal W.R. Hamilton). To je simbolični vektor, katerega komponente v koordinatnem sistemu (x, y, z) so operatorji odvajanja $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

Odnos skalarne potencialne funkcije in vektorja gravitacijske sile je za geodezijo zelo pomemben, saj omogoča, da tri komponente sile zamenjamo z eno samo funkcijo. Potentialne funkcije ne smemo zamenjati s potencialno energijo; potencialna energija namreč z višino narašča, potencial pa upada. Poleg tega je fizikalna enota za potencialno energijo $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$, za potencial pa m^2s^{-2} , saj govorimo o enotski masi.

Vektorska polja, katerim lahko priredimo potencialno funkcijo, imenujemo potencialna polja. Takšna polja so brez vrtincev, kar matematično zapišemo:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

Omenili smo že, da je gravitacijska sila, med telesi, ki niso zanemarljivo majhna v primerjavi z njihovo medsebojno oddaljenostjo, odvisna od oblike, velikosti in lege teles v prostoru. Če razdelimo telo na majhne koščke (masne točke) in poiščemo privlačni vpliv vsakega koščka na obravnavano točko, ter vse vplive seštejemo, dobimo vrednost privlačne sile oz. potenciala v tej točki:

$$V = G \frac{m_1}{l_1} + G \frac{m_2}{l_2} + \dots + G \frac{m_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \quad (3.9)$$

Ob predpostavki, da se masne točke v notranjosti telesa razporejene zvezno v notranjosti, lahko preidemo z elementa mase m na zvezno razporejene elemente v prostornini v z gostoto ρ :

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

dm je element mase, dv pa element prostornine. Vsoto (3.9) lahko potem napišemo v obliki prostorninskega integrala:

$$V = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv \quad (3.10)$$

pri čemer je l razdalja med elementom mase dm in točko, ki se privlači.

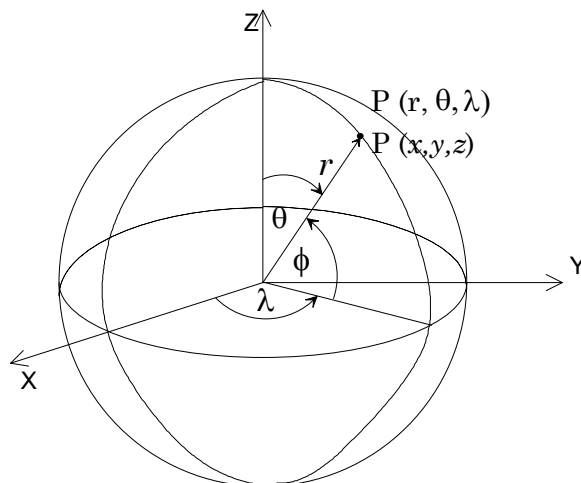
Enaka enačba velja tudi za Zemljo:

$$V = G \iiint_{\text{Zemlja}} \frac{dm}{l} = G \iiint_{\text{Zemlja}} \frac{\rho}{l} dv$$

V izračunu potenciala V izhajamo iz tega, da nam je funkcija razporeda gostote $\rho = \rho(r')$ povsem znana (r' je krajevni vektor poljubne točke na Zemlji oz. njeni notranjosti). Dejansko pa gostoto poznamo samo za nekatere zgornje plasti zemeljske skorje. Zaradi nepoznavanja dejanskega razporeda gostote v notranjosti Zemlje, enačba geodetom ni v veliko pomoč. Zato poskušamo določiti potencial (težnost) na drugačen način.

3.1.2 Gravitacijski potencial krogle

V prvem približku lahko Zemljo obravnavamo kot kroglo, s centralno simetrično razporeditvijo gostote. Da bi izračunali gravitacijski potencial, vpeljimo krogelne koordinate r, θ, λ (slika 3.2), r je radij vektor, θ polarni kot (kolatituda), λ je sferna dolžina (dolžinski kot).

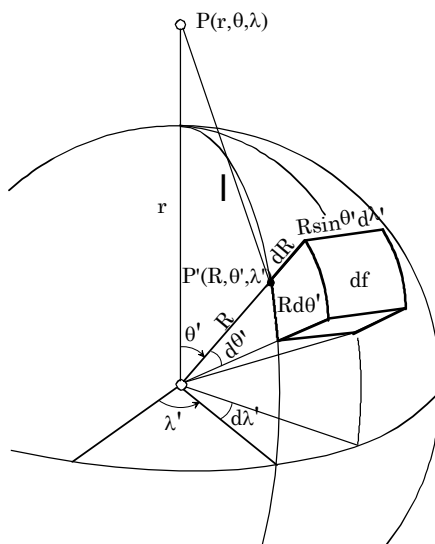


slika 3.2: zveza med krogelnimi in kartezičnimi koordinatami

Z običajno orientacijo koordinatnega sistema skladno z geocentričnim kartezičnim koordinatnim sistemom (θ os se ujema z osjo Z , ki sovpada s rotacijsko osjo; λ os se ujema z osjo X in leži v meridianski ravnini Greenwicha; torej je dolžinski kot enak geografski dolžini) dobimo naslednjo zvezo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

V naslednjih odvodih bo krogelni koordinatni sistem orientiran tako, da θ os sovpada z zveznico točk O in P , v kateri računamo gravitacijski učinek sferne lupine (slika 3.3). Točka P ima koordinate (r, θ, λ) , položaj lupine f je podan s prostorsko parcelo df oz. točko $P'(R, \theta', \lambda')$.



slika 3.3: gravitacijski potencial centralno simetrične krogle

Potencial homogene sferne lupine neskončno majhne debeline dR in gostote σ , z radijem R , nam poda enačba podobna enačbi (3.10)¹:

$$V' = G \iint_f \frac{\sigma}{l} df \quad (3.12a)$$

¹ Potencial ploščinskega elementa S mase dm , ki učinkuje s privlačno silo na okolico, je podan z izrazom (Blakely, 1996):

$$V = G \iint_s \frac{dm}{l} = G \iint_s \frac{\sigma}{l} dS$$

pri tem je σ ploskovna gostota mase ($\sigma = dm/dS$); to je masa na enoto površine.

pri čemer integriramo na območju površine lupine f (element df je prostorska parcela $df = R^2 \sin \theta' d\theta' d\lambda'$). Razčlenimo območje integracije s prostorske parcele df na krogelne koordinate θ' in λ' (integriramo na območju $0 < \theta' < \pi$, $0 < \lambda' < 2\pi$):

$$V' = G \iiint_f \frac{\sigma}{l} df = G \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma \frac{R^2 \sin \theta' d\theta' d\lambda'}{l} = 2\pi G \sigma \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \theta' d\theta'}{l} \quad (3.13a)$$

Razdaljo l med točko P in sferno lupino f lahko izračunamo s pomočjo kosinusovega stavka za kote iz trikotnika P0P':

$$l = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}$$

Izračun potenciala lupine f je bolj pregleden, če v enačbi (3.13a) vzamemo za argument razdaljo l , kot pa kot θ' . Zato poiščimo v izrazu za razdaljo l odvod $dl/d\theta'$:

$$\frac{dl}{d\theta'} = \frac{2Rr \sin \theta'}{2\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'}} = \frac{Rr \sin \theta'}{l}$$

oz.
$$\frac{dl}{r} = \frac{R \sin \theta' d\theta'}{l}$$

Vstavimo zgornji izraz v (3.13a):

$$V' = 2\pi G \sigma R \int_{l_1}^{l_2} \frac{dl}{r} = 2\pi G \rho \frac{R}{r} \int_{l_1}^{l_2} dl = 2\pi G \sigma \frac{R}{r} (l_2 - l_1) \quad (3.13b)$$

Ločimo dva primera glede na položaj točke P. V prvem se točka nahaja zunaj lupine (krogle), v drugem pa v notranjosti krogle. Za prvi primer velja:

$$r > R, \quad \begin{array}{ll} \theta' = 0^\circ & l_1 = r - R \\ \theta' = 180^\circ & l_2 = r + R \end{array}$$

$$l_2 - l_1 = 2R$$

$$V'_z = 2\pi G \sigma \frac{R}{r} 2R = 4\pi G \sigma \frac{R^2}{r} \quad (3.14a)$$

Masa homogene krogelne lupine je: $m' = 4\pi \sigma R^2$. Torej potencial homogene lupine za točko zunaj nje znaša:

$$V'_z = G \frac{m'}{r} \quad (3.14b)$$

Potencial homogene krogelne lupine v točki zunaj nje, je na oddaljenosti r enak potencialu, kot če bi vsa masa bila koncentrirana v masnem središču krogle. Enačbo lahko brez zadržkov prevedemo na gravitacijski potencial Zemlje–krogle sestavljene iz koncentričnih homogenih lupin:

$$V_z = G \iiint_{Zemlja} \frac{dm'}{r} = G \frac{M}{r} \quad (3.15)$$

Če v zgornjo enačbo vstavimo vrednosti $GM=398,6 \times 10^{12} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$ in $R=6371 \text{km}$, znaša potencial za točko na površini Zemlje, $r=R$, $V=6,26 \times 10^7 \text{m}^2 \text{s}^{-2}$). Zgornji sklep lahko posplošimo v naslednjem: če obravnavamo potencial v neki točki, ki se nahaja v prostoru zunaj telesa, ne moremo sklepati o obliki telesa, ki povzroča privlačenje v točki obravnave. Homogena krogla, homogena krogelna lupina ali masna točka povzročajo enak potencial oz. privlačno silo.

Za točko v notranjosti lupine velja:

$$\begin{aligned} r < R, & \quad \theta = 0^\circ & \quad l_1 = R - r \\ & \quad \theta = 180^\circ & \quad l_2 = R + r \\ & & \quad l_2 - l_1 = 2r \end{aligned}$$

$$V'_n = 2\pi G \sigma \frac{R}{r} 2r = 4\pi G \sigma R \quad (3.15a)$$

oz. če vstavimo izraz za maso lupine:

$$V'_n = G \frac{m'}{R} = \text{konst.} \quad (3.15b)$$

Potencial je v tem primeru konstanta in je neodvisen od položaja točke P znotraj krogle. Sama gravitacijska sila je nič.

Potencial v notranjosti "Zemlje sestavljene iz homogenih lupin" tvorita dva člena: prvi člen povzročajo mase v notranjosti krogle $r=R$ (enačba 3.14b); drugi člen je potencial lupine debeline $a-r$. a je polmer (ekvatorialni) Zemlje:

$$V_n = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho R^2 dR + 4\pi G \int_r^a \rho R dR \quad (3.16)$$

Za homogeno Zemljo–kroglo (ob predpostavki $\rho=\text{const}$) dobimo potencial v notranjosti oblike:

$$V_n = \frac{4}{3} \pi G \rho r^2 + 2\pi G \rho (a^2 - r^2) = 2\pi G \rho \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (3.17)$$

3.1.3 Lastnosti gravitacijskega potenciala

Gravitacijski potencial je enolična, omejena in zvezna funkcija v celotnem zunanem prostoru Zemlje in izginja v neskončnosti (obnaša se kot recipročna razdalja $1/l$). To je razvidno iz dejstva, da pri velikih razdaljah učinkujejo telesa kot masne točke in rezultat takšnega privlačenja je potencial, približno enak enačbi (3.6). Primer za to je nebesna mehanika, kjer se planeti obravnavajo kot masne točke.

Prvi odvodi gravitacijskega potenciala V (komponente privlačne sile) so tudi zvezne, enolične in omejene funkcije v celotnem prostoru (v zunanosti in notranosti Zemlje).

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x = -G \iiint_{Zemlja} \frac{x-a}{l^3} dm \dots$$

To pa ne velja za druge odvode potencialne funkcije. Drugi odvodi vsebujejo diskontinuiteto zaradi hitrega preskoka gostote na mejni ploskvi med atmosfero in trdnim delom (Zemlja).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx} = -G \iiint_{Zemlja} \frac{1}{l^3} dm + 3G \iiint_{Zemlja} \frac{(x-a)^2}{l^5} dm \dots$$

Gravitacijski potencial znotraj Zemlje zadošča Poissonovi diferencialni enačbi:

$$\Delta V = -4\pi G\rho \tag{3.18}$$

Zunaj Zemlje v odprtem prostoru, kjer je $\rho=0$, zadošča gravitacijski potencial Laplaceovi diferencialni enačbi:

$$\Delta V = 0$$

Znak Δ je t.i. Laplaceov operator predstavlja operacijo drugega reda, vsoto drugih

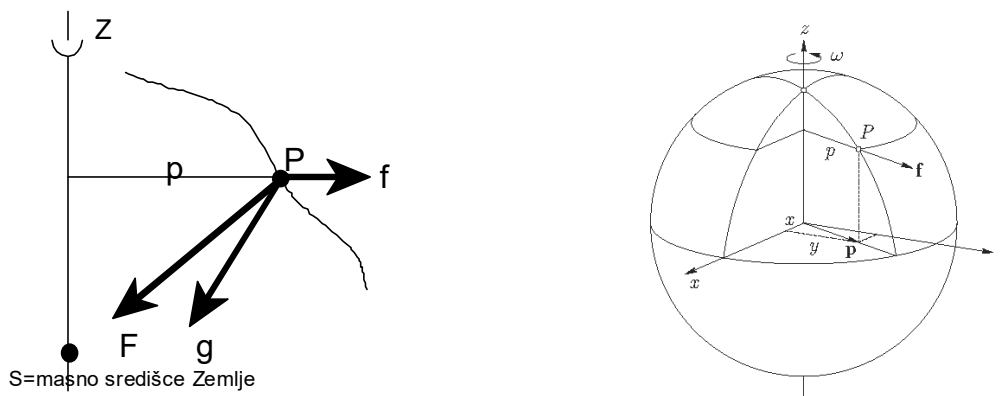
odvodov:
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Rešitve Laplaceove diferencialne enačbe so tako imenovane harmonične funkcije. Torej je gravitacijski potencial harmonična funkcija zunaj mas, ki privlačijo telesa, ne pa tudi v notranosti teh mas. Laplaceova diferencialna enačba nam, skupaj z ustreznimi robnimi pogoji, omogoča, da v zunanosti Zemlje določimo gravitacijski potencial in njegove odvode na podlagi robnih vrednosti podanih na površini Zemlje. Pri tem nam ni potrebno poznati razporeda gostote v notranosti. Za rešitev Poissonove diferencialne enačbe moramo poznati razporeditev gostote v notranosti Zemlje.

3.1.4 Centrifugalni potencial

Iz fizike je znano, da pri kroženju teles s stalno obodno hitrostjo nastopata dve sili: centripetalna in centrifugalna sila. Centripetalna sila učinkuje v smeri k središču kroženja. Obenem tudi telo, ki kroži, učinkuje na okolico, ki ga sili v kroženje z nasprotno enako silo centrifugalno (sredobežno) silo.

Na točko P, ki se nahaja na površini Zemlje in se skupaj z njo vrti okoli osi Z (slika 3.4), deluje centrifugalna sila. Ta deluje pravokotno proč od vrtilne osi in narašča premo sorazmerno z oddaljenostjo telesa od osi.



slika 3.4: privlačna sila, centrifugalna sila in sila teže

Centrifugalni pospešek, ki ga občuti telo enotske mase, je podan s naslednjim izrazom:

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{p} \quad (3.20)$$

kjer sta ω kotna hitrost rotacije Zemlje in $\mathbf{p} = \sqrt{x^2 + y^2}$ pravokotna razdalja točke P od rotacijske osi Z. Kotna hitrost rotacije Zemlje je znana iz astronomije z visoko natančnostjo: $\omega = 7,292115 \times 10^{-5}$ rad/s.

Vektor centrifugalne sile je usmerjen navzven, pravokotno na vrtilno os Zemlje; ima smer vektorja s koordinatami: $\mathbf{p} = (x, y, 0)$ oz.

$$\mathbf{f} = \omega^2 \mathbf{p} = (\omega^2 x, \omega^2 y, 0)$$

Podobno kot pri gravitacijski sili, obstaja potencial centrifugalne sile Φ . Velja:

$$\mathbf{f} = \text{grad } \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$

oz.

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 p^2 \quad (3.22)$$

Centrifugalni potencial ima enako dimenzijo kot gravitacijski potencial; pomeni energijo, ki jo ima enota mase zaradi rotacije okoli osi Z.

Enačbo (3.20) dvakrat odvajamo in uporabimo Laplaceov operator. Dobimo:

$$\Delta \Phi = 2\omega^2 \quad (3.23)$$

Zgornji izraz nam kaže, da analitična funkcija Φ , za razliko od V gravitacijskega potenciala ni harmonična funkcija. Za točke na ekvatorju, ima centrifugalni potencial vrednost $\Phi = 1,1 \times 10^5 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, centrifugalni pospešek pa $f = |\mathbf{f}| = 0,034 \text{ ms}^{-2}$ ($\approx 0,35\%$ gravitacije). Na polu sta potencial Φ in sila \mathbf{f} enaka nič.

3.1.5 Sila teže, potencial sile teže

Sila teže učinkuje na masno točko P na površini Zemlje kot vektorska rezultanta delovanja centrifugalne in gravitacijske sile (slika 3.4):

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{f} \quad (3.24)$$

Sila teže je vektor, torej ima svojo smer in velikost. Smer vektorja \mathbf{g} je v vsakdanjem življenju znana kot težiščnica (ponazarjata jo smer vertikalne osi horizontiranega geodetskega instrumenta, oziroma smer grezila); velikost vektorja $g = |\mathbf{g}|$, pa je jakost sile teže oz. kratko težnost.

Velikost vektorja sile teže – težnost ima fizikalno dimenzijo pospeška. V praksi (posebej geodetski in geofizikalni) je lažje delati s skalarjem, zato se namesto sile, obravnava pospešek. S tem v zvezi je bil uveden pojem težnega pospeška (uporablja se tudi težnostni pospešek). Prosto telo mase m , zaradi teže (Q) pospešeno pada s težnim pospeškom (g). Iz Newtonovega zakona dinamike sledi:

$$Q = mg$$

Enota za težni pospešek v SI sistemu merskih enot je ms^{-2} . Za prikaz odstopanj dejanske težnosti (Zemlje) od polja normalne sile teže se uporabljata manjši enoti:

$$1 \mu\text{ms}^{-2} = 10^{-6} \text{ms}^{-2}$$

$$1 \text{nms}^{-2} = 10^{-9} \text{ms}^{-2}$$

V geodeziji in geofiziki oz. gravimetriji je še vedno v rabi pomožna enota:

$$1 \text{mGal} = 10^{-5} \text{ms}^{-2}$$

$$1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ms}^{-2}$$

Izpeljani sta iz enote Gal, poimenovani po G. Galileu ($1\text{Gal} = 1\text{cms}^{-2}$, *CGS* sistem merskih enot). Te enote v uradni rabi niso dovoljene, vendar se v znanstvenem komuniciranju še vedno uporabljajo. V tabeli so podane zveze med enotami SI sistema in uporabnimi enotami.

količina	SI enote	uporabniške
težnost (težni pospešek)	10^{-2}ms^{-2}	1 Gal
	10^{-5}ms^{-2}	1 mGal
	10^{-8}ms^{-2}	1 μGal
težnostni potencial	$10 \text{m}^2\text{s}^{-2} =$ $= 1 \text{g} \cdot \text{p} \cdot \text{u}.$	1 kGal _m

Tabela 1: enote v gravimetriji

Velja torej:

- $1 \mu\text{ms}^{-2} = 0,1 \text{mGal}$ oz. $1 \mu\text{ms}^{-2} = 100 \mu\text{Gal}$
- $1 \text{nms}^{-2} = 0,1 \mu\text{Gal}$

Zaradi sploščenosti Zemlje na polih, sprememb v gostoti Zemljine notranjosti in zaradi različnega centrifugalnega pospeška se vrednost g giblje med $g = 9,78 \text{ ms}^{-2}$ (na ekvatorju) in $g = 9,83 \text{ ms}^{-2}$ (na polih). Srednja vrednost težnega pospeška na površini Zemlje znaša $g = 9,803 \text{ ms}^{-2}$.

Pri proučevanju geometrijskih lastnosti polja sile teže je dovolj, če obravnavamo samo težni pospešek. Masa je pri tem samo faktor merila polja sile teže. Polje težnega pospeška daje popolno geometrijsko sliko polja sile teže. Težnostni potencial se občasno obravnava kot delo, ki ga je potrebno opraviti, da bi premagali silo teže $m\mathbf{g}$, ki deluje na enotsko maso m . Sama enota za težnostni potencial m^2s^{-2} , kaže na odsotnost kakršnekoli mase. Torej se W obravnava kot delo v kinematičnem pomenu, brez upoštevanja mas.

Potencial sile teže (težnostni potencial) dobimo kot vsoto potenciala privlačnosti in potenciala centrifugalne sile:

$$W = V + \Phi = G \iiint_{Zemlja} \frac{\rho}{l} dv + \frac{\omega^2}{2} p^2 \quad (3.25)$$

V matematičnem zapisu predstavlja težni pospešek gradient težnostnega potenciala:

$$\mathbf{g} = \text{grad } W \quad (3.26)$$

Potencial W in njegovi prvi in drugi odvodi so enolične, zvezne funkcije kot posledica lastnosti potencialov V in Φ , razen v primerih, ki nas geodete toliko ne zanimajo: z naraščanjem r prek vseh meja, $r \rightarrow \infty$ potem je tudi $\Phi \rightarrow \infty$; in v primeru ko je $g=0$ (smer težiščnice ni enoličen). Drugi odvodi niso zvezni v primerih nepričakovane spremembe gostote. Najbolj znana ploskev v geodeziji, ki vsebuje diskontinuiteto, je fizična površina Zemlje. Njena gostota se giblje od $\rho = 1,29828 \text{ kgm}^{-3}$ (gostota zraka) do $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$ (srednja gostota zgornje plasti zemeljske skorje).

Iz definicije težnostnega potenciala je jasno, da privlačni potencial upada z oddaljenostjo od Zemlje, centrifugalni pa narašča z večanjem razdalje od osi rotacije. Vendar skupni težnostni potencial ($W=V+\Phi$) deluje samo na telesa, ki so na Zemlji. Takoj ko se obravnavana točka loči od nje (preneha njegova rotacija) centrifugalni potencial postane nepomemben. Upoštevajoč enačbi (3.23) in (3.18), dobimo generalizirano Poissonovo diferencialno enačbo za težnostni potencial:

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (3.27)$$

V prostoru zunaj Zemlje velja $\rho=0$ (če zanemarimo gostoto zraka) in zgornja enačba preide v generalizirano Laplaceovo diferencialno enačbo:

$$\Delta W = 2\omega^2 \quad (3.28)$$

3.2 Geometrija težnostnega polja

Težnostni potencial mora vsebovati vse informacije, ki obstajajo o težnostnem polju. Kako pa potem lahko uporabimo potencial za opis in prikaz nepravilnosti težnostnega polja? Najbolj preprost način je s pomočjo ekvipotencialnih ploskev in njihovih silnic. Krajevne značilnosti težnostnega polja opisujejo ukrivljenost nivojskih ploskev in težiščnic, prav tako pa "krajevno" geometrijo določata naravne koordinate obravnavane točke.

3.2.1 Nivojske ploskve in težiščnica

Ploskve s konstantnim potencialom imenujemo ekvipotencialne ploskve ali nivojske ploskve:

$$W(x,y,z)=C=\text{konst} \quad (3.29)$$

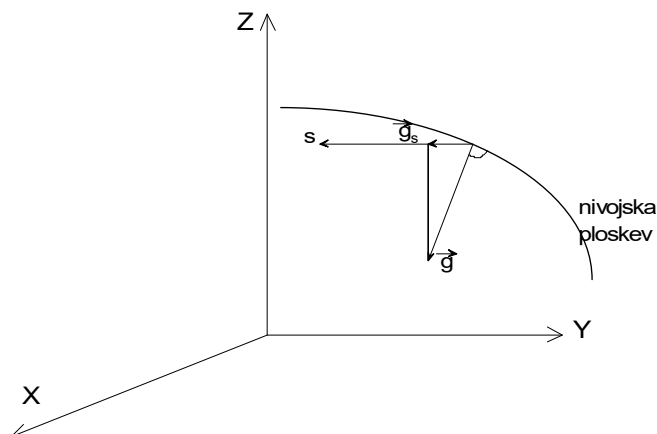
V primeru težnostnega potenciala jih imenujemo tudi geopotencialne ploskve težnosti – *geope*. Za premik po nivojski ploskvi ni potrebno vložiti nikakršnega dela, torej so nivojske ploskve *ploskve ravnotežja*. L. Durang Clay je podal naslednjo definicijo nivojske ploskve:

"Nivojska ploskev je ploskev, ki jo lahko obhodimo brez vzpenjanja ali spuščanja in na kateri je potemtakem delo sile teže za materialno točko, ki se po njej giblje, enako nič. Ta ploskev je v vseh svojih točkah pravokotna na smer sile teže. To smer imenujemo navpičnica."

Poiščimo odvod težnostnega polja v dani smeri s . Iz vektorske analize sledi, da je odvod polja v dani smeri enak skalarnemu produktu gradienta polja in vektorske enote v tej smeri. Naj bo vektorska enota v smeri s podana: $s=(dx,dy,dz)$. Odvod potenciala v smeri s je podan z:

$$dW=\text{grad } W \cdot s = \mathbf{g} \cdot s \quad (3.30)$$

Odvod polja v dani smeri je enak pravokotni projekciji gradienta na dano smer (slika 3.5).



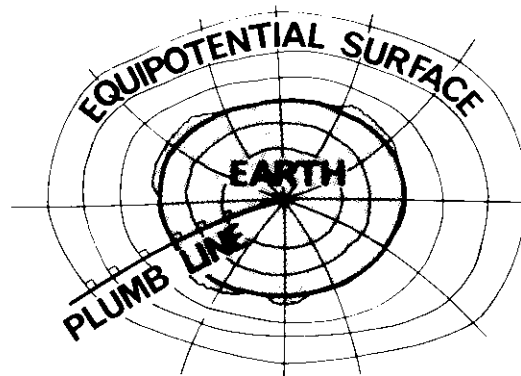
slika 3.5: Odvod težnostnega polja v dani smeri

Če je vektor \mathbf{s} privzet v smeri nivojske ploskve $W = W_0$, je potencial stalen in je $dW = 0$, tako da enačba (3.30) postane:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = 0$$

Če je skalarni produkt dveh vektorjev nič, sta vektorja medsebojno pravokotna (kot, ki ga vektorja oklepata je 90° , $\angle(\mathbf{g}, \mathbf{s}) = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$). S tem je dokazano znano dejstvo, da je vektor sile teže pravokoten na nivojske ploskve.

Težnostno polje je vektorsko polje, zato pri njem pomembno vlogo igrajo *silnice*, smerne krivulje vektorskega polja. Silnice so krivulje v vektorskem polju, za katere velja, da se smer tangente vsake točke krivulje ujema s smerjo polja. Če vektorsko polje ni nikjer ničelni vektor, poteka skozi vsako točko vektorskega polja ena silnica. Silnice se med seboj ne sekajo. Grafično lahko ponazorimo vektorsko polje tudi tako, da narišemo silnice polja.



slika 3.6: ekvipotencialne ploskve zemeljskega težnostnega polja

Silnice težnostnega polja imenujemo težiščnice (ponazarja jih smer grezila). Pri težnostnem polju tangento določa smer vektorja sile teže (navpičnica). Torej je vektor sile teže v vsaki točki na površini Zemlje tangenta na težiščnico. Če gradient vektorskega polja ni ničelni vektor, potem kaže v tisto smer, v kateri polje najhitreje narašča (smer težiščnice), njegova velikost (intenziteta) pa je vrednost odvoda v dani smeri (vrednost težnega pospeška).

Pojmi kot "smer sile teže", "navpičnica", "vertikala" so sinonimi in pomenijo dejansko isto.

Vektor \mathbf{s} privzemimo sedaj vzdolž težiščnice, v nasprotni smeri vektorja sile teže, v smeri računanja nadmorskih višin točk (slika 3.6). Njegova dolžina (velikost vektorja) je:

$$|\mathbf{s}| = dH$$

Vektorja \mathbf{g} in \mathbf{s} oklepata kot 180° :

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = gdH \cos(\mathbf{g}, dH) = gdH \cos 180^\circ = -gdH$$

in skladno z definicijo skalarnega produkta, enačba (3.30) dobi obliko:

$$dW = -gdH \quad (3.31)$$

Enačba podaja zvezo med višino in potencialom in je osnova teorije določanja višin točk. Prikazuje neločljiv odnos, s katerim je zaznamovana geodezija: zvezo med diferencialno razliko potencialov, ki je fizikalna količina in diferencialno razliko višin sosednjih nivojskih ploskev, ki je geometrična količina.

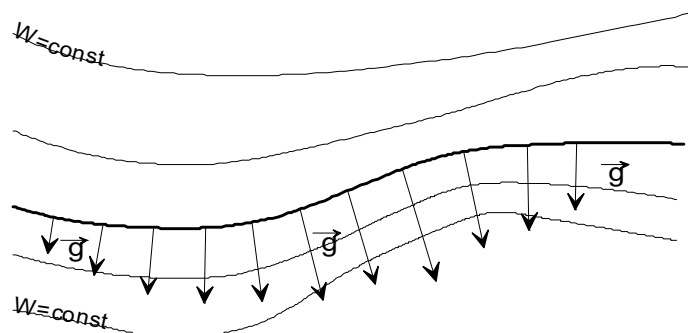
Primerjava enačb (3.30) in (3.31) kaže, da diferencialna razlika težnostnih potencialov ni odvisna od poti po kateri pridemo od ene do druge nivojske ploskve (odvisna je od projekcije na navpičnico).

Druga oblika enačbe (3.31) je:

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial W}{\partial H} \quad (3.32)$$

Vidimo, da je težni pospešek negativni vertikalni gradient težnostnega potenciala W , ali pa vertikalna komponentna vektorja grad W .

Težni pospešek je funkcija razdalje točke od centra zemeljskih mas, v bližini zemeljske skorje pa tudi funkcija razporeditve površinskih mas. Zato vrednost težnega pospeška na nivojskih ploskvah ni konstantna. Če se težni pospešek na nivojski ploskvi spreminja, potem se, skladno z enačbo (3.31), spreminja tudi oddaljenost dH med sosednjima ploskvama. Posledica navedenega dejstva je neparalelnost nivojskih ploskev (slika 3.7). Slika ponazarja zvezo med velikostjo težnosti in oddaljenostjo nivojskih ploskev. Čim večja je težnost, tem bližje so druga drugi nivojske ploskve, saj težnost predstavlja kvocient razlike potencialov dveh neskončno sosednjih ploskev in njune oddaljenosti (enačba 3.32).



slika 3.7: težnost na ekvipotencialnih ploskvah

Vrednost težnega pospeška narašča od ekvatorja proti polu, (razlika znaša $0,05 \text{ ms}^{-2}$). Nivojske ploskve se torej približujejo druga drugi v isti smeri, konvergirajo proti polu

(slika 3.5). Čim bolj so si nivojske ploskve skupaj, tem močnejše je težnostno polje oz. večji je težni pospešek. Relativno zmanjšanje razdalje med ploskvama znaša 0,54%, kar pomeni, da oddaljenosti nivojskih ploskev na ekvatorju 100 m, ustreza oddaljenost na polih 99,5 m.

3.2.2 Ukrivljenost nivojskih ploskev in težiščnice

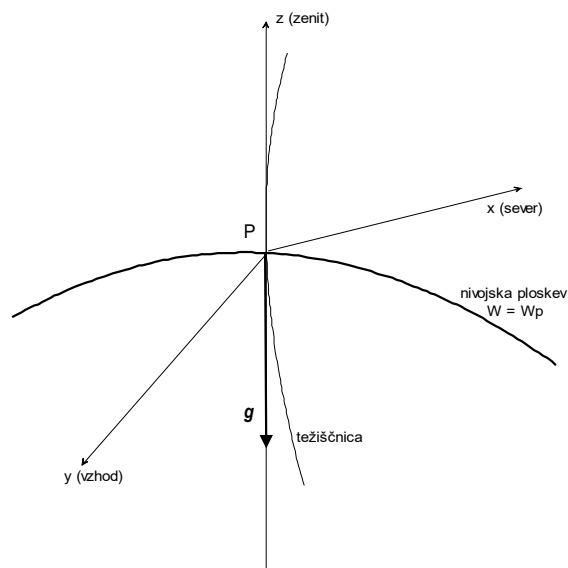
Težiščnice - silnice v polju sile teže sekajo vse nivojske ploskve pod pravim kotom in niso premice, temveč imajo določeno ukrivljenost. Splošno so težiščnice prostorske krivulje. Zaradi nepravilnosti v ukrivljenosti nivojskih ploskev in sprememb gostote zemeljske notranjosti, vsebujejo težiščnice razen fleksijske ukrivljenosti oz. upognjenosti (ki se tudi spreminja vzdolž točk na njej), tudi torzijsko ukrivljenost oz. zvitost. Čeprav so vse omenjene nepravilnosti težiščnic pomembne, so relativno majhne in jih v določenih obravnavah lahko tudi zanemarimo.

Nivojske ploskve so zvezne (brez prekinjenosti), gladke ploskve in se nikoli ne sekajo. Nivojske ploskve so povsod izbočene, torej ne vsebujejo nižin, korit ali dolin. Lokalni polmeri ukrivljenosti nivojskih ploskev se malo spreminjajo od točke do točke (pravimo, da je potek sprememb gladek). Izjeme so točke, kjer prihaja do nepričakovanih sprememb gostote, kot na primer površje Zemlje.

Nivojske ploskve v težnostnem polju Zemlje imenujemo tudi *geope* ali geopotencialne ploskve.

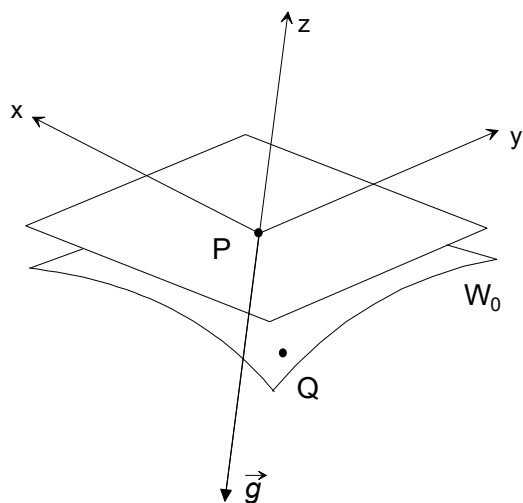
3.2.3 Analitični prikaz nivojskih ploskev

Že bežen pogled na enačbo (3.25) za težnostni potencial nam da vedeti, da so ekvipotencialne ploskve $W(x,y,z)=W_0$ v matematičnem pogledu zelo komplicirane ploskve. Nivojske ploskve, ki se nahajajo popolnoma zunaj Zemlje, je možno predstaviti z analitičnimi funkcijami (zaradi tega, ker je težnostni potencial zunaj Zemlje analitična funkcija). To pa ne velja, če nivojske ploskve potekajo deloma ali popolnoma znotraj Zemlje. Nivojske ploskve so zvezne, vendar niso analitične, zaradi nepravilnosti v razporeditvi gostote. Takšne ploskve konstruiramo z analitičnimi funkcijami, ki jih določamo odsekoma. Te odseke nivojskih ploskev lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto.

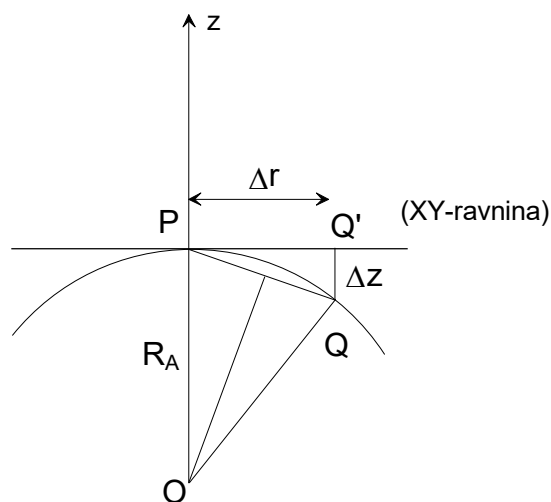


slika 3.8: Lokalni astronomski k.s. (LA sistem)

Obravnavajmo točko P na nivojski ploskvi W_0 . Vpeljimo v točki P lokalni astronomski koordinatni sistem: Z -os sovpada s smerjo grezila (navpičnica), torej nam smer osi Z definira zenit točke P . Os X je usmerjena proti severu, Y -os pa proti vzhodu tako, da tvori levi koordinatni sistem (slika 3.8). Ravnina XY je tangenta ravnina nivojske ploskve v točki P . Obravnavajmo še eno točko Q , ki se tudi nahaja na nivojski ploskvi W_0 , v neposredni bližini točke P .



Nivojska ploskev s točkama P in Q in s tangento ravnino v LA-sistemu



Prerez skozi nivojsko ploskev, ki vsebuje točki P in Q

Slika 3.9

Potencial v točki P $W(x,y,z)$ lahko približno izračunamo prek potenciala točke Q , ki ga razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$W(Q) = W(P) + W(P)_x \Delta x + W(P)_y \Delta y + W(P)_z \Delta z +$$

$$\frac{1}{2} [W(P)_{xx}\Delta x^2 + W(P)_{yy}\Delta y^2 + W(P)_{zz}\Delta z^2] + \\ W(P)_{xy}\Delta x\Delta y + W(P)_{xz}\Delta x\Delta z + W(P)_{yz}\Delta y\Delta z + \dots$$

W_x, W_y itd. so parcialni odvodi v točki P . Ker je P na nivojski ploskvi velja:

$$W(Q) = W(P) = W_0, \quad W_x = W_y = 0, \quad W_z = -g$$

Prav tako je prirastek $\Delta z \ll \Delta y$ oz. Δx , pri čemer je Δz vertikalna oddaljenost nivojske ploskve od tangentne ploskve in je mnogo manjša od horizontalnega prirastka (odmika) v tangentni ravnini. Če se omejimo samo na člene druge stopnje, dobimo zgornjo vrsto v obliki:

$$0 = -g\Delta z + \frac{1}{2g}(W_{xx}\Delta x^2 + 2W_{xy}\Delta x\Delta y + W_{yy}\Delta y^2) \quad (3.33)$$

Zanima nas ukrivljenost nivojske ploskve v točki P . Ta je enaka ukrivljenosti krivulje, ki predstavlja normalni presek ploskve. Vpeljimo krivinski polmer krivulje nivojske ploskve R_A v smeri poljubnega azimuta A , in ustrezno ukrivljenost $k_A = 1/R_A$.

Na sliki desno je prikazan prerez nivojske ploskev, ki vsebuje točki P in Q , torej to je ploskev, ki vsebuje tudi Z -os LA sistema (to je normala na nivojsko ploskev).

Dogovorno smo vzeli, da je ukrivljenost negativna (konveksna ploskev) če se središčna točka ukrivljenosti nahaja v negativnem polprostoru xyz baze oz. pozitivna (konkavna ploskev) če točka leži v pozitivnem polprostoru. S slike lahko razberemo:

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2}}{R_A} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2}} \quad \text{oz.} \quad \frac{1}{R_A} = \frac{2\Delta z}{\Delta r^2 + \Delta z^2} \approx \frac{2\Delta z}{\Delta r^2}$$

Če to vstavimo v izraz (3.33) in upoštevamo, da je $\Delta x = \Delta r \cos A$ in $\Delta y = \Delta r \sin A$, dobimo za konveksno nivojsko ploskev ukrivljenost:

$$k_A = \frac{1}{R_A} = \frac{1}{g}(W_{xx} \cos^2 A + W_{yy} \sin^2 A + 2W_{xy} \sin A \cos A)$$

Od tod lahko izračunamo krivinska polmera v smeri proti severu ($A=0^\circ$) in smeri proti vzhodu ($A = 90^\circ$):

$$k_1 = \frac{1}{R_x} = -\frac{W_{xx}}{g} \quad \text{smer N-S} \\ k_2 = \frac{1}{R_y} = -\frac{W_{yy}}{g} \quad \text{smer E-W}$$

Torzija v smeri meridiana je definirana kot:

$$t_1 = t_2 = -\frac{W_{xy}}{g}$$

Povprečna ukrivljenost nivojske ploskve v točki P je:

$$H(J) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_Y} + \frac{1}{R_X} \right) = -\frac{1}{2g} (W_{YY} + W_{XX})$$

Zgornji izraz uvedemo v generalizirano Poissonovo diferencialno enačbo in na ta način dobimo zvezo med ukrivljenostjo nivojske ploskve in vertikalno komponento gradienta težnosti:

$$\begin{aligned} \Delta W &\equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \\ -2gJ + W_{zz} &= -4\pi G\rho + 2\omega^2 \end{aligned}$$

Če vemo, da je:

$$W_z = -g, \quad W_{zz} = -\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial H}$$

Dobimo končno:

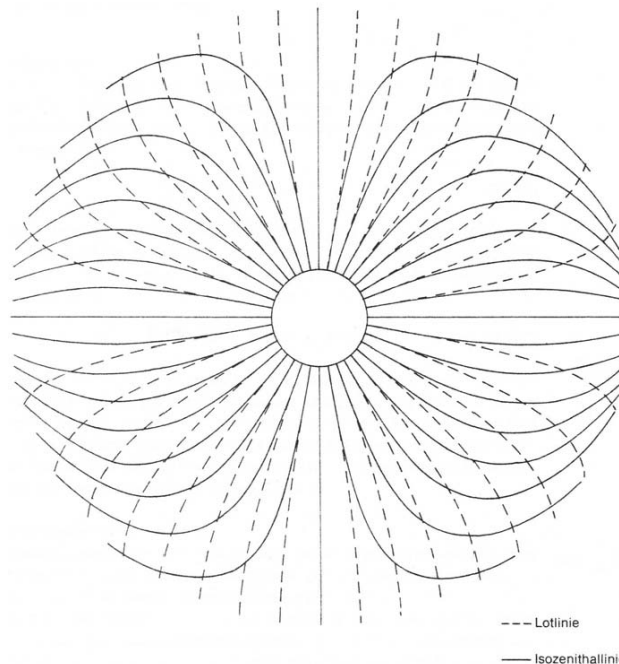
$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2 \quad (3.34)$$

To zvezo je prvi izpeljal Bruns leta 1878. Enačba podaja teoretično možnost določitve ukrivljenosti s pomočjo meritev težnosti. To je še en primer neločljive zveze med geometrijsko in dinamično zasnovano geodezije.

Ukrivljenost težiščnice v točki P je podana z naslednjimi enačbami:

$$f_1 = -\frac{W_{XZ}}{g} \text{ smer N-S}, \quad f_2 = -\frac{W_{YZ}}{g} \text{ smer E-W}$$

Ukrivljenost težiščnic je grafično ponazorjena na sliki spodaj.



Slika 3.10: Težiščnice in izozenitalne krivulje zunaj elipsoida

Potrebujemo jih za redukcijo astronomskih geografskih koordinat na geoid. Iz zgornjih enačb je razvidno, da je ukrivljenost nivojskih ploskev in težiščnic odvisna od drugih odvodov težnostnega potenciala. Kot je znano ti vsebujejo nezveznost na mestih nenadnih sprememb gostote.

3.2.3 Gradient težnosti

Vektor težnega pospeška se v lokalnem astronomskem koordinatnem sistemu (LAS) glasi:

$$\mathbf{g}^T = (\text{grad } W)^T = (W_x, W_y, W_z) \quad (3.35)$$

Z odvajanjem vektorja težnega pospeška dobimo tenzor gradienta težnosti ali t.i. *Eötvöseve tenzor* (drugi odvodi težnostnega potenciala):

$$\text{grad } \mathbf{g} = \text{grad}(\text{grad } W) = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Tenzor je linearni operator v prostoru vektorjev, ki preslika en vektor v drugega. Težnostno polje je brez vrtincev, torej velja:

$$W_{xy} = W_{yx}; \quad W_{xz} = W_{zx}; \quad W_{yz} = W_{zy} \quad (3.37)$$

Tretja vrstica v tenzorju (3.36) predstavlja gradient težnega pospeška. To je vektor, ki kaže v smeri največjega naraščanja težnosti (pri tem je $W_z = -g$)

$$\text{grad } g = \begin{bmatrix} \partial g / \partial x \\ \partial g / \partial y \\ \partial g / \partial z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{zx} \\ W_{zy} \\ W_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Horizontalni gradient težnega pospeška tvorita komponenti $\partial g / \partial x$ in $\partial g / \partial y$: kažeta v smeri največjega naraščanja težnosti v horizontalni ravnini. Horizontalni gradient težnosti določa tudi ukrivljenost težiščnice v točki obravnave (točka P).

Vertikalni gradient $\partial g / \partial z = -W_{zz}$ podaja spremembo težnega pospeška v višini.

Gradient težnega pospeška je pomemben pri določitvi sprememb težnega pospeška po enoti dolžine. Uporablja se za vrednotenje in interpretacijo podatkov gravimetrične izmere. Horizontalni gradient težnega pospeška lahko merimo s pomočjo *gradiometra* ali pa *torzijske tehtnice*. Osnovna enota gradienta težnega pospeška je Eötvös (E):

$$1E = 1 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2} = 1 \text{ } \mu\text{ms}^{-2}/\text{km} = 0,1 \text{ mgal}/\text{km}$$

Upoštevajoč enačbi (3.27) in (3.28) za generalizirano Poissonovo in Laplaceovo enačbo in izraz (3.37) vidimo, da ima težnostni potencial W samo 5 (od skupno 9) neodvisnih drugih odvodov.

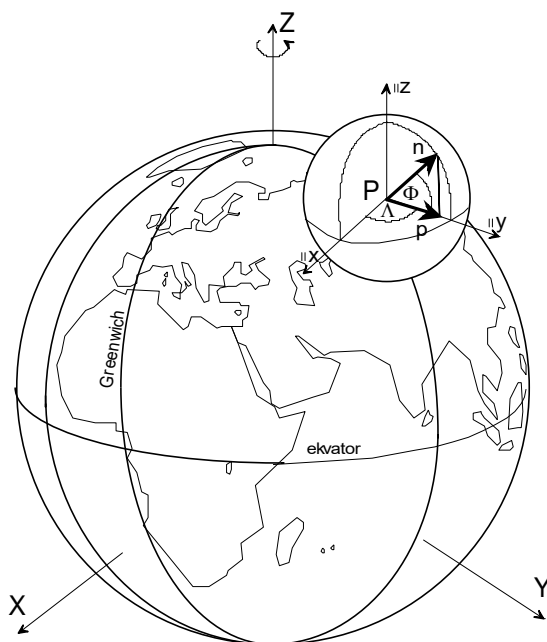
3.2.4 Sistem naravnih koordinat

Nivojske ploskve in težiščnice lahko vzamemo za osnovo krivočrtnega koordinatnega sistema, ki ima za posamezne geodetske naloge določene prednosti. Za razliko od kartezičnih koordinat x, y, z lahko te koordinate neposredno določimo z meritvami. Sistem naravnih koordinat podaja položaj točke glede na dve "naravni smeri": smer navpičnice in smer rotacijske osi Zemlje.

Sistem naravnih koordinat tvorijo: astronomska geografska širina Φ , astronomska geografska dolžina Λ , in težnostni potencial W .

Točka P je v ukrivljenem prostoru težnostnega polja določena s presekom nepravokotnih koordinatnih ploskev ($\Phi = \text{const.}$, $\Lambda = \text{const.}$ in $W = \text{const.}$). Koordinatne krivulje (Φ -krivulja = astronomski meridian, Λ -krivulja = astronomski vzporednik, W -krivulja = izozenitalna krivulja) so prostorske krivulje z dvojno ukrivljenostjo. Astronomske koordinate lahko določimo neposredno z meritvami; težnostnega potenciala ne moremo neposredno meriti, lahko pa določamo razlike potencialov s pomočjo geometričnega nivelmana v kombinaciji z gravimetričnimi meritvami.

Položaj točke na nivojski ploskvi se lahko izrazi z urejeno dvojico koordinat (Φ, Λ). Le te lahko upodobimo s pomočjo enotske krogle s središčem v točki obravnave P . Če povežemo urejeno dvojico koordinat s središčem enotske krogle, dobimo za vsako točko enotski vektor \mathbf{n} , ki podaja smer navpičnice v točki obravnave in je funkcija geografskih koordinat Φ in Λ (slika 3.9). Vektor \mathbf{p} je projekcija vektorja \mathbf{n} v ravnini, vzporedni z ekvatorsko ravnino. Kot med vektorjema \mathbf{p} in \mathbf{n} je astronomska širina Φ točke P ; kot med vektorjem \mathbf{p} in ravnino Greenwiškega meridiana je astronomska dolžina Λ .



slika 3.9: sistem naravnih koordinat
(smer normalnega vektorja glede na astronomske geografske koordinate)

Ker je $|\mathbf{n}|=1$, $|\mathbf{p}|=\cos\Phi$, ima vektor \mathbf{p} koordinate v kartezičnem koordinatnem sistemu:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Enotski vektor vzdolž težiščnice \mathbf{n} se razlikuje od vektorja \mathbf{p} samo v koordinati z :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Ker je vektor sile teže \mathbf{g} gradient težnostnega potenciala, lahko podamo njegove koordinate v kartezičnem koordinatnem sistemu:

$$\mathbf{g}^T = \text{grad } W(x,y,z)^T = (W_x, W_y, W_z)^T \quad (3.40)$$

Enotski vektor \mathbf{n} sovpada vektorjem sile teže \mathbf{g} , vendar ima nasprotno smer. Torej velja:

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} = -\frac{\mathbf{g}}{g} \text{ oz. } \mathbf{g} = -g\mathbf{n}$$

Zgornja enačba, v kombinaciji z enačbama (3.39) in (3.40) nam poda:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Zgornja enačba kaže na še eno zanimivo zvezo med fizikalnim in geometrijskim pristopom geodezije. Če izhajamo iz fizike (težnostni potencial), lahko določimo astronomske koordinate Φ , Λ kot tudi geometrijo prostora (n.pr. ukrivljenost zemeljskega površja).

Enačba (3.41) izraža vektor sile teže oz. parcialne odvode težnostnega potenciala kot funkcijo astronomskih geografskih koordinat. Obratna povezava astronomskih koordinat kot funkcija odvodov težnostnega potenciala tudi velja. Iz (3.41) dobimo:

$$W_x^2 + W_y^2 = g^2 \cos^2\Phi (\cos^2\Lambda + \sin^2\Lambda) = g^2 \cos^2\Phi$$

in

$$\frac{W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}} = \frac{-g \sin\Phi}{g \cos\Phi} = -\tan\Phi$$

tudi

$$\frac{W_Y}{W_X} = \tan \Lambda$$

Končno lahko napišemo:

$$\Phi = \arctan \frac{-W_Z}{\sqrt{W_X^2 + W_Y^2}} \quad (3.42)$$

$$\Lambda = \arctan \frac{W_Y}{W_X}$$

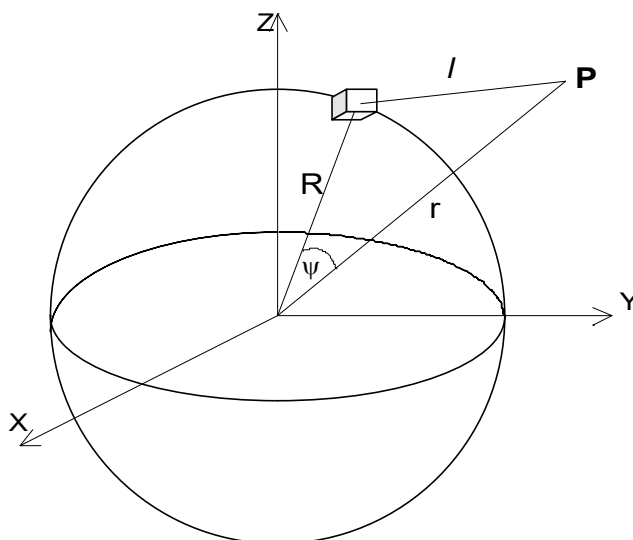
Enačba (3.37) kaže, da je možno določiti astronomske koordinate, če poznamo funkcijo razporeda težnostnega potenciala.

3.3 Prikaz gravitacijskega potenciala s pomočjo sfernih funkcij

Znan nam je izraz za potencial privlačanja med Zemljo in točko zunaj nje.

$$V = G \iiint_{Zemlja} \frac{dm}{l} = \iiint_{Zemlja} \frac{\rho}{l} dv$$

Vzemimo element mase dm na površini Zemlje s polmerom R (slika 3.10). Oznake so naslednje: R je polmer krogle, l je razdalja točke od elementa mase dm , r je krajevni vektor obravnavane točke P , Kot ψ je kot med krajevnima vektorjema točke P in elementom mase.



slika 3.10: razvoj recipročne razdalje l v vrsto po sfernih funkcijah

Recipročna razdalja $1/l$ se lahko predstavi v obliki vrste²:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\cos\psi) \quad (3.43)$$

$P_n(\cos\psi)$ je Legendrov polinom. Če to vrsto vstavimo v izraz za potencial v obliki prostorninskega integrala in vpeljemo krogelne koordinate (r, θ, λ) dobimo potencial v obliki vrste sfernih funkcij (pri tem smo integral zamenjali s neskončno vrsto):

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \quad (3.44)$$

kjer so A_{nm} in B_{nm} , koeficienti razvoja sfernih funkcij, $P_{nm}(\cos\theta)$ pa prirejene Legendrove funkcije I. vrste stopnje n reda m ; r je (geocentrični) radij vektor obravnavane točke. Ta razvoj velja za točko zunaj Zemlje kjer je potencial harmonična funkcija.

Prvi člen razvoja za $n=0$ je GM/r , tako da je vrsta (3.44) v literaturi pogostokrat napisana v obliki:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right] \quad (3.45a)$$

oz. v satelitski geodeziji v obliki:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) \right] \quad (3.45b)$$

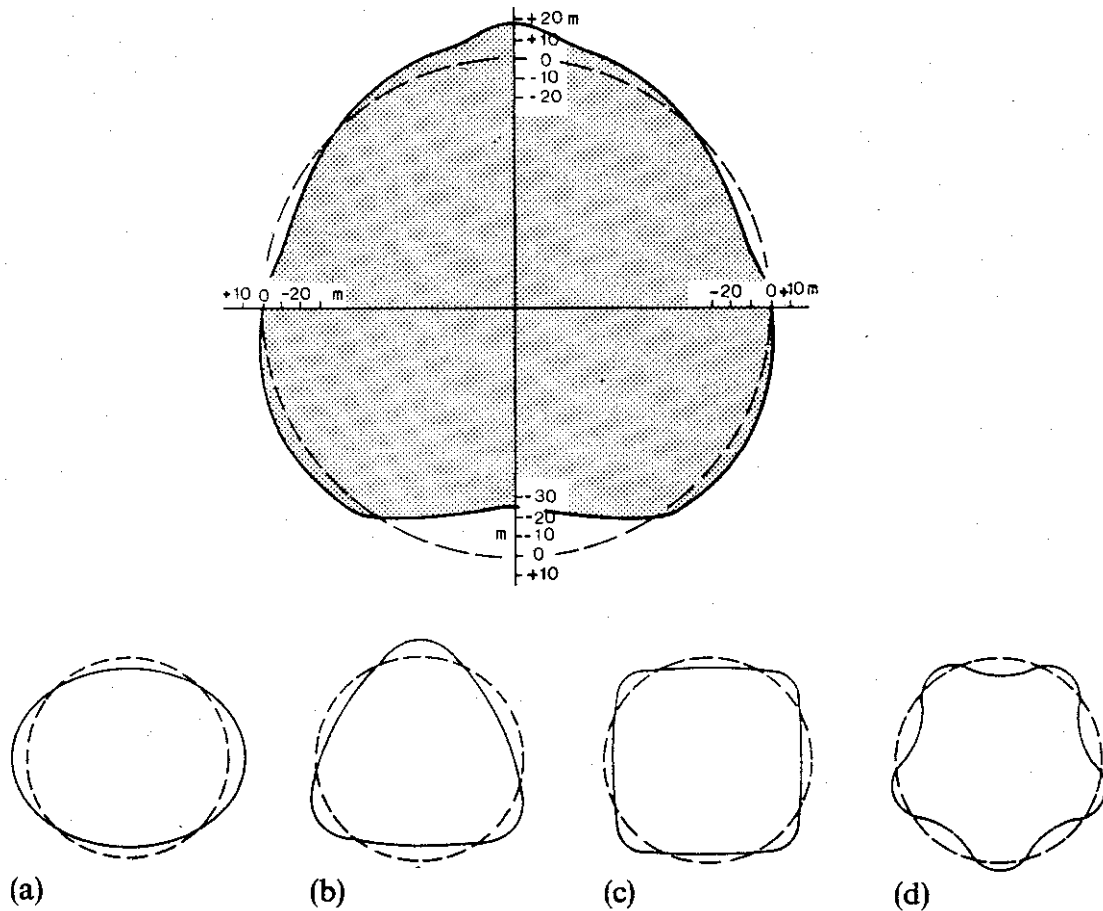
pri tem so: M – skupna masa Zemlje in atmosfere, a – ekvatorialni radij Zemlje (velika polos geocentričnega zemljinega elipsoida; $a=R$). Koeficienti razvoja so v naslednji medsebojni zvezi:

$$\begin{aligned} C_{nm} &= A_{nm} / GMa^n & S_{nm} &= B_{nm} / Gma^n \\ J_{nm} &= -A_{nm} / Gma^n & K_{nm} &= -B_{nm} / Gma^n \end{aligned}$$

V vrstah (3.45) je stalni člen GM/r (za $n=0$) srednja vrednost Zemljinega gravitacijskega potenciala. Ta bi nastopil če bi Zemlja bila krogla. Ostali členi (koeficienti) predstavljajo odstopanje potenciala od te srednje vrednosti. Koeficienti razvoja gravitacijskega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah so integrali mase, oz. funkcije razporeditve mas Zemlje, njihova velikost je odvisna od razporeda mas znotraj zemlje (ki pa žal ni znana). Ti imajo tudi fizikalno oz. geometrijsko razlago. Geometrijsko opisujejo koeficienti odstopanje Zemlje od rotacijske simetrije (odstopanje Zemlje od krogle). Največje odstopanje Zemlje od sferne simetrije

² Recipročna razdalja med dvema točkama je najbolj enostavna harmonična funkcija (imenuje se tudi fundamentalna harmonična funkcija).

predstavlja njena sploščenost na polih in ekvatorske izbokline. Ker so koeficienti funkcija mase, pomeni, da tam kjer je potencial pozitiven je prisoten višek mas, kjer pa je potencial negativen, je prisoten primanjkljaj mas.



slika 3.11: členi razvoja nižje stopnje in oblika Zemlje

V fizikalni razlagi koeficienti drugega reda vsebujejo vztrajnostne momente in centrifugalne vztrajnostne momente Zemlje glede na posamezne koordinatne osi (geocentričnega kartezičnega koordinatnega sistema). Za pojasnitev te zveze si bomo pomagali s poljubnim kartezičnim koordinatnim sistemom, vezanim na Zemljo. Poljubna točka s krogelnimi koordinatami (r, θ, λ) je v novem sistemu predstavljena s koordinatami (x', y', z') . Potem koeficienti razvoja dobijo naslednjo obliko:
za $n=0$:

$$A_{00} = G \iiint_{Zemlja} dm = GM \quad B_{00} = 0$$

Za $n=1$:

$$A_{10} = G \iiint_{Zemlja} z'dm \quad A_{11} = G \iiint_{Zemlja} x'dm \quad B_{11} = G \iiint_{Zemlja} y'dm \quad B_{10} = 0$$

Integrali, deljeni z maso M , so koordinate masnega središča Zemlje. Če izhodišče našega koordinatnega sistema postavimo v težišče Zemlje (kot je to ponavadi običaj), dobimo *geocentrični koordinatni sistem*, iz česar sledi, da so koeficienti za $n=1$ enaki nič.

Za $n=2$:

$$A_{20} = \frac{G}{2} \iiint_{Zemlja} (2z'^2 - x'^2 - y'^2) dm \quad A_{21} = G \iiint_{Zemlja} x' z' dm$$

$$B_{21} = G \iiint_{Zemlja} y' z' dm \quad A_{22} = \frac{G}{4} \iiint_{Zemlja} (x'^2 - y'^2) dm \quad B_{22} = \frac{G}{2} \iiint_{Zemlja} x' y' dm$$

Zgornji integrali vsebujejo *vztrajnostne momente* Zemlje na posamezne koordinatne osi:

$$A = \iiint (y'^2 + z'^2) dm \quad B = \iiint (x'^2 + z'^2) dm \quad C = \iiint (x'^2 + y'^2) dm$$

in centrifugalne vztrajnostne momente (v mehaniki so ti tudi znani kot deviacijski vztrajnostni momenti):

$$D = \iiint x' y' dm \quad E = \iiint y' z' dm \quad F = \iiint x' z' dm$$

Centrifugalni vztrajnostni momenti so enaki nič, če se koordinatne osi ujemajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa. Z -os našega geocentričnega koordinatnega sistema sovpada s srednjo rotacijsko osjo Zemlje (pri tem zanemarimo gibanje zemeljskih polov). Le-ta pa se ujema z najdaljšo glavno vztrajnostno osjo (določa smer vrtilne osi telesa), torej sta E in F enaka nič. Od tod sledi, da sta koeficienta razvoja A_{21} in B_{21} enaka nič. B_{22} je sorazmeren prvemu centrifugalnemu vztrajnostnemu momentu; postal bi nič samo, če bi Zemlja imela popolno rotacijsko simetrijo, ali pa bi bila glavna vztrajnostna os v smeri Greenwiškega meridiana.

Z uvedenimi predpostavkami, postane koordinatni sistem koaksialen z osnovnim vztrajnostnim elipsoidom, t.j. sistem postane t.i. *naravni geocentrični koordinatni sistem*.

Za koeficiente lahko sedaj napišemo:

$$A_{00} = GM$$

$$A_{10} = A_{11} = B_{10} = B_{11} = 0$$

$$A_{20} = G \left(\frac{A + B}{2} - C \right)$$

$$A_{21} = B_{21} = 0$$

$$A_{22} = (G/4) * (B - A) \quad B_{22} = (G/2) * D$$

Koeficient A_{20} (v obliki J_2) določa sploščenost Zemlje (razlika med srednjima ekvatorskima vztrajnostnima momentoma $A \approx B$ in polarnim vztrajnostnim momentom); večji je od ostalih koeficientov **tri velikostna razreda** (kar ukazuje na njegovo pomembnost). Znan je tudi pod imenom "dynamical form factor" (je eden od definicijskih parametrov geodetskih referenčnih sistemov). Točno se J_2 glasi:

$$J_2 = \frac{1}{a^2 M} \left(\frac{A + B}{2} - C \right)$$

Za geodetski referenčni sistem GRS 80, ki je skoraj identičen s sistemom WGS-84, znaša vrednost $J_{20} = 1082,7 \times 10^{-6}$. Koeficienta A_{22} (J_{22}) in B_{22} (K_{22}) predstavljata odstopanje razporeditve mas Zemlje od njene rotacijske simetrije (t.i. eliptičnost ekvatorja). Koeficient A_{30} (J_3) povzroča trikotniško obliko Zemlje. Koeficient A_{40} (J_4) povzroča četverkotno obliko Zemlje; zato ima Zemlja hruškasto obliko (slika 3.11).

Iz vsega naštetega lahko torej sklepamo, da razvoj v vrsti (A-42) praktično začenja šele s členom $n=2$.

Takšen prikaz zemeljskega gravitacijskega potenciala se običajno imenuje geopotencialni model.

Zakaj sploh potrebujemo razvoj potenciala v vrsto po sfernih funkcijah? V vrsti (3.44) oz. (3.45) so neznani koeficienti razvoja. Če primerjamo potencial v obliki vrste in potencial v obliki prostorninskega integrala (enačba 3.10) vidimo, da je lažje določiti neznane koeficiente razvoja, kot pa rešiti integral z neznano funkcijo razporeda gostote. Neznane koeficiente razvoja lahko določimo iz podatkov satelitskih opazovanj, satelitske altimetrije in gravimetrične izmere.

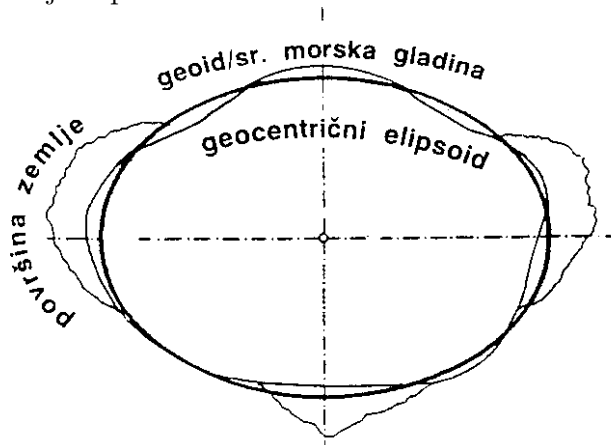
3.4 Oblika Zemlje

Obliko Zemlje lahko predstavimo z eno od nivojskih ploskev težnostnega potenciala, saj so vsa dogajanja na fizični površini Zemlje tesno povezana s silo teže. V fizikalnem pogledu se obliki Zemlje najbolj prilega nivojska ploskev, imenovana geoid. To je po Gaussu potencialna ploskev zemeljskega telesa, ponazorjena s srednjo gladino svetovnih morij in v mislih podaljšana pod celinami. Geoid je podan z enačbo:

$$W = W(x, y, z) = W_0$$

Geoid je zaprta, zvezna nivojska ploskev, ki se delno širi znotraj, delno pa zunaj Zemlje. Ukrivljenost geoidne ploskve kaže razgibanost pri naglih spremembah gostote. Geoid je primeren za proučevanje težnostnega potenciala (določanje potencialnih in višinskih razlik z nivelmanskimi in gravimetričnimi meritvami), ni pa primeren za geodetske izračune, saj geoida ni mogoče podati z enostavnimi matematičnimi izrazi.

Težnostni potencial ni neposredno izmerljiva količina, geoid pa je z njo definiran. Geoid, kot referenčna ploskev za določanje višinskih razlik točk na Zemlji, je t.i. ničelna nivojska ploskev. Za njeno upodobitev si pomagamo s srednjo gladino morja, ki pa odstopa od trenutne nivojske ploskve za vrednosti ± 1 do ± 2 m.



slika 3.12: Zemlja, geoid, elipsoid

V matematičnem pogledu se obliki Zemlje najbolj prilega dvoosni rotacijski elipsoid, ki je tudi izbran kot referenčna ploskev za določanje položaja točk na Zemlji. Čeprav Zemlja ni idealen elipsoid, ima elipsoidno težnostno polje velik praktičen pomen pri proučevanju realnega Zemljinega polja težnosti. Težnostno polje elipsoida je možno matematično enostavno izraziti in njegova odstopanja od realnega polja Zemlje so tako majhna, da jih lahko štejemo za linearna. Razčlenitev težnostnega polja Zemlje na "normalno" težnostno polje in preostali mali del, t.i. "moteče" polje, v veliki meri poenostavlja njegovo določanje. Problem bi bilo težko rešiti na drugačen način.

3.4.1 Normalno težnostno polje

Za določitev "normalnega" težnostnega polja je potrebno zagotoviti določeni referenčni "normalni" model Zemlje. To je rotacijski elipsoid, čigar ploskev je ekvipotencialna ploskev lastnega težnostnega polja. Takšen elipsoid imenujemo *nivojski elipsoid*. Potencial normalnega težnostnega polja nivojskega elipsoida se lahko predstavi z enačbo:

$$U = U(x,y,z) \quad (3.46)$$

Nivojski elipsoid je ploskev enakega potenciala $U_0 = \text{konst.}$ kot geoid $W_0 = \text{konst.}$, torej velja:

$$U_0 = W_0$$

Nivojski elipsoid normalnega težnostnega polja je v popolnosti določen s parametri rotacijskega elipsoida: geometričnima: veliko polosjo a , in sploščenostjo f , ter

fizikalnima: maso M (enako skupni masi Zemlje in atmosfere) in kotno hitrostjo rotacije ω (enako Zemljini). Z določeno maso M je določen normalni potencial U . Podrobno poznavanje razporeda gostote znotraj elipsoida, ki povzroča potencial, ni potrebno, saj Stokesov teorem omogoča njegovo določitev. *Stokes-Poincaré teorem* zagotavlja:

"če se telo mase M vrti s konstantno hitrostjo ω okoli fiksne osi in če je S nivojska ploskev njegovega težnostnega potenciala takšna, da v celoti zajema njegovo maso M , potem je težnostni potencial v zunanosti ploskve S enolično določen".

Poznavajoč kotno hitrost ω lahko izračunamo normalni težnostni potencial:

$$U = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (3.47)$$

Pri določitvi normalnega težnostnega polja je potrebno podati povezavo med fizikalnimi parametri polja (nivojski elipsoid) in geometričnimi parametri rotacijskega elipsoida. Izhajamo iz znane zveze med vektorskimi in skalarnimi funkcijami. Vektor normalne sile teže je gradient normalnega težnostnega potenciala:

$$\gamma = \text{grad } U \quad (3.48)$$

Velikost vektorja normalne sile teže je normalni težni pospešek. Najbolj pomembna parametra normalnega težnostnega polja sta vrednosti normalnega težnega pospeška na ekvatorju γ_a in na polu γ_b . Normalni težni pospešek je pravokoten na nivojski elipsoid in njegova vrednost na elipsoidu je podana z znanim izrazom (Somiglianna, 1929):

$$\gamma_0 = \frac{\alpha \gamma_a \cos^2 \phi + b \gamma_b \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \quad (3.49a)$$

pri čemer sta a in b velika in mala polos elipsoida, ter ϕ elipsoidna (geodetska) širina. Pogostokrat se normalna težnost na ekvatorju in polu označujeta z γ_e , γ_p . Somigliannova enačba, prirejena za numerične izračune se glasi:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (3.49b)$$

pri tem je k :

$$k = \frac{b \gamma_p}{\alpha \gamma_e} - 1$$

Teorem Clairauta (1738) daje zvezo med geometričnimi f in fizikalnimi parametri nivojskega elipsoida f^* , m :

$$f + f^* = \frac{5}{2} m \quad (3.50)$$

Teorem z drugimi besedami pravi, da je možno s pomočjo gravimetričnih meritev določiti geometrično sploščenost Zemlje (enačba je podana v svoji izvorni, tj. približni obliki). Omenjene količine so naslednje:

$$f = \frac{a-b}{a} \quad \text{geometrična sploščenost elipsoida,}$$

$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} \quad \text{težnostna sploščenost,}$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad \text{pomožna okrajšava.}$$

Pri strogem pristopu je v zgornje enačbe potrebno uvesti elipsoidne člene višjih redov in upoštevati odstopanja realnega težnostnega polja od normalnega. Upoštevajoč zgornje enačbe, lahko napišemo še en izraz za določitev vrednosti normalnega težnega pospeška na elipsoidu v odvisnosti od geodetske širine:

$$\gamma_o(\phi) = \gamma_a(1 + f^* \sin^2 \phi - 1/4 f_4 \sin^2 2\phi) \quad f_4 = \frac{1}{2} f^2 + \frac{5}{2} fm \quad (3.51)$$

Vrednost γ_o nam poda enačba Somigliane (3.49). Da bi določili vrednosti težnega pospeška v prostoru zunaj nivojskega elipsoida, razvijemo v Taylorjevo vrsto izraz za γ , glede na elipsoidno višino h (velja za male vrednosti višin)³:

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_o + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right)_0 h^2 + \dots \quad (3.52)$$

pri tem se γ in odvodi nanašajo na elipsoid ($h=0$).

Odvod $\partial \gamma / \partial h$ dobimo s pomočjo Brunsove enačbe (3.42) za prostor zunaj Zemlje ($\rho=0$).

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2gJ - 2\omega^2 \quad J = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right)$$

kjer smo dejanski težni pospešek (g) zamenjali z normalnim težnim pospeškom (γ) in M in N sta radija ukrivljenosti elipsoida v smeri meridiana in prvega vertikala.

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

Če napišemo recipročne vrednosti radijev in razvijemo izraze v oklepaju po binomskem obrazcu (omejimo se samo na prve člene):

³ Naj bo funkcija $y=f(x)$ na zaprtem intervalu $[a, a+h]$ zvezna in $(n-1)$ -krat odvedljiv, na odprtem intervalu (a, b) pa naj obstaja še odvod n -tega reda. Potem velja Taylorjeva formula:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$\frac{1}{M} = \frac{b}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2} = \frac{b}{a^2} (1 + \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \phi + \dots)$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{1/2} = \frac{b}{a^2} (1 + \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 \phi + \dots)$$

ter seštejemo dobimo:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{b}{a^2} (2 + 2e'^2 \cos^2 \phi) = \frac{2b}{a^2} (1 + 2f \cos^2 \phi)$$

Člen $2\omega^2$ v Brunsovi enačbi je zelo mali in če ga izrazimo s pomočjo količin m in γ , dobimo naslednji izraz za spremembo težnega pospeška z višino (vertikalna komponenta gradienta normalne težnosti):

$$\left(\frac{\delta\gamma}{\delta h} \right)_0 = -2 \frac{\gamma_0}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) \quad (3.53a)$$

ter vrednost normalne težnosti na elipsoidni višini h :

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) h \right) \quad (3.53b)$$

Za nekatere izračune zadošča že enačba v prvem približku (ekvatorialni radij elipsoida smo pri tem zamenjali s srednjim radijem Zemlje R ; $a=R$):

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 - 2 \frac{\gamma}{R} h \quad (3.53c)$$

V primeru, da potrebujemo večjo natančnost računanja γ , moramo poiskati še vrednost drugega odvoda v enačbi (3.52). Začnemo z sferno aproksimacijo za γ in zanemarimo e^2 , ter f :

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \quad \frac{\partial\gamma}{\partial h} = \frac{\partial\gamma}{\partial a} = -\frac{2GM}{a^3} \quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial a^2} = \frac{6GM}{a^4}$$

tako, da je:

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2} = \frac{6\gamma}{a^2}$$

Končno dobimo vrednost normalne težnosti na elipsoidni višini h (upoštevajoč odvode druge stopnje):

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right) \quad (3.54)$$

Mednarodno združenje za geodezijo in geofiziko (IUGG) je leta 1930 na generalni skupščini v Stokholmu na predlog italijanskega geodeta G. Cassinisa sprejelo izraz za izračun vrednosti težnega pospeška glede na privzeti referenčni elipsoid (na podlagi enačbe 3.51). Danes je v veljavi t.i. *Geodetski referenčni sistem 1980 (GRS 1980)* in izraz za γ_0 se glasi:

$$\gamma_o = 9,780327 (1 + 0,0053024 \sin^2 \phi - 0,0000058 \sin^2 2\phi) \text{ ms}^{-2} \quad (3.55)$$

Zgornji izraz nam poda vrednost normalne težnosti z natančnostjo $1 \mu\text{ms}^{-2} = 0,1 \text{ mgal}$. Če želimo γ izračunati z večjo natančnostjo moramo upoštevati člene višjih stopenj.

Povprečna vrednost težnosti v sistemu GRS 80 znaša: $\gamma_{\text{pov}} = 9,797\ 645 \text{ ms}^{-2}$.

Vrednost normalne težnosti na elipsoidni višini v sistemu GRS 1980 se glasi (enačba 3.54):

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_o - 0,30877 \times 10^{-6} (1 - 0,00142 \sin^2 \phi) h + 0,75 \times 10^{-12} h^2 \text{ ms}^{-2} \quad (3.56)$$

Nivojske ploskve v normalnem težnostnem polju Zemlje imenujemo tudi *sferope* ali sferopotencialne ploskve. Nivojske ploskve v realnem težnostnem polju Zemlje imenujemo tudi *geope*.

3.5 Časovne spremembe težnostnega polja

Na spremembo težnosti vplivajo naslednji dejavniki:

- časovna sprememba gravitacijske konstante G ,
- spremembe v rotaciji Zemlje,
- plimovanje, plimske sile,
- variacije težnosti zaradi razmestitve zemeljskih mas.

Francoski fizik Dirac (1938) je na podlagi svojih kozmoloških raziskav domneval o možnem sekularnem (stoletnem) zmanjšanju univerzalne gravitacijske konstante. Do danes eksperimenti tega niso potrdili.

Zemljina rotacija je podvržena sekularnim, periodičnim in neperiodičnim spremembam, kar posledično spreminja centrifugalni potencial Φ . Zaradi malih sprememb kotne hitrosti Zemlje ("LOD" dolžina dneva, spremembe reda velikosti ms) se težnost na površju spreminja manj kot 0,01 mGal.

Plimovanje je periodično odzivanje trdne zemeljske skorje, ozračja in vodovja na spremembe v težnostnem polju, ki jih povzročata privlačni sili Lune in Sonca, v zelo mali meri pa tudi najbližja planeta. Vpliva sta plimovanje morij ("ocean tide") in plimovanje trde Zemlje ("tides of the solid Earth"), ki je posledica elastičnosti Zemljine notranjosti.

Učinek Sonca je približno enak polovici Luninega. Velikost plimovanja ni stalna, ampak se s časom spreminja. Največje plime se pojavijo, ko se vpliva Lune in Sonca seštejeta. Do tega pride v primeru, ko ležijo Sonce, Luna in Zemlja na isti premici, kar se zgodi

dvakrat na mesec: ob polni luni in mlaju. V vmesnem času vlečeta Sonce in Luna vsak na svojo stran in je učinek zato zmanjšan. Prav tako je velikost plimovanja odvisna od letnega časa. Največje razlike se namreč pojavijo ob spomladanskem in jesenskem enakonočju (kot posledica nagnjenosti osi, okoli katere se Zemlja vrti, glede na ravnino gibanja okoli Sonca).

Za trdno Zemljo se učinek plimovanja v neki točki na površju Zemlje lahko določi iz Newtonovega gravitacijskega zakona in efemerid (koordinat) Lune oz. Sonca. Izračun se izpelje posebej za vsak sistem dveh teles (Sonce, Luna), ter kot rezultanta delovanja obeh sil. Amplitude spremembe težnosti zaradi vpliva plimovanja so 0,24 mGal; telo težko 1 t bi spremenilo težo 0,24 g. To so t.i. astronomske plimske sile. Če bi Zemlja bila idealno togo telo, teh sprememb bi ne bilo.

Zemlja reagira na plimske sile kot elastično telo in nastajajo t.i. "Earth's body tides". Pri tem Zemljino telo povečuje izmerjeno plimsko težnost tudi do 15%, kar nanese skupno 0,31 mGal. Kot reakcija na plimske sile spreminja Zemlja svojo obliko. Spremembe lahko dosežejo 50 cm v radialni smeri in 15 cm v horizontalni ravnini.

Plimske sile spreminjajo velikost izmerjenega težnega pospeška in velikost odklona navpičnice (manj kot je natančnost določitve). Pri vseh gravimetričnih meritvah mora upoštevati vpliv plimovanja. Zato uporabljamo gotove modele, ki za določen trenutek in kraj opazovanja lahko izračunajo vpliv plimskih sil na rezultate meritev. Vpliv plimovanja morij in trde Zemlje je odvisen od geografske širine kraja in od časa. Odpravimo ju z uvedbo ustreznega popravka. Popravek izračunamo za ustrezno geografsko širino opazovališča in čas opazovanj. Popravek je največji v malih širinah (okolica ekvatorja) in lahko znaša prek 0,3 mGal. Vrednost popravka je mala v primerjavi z ostalimi popravki, vendar ga je potrebno upoštevati pri vseh meritvah.

Vpliv sprememb težnosti zaradi razmestitve Zemljskih mas se kaže v dolgotrajnih vplivih kot so: postledenodobno dvigovanje Zemljine skorje, topljenje snega na ledenikih, spremembe morske gladine, ki jih povzročata globalna otoplitev, počasno gibanje Zemljine skorje, toplotna konvekcija v plašču. V splošnem te spremembe ne presežejo velikosti 10^{-9} do 10^{-8} g, pri čemer so spremembe geoida manjše kot 1 mm/leto.

3.6 Anomalijsko težnostno polje Zemlje

Dejansko težnostno polje Zemlje odstopa od normalnega težnostnega polja nivojskega elipsoida. Razliko med dejanskim težnostnim potencialom Zemlje W in normalnim težnostnim potencialom U imenujemo anomalija potenciala oz. moteči potencial (angl.

"disturbing potential", nem. "Störungspotential") in se v geodetski literaturi označuje s T . Torej za moteči potencial velja izraz:

$$W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z) \quad (3.57)$$

Za določitev dejanskega težnostnega polja Zemlje (W) je potrebno poznati vrednost motečega težnostnega polja oz. potenciala (T); normalno težnostno polje nivojskega elipsoida oz. normalni potencial se lahko izračuna s pomočjo ustreznih matematičnih izrazov, saj se ta nanaša na pravilno matematično ploskev. Dejanskega in motečega potenciala ne moremo neposredno izmeriti, vendar obstaja možnost, da T izrazimo s pomočjo količin, ki jih se da določiti z meritvami.

Primerjajmo sedaj dve referenčni ploskvi: geoid

$$W(x,y,z) = W_0$$

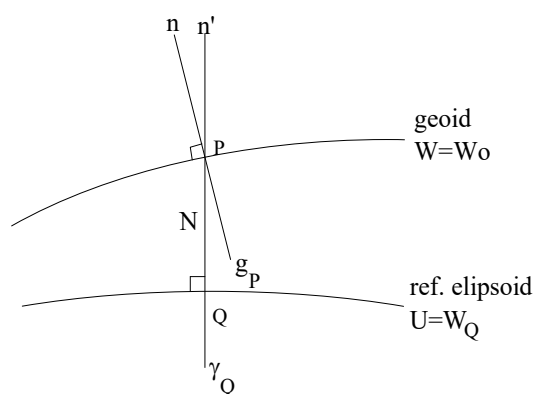
in referenčni elipsoid:

$$U(x,y,z) = U_0$$

z enakim potencialom $W_0 = U_0$. Skozi točko P na geoidu povlecimo normalo na elipsoid in dobimo točko Q na elipsoidu. Razdalja PQ med geoidom in elipsoidom se imenuje *geoidna višina* ali pa *geoidna ondulacija* (angl. "geoidal height, undulation", nem. "die Geoidhöhe") ter jo označujemo z N (slika 3.12).

Primerjajmo sedaj vektor težnega pospeška \mathbf{g} v točki P in vektor normalnega težnega pospeška $\boldsymbol{\gamma}$ v točki Q. Njuna razlika nam poda vektor anomalije težnega pospeška $\Delta\mathbf{g}$ (vektor anomalije težnosti), ki je določen z:

$$\Delta\mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_Q \quad (3.58)$$



slika 3.12: nepravilnosti težnostnega polja Zemlje

Vektor ima svojo velikost in smer. Razlika velikosti obeh vektorjev je anomalija težnega pospeška (anomalija težnosti, angl. "gravity anomaly", nem. "Schwereanomalie", fr. "anomalie gravimétrique"):

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (3.59)$$

razlika v smeri pa je odklon navpičnice (vertikale), (angl. "deflection of the vertical", nem. "die Lotabweichung", fr. "déviation de la verticale").

Vrnimo se na sliko 3.12. Vektorja \mathbf{g} in $\boldsymbol{\gamma}$ je možno primerjati tudi v točki P na geoidu. Ta primerjava nam poda vektor "motečega" težnega pospeška $\delta\mathbf{g}$ (angl. "gravity disturbance vector"):

$$\delta\mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \boldsymbol{\gamma}_P \quad (3.60)$$

Skladno z izrazom (3.54) je razlika v velikosti obeh vektorjev "moteči" težni pospešek (moteča težnost):

$$\delta g = g_P - \gamma_P \quad (3.61)$$

Razlika v smeri teh dveh vektorjev je enaka kot v prejšnjem primeru, to pa je odklon navpičnice, saj smeri $\boldsymbol{\gamma}_P$ in \mathbf{g}_P tako rekoč sovpadata.

Moteča težnost je pojmovno bolj preprosta količina kot anomalija težnosti, vendar v terestrični geodeziji nima tako velikega pomena kot slednja. Pomen anomalije težnosti je v tem, da je podana neposredno: vrednost težnega pospeška g merimo na geoidu (merimo jo na površini Zemlje in reduciramo na geoid), vrednost normalnega težnega pospeška pa izračunamo za poljubno dani elipsoid.

Geoidna višina, anomalija težnosti in odklon navpičnice so količine, ki jih se da določiti z geodetskimi meritvami. Kakšna je njihova zveza z motečim potencialom? Najbolj pomembna zveza je znamenita *Brunsova enačba*:

$$T_P = \gamma_Q N_P \quad (3.62)$$

ali v drugi obliki:

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (3.62a)$$

Ta podaja zvezo med geoidno višino in motečim potencialom. Brunsova enačba v drugi obliki podaja povezavo geometrične količine N s fizikalno količino T . (Primerjaj zgornjo enačbo z enačbami 3.31 in 3.32).

Dokaz: Zaradi:

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_Q N = U_Q - \gamma N$$

velja:

$$W_P = U_P + T_P = U_Q - \gamma N + T$$

ker je:

$$W_P = U_Q = W_0$$

dobimo končno:

$$T = \gamma N$$

Brez celotne izpeljave naj omenimo še parcialno diferencialno enačbo prvega reda, ki jo imenujemo *fundamentalna enačba fizikalne geodezije*:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0 \quad (3.63)$$

Izraz je tako poimenovan zaradi povezave merjene vrednosti anomalije težnosti Δg z neznanim motečim potencialom T .

Določanje motečega potenciala T v zgornji enačbi je v neposredni povezavi z reševanjem Laplaceove in Poissonove diferencialne enačbe. Vse te enačbe so t.i. parcialne diferencialne enačbe in njihovo reševanje predstavlja matematično reševanje tretjega robnega pogoja, t.i. geodetski robni pogoj. Območje rešitev je tu sklenjena ploskev – krogla, zemlja s svojo notranjostjo in zunanji prostor okoli nje. Problem robnega pogoja je najti harmonično funkcijo (vsaka rešitev Laplaceove diferencialne enačbe se imenuje harmonična funkcija), ki je rešitev diferencialne enačbe, in ki na robu območja (Zemlja–krogla) zadošča dodatnim pogojem. Rezultat reševanja robnega pogoja je T , ki nam prek Brunsove enačbe omogoča izračunati geoidne višine, vsekakor najbolj pomembne količine v fizikalni geodeziji.

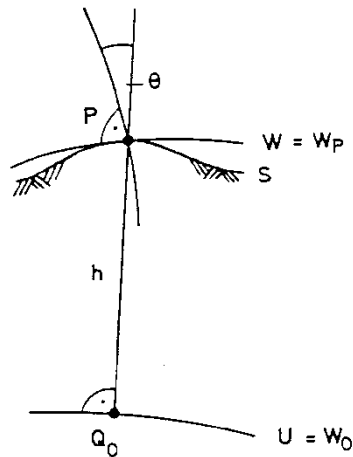
3.6.1 Odklon navpičnice

V prejšnjem poglavju smo odklon navpičnice definirali kot razliko smeri dveh vektorjev: vektorja realnega težnega pospeška in vektorja normalnega težnega pospeška.

Geometrično predstavlja odklon navpičnice kotno razliko med smerjo normale na elipsoid in smerjo navpičnice oz. vertikale (tangenta na ukrivljeno težiščnico) na geoid.

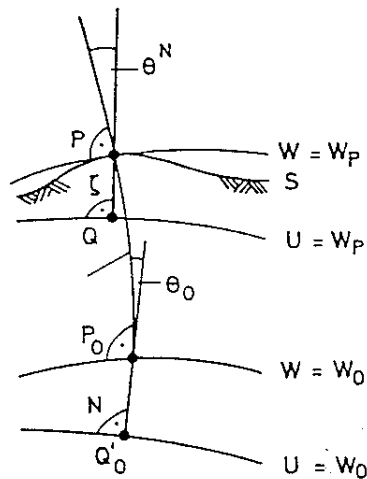
Primerjava normale in navpičnice je možna na več načinov:

1. *Helmertov* odklon navpičnice. Helmert je primerjal smer normale in smer navpičnice na fizični površini Zemlje (slika 3.13). Odklon navpičnice je pri tem kot Θ na površini Zemlje med smerjo navpičnice (težiščnice) in elipsoidno normalo skozi točko P. Točka Q_0 je prirejena točki P z definicijo normale na elipsoid. Dejanskega ali pa normalnega težnostnega polja med točkama P in Q_0 nam ni potrebno poznati.



slika 3.13: Helmertov odklon navpičnice

2. *Pizzetijev* odklon navpičnice. Pizzeti je primerjal obe smeri na samem geoidu (slika 3.14).



slika 3.14: odklon navpičnice po Pizzetiju in Molodenskemu

Odklon navpičnice je kot Θ_0 na geoidu med navpičnico in elipsoidno normalo skozi točko P_0 na geoidu. Točka P_0 je prirejena točki P na površini Zemlje s preslikavo po težiščnici. Pri tem mora imeti elipsoid enak potencial W_0 kot geoid. Razdalja P_0Q_0 je višinska razlika med elipsoidom in geoidom in se imenuje *geoidna višina* oz. *geoidna ondulacija* (N).

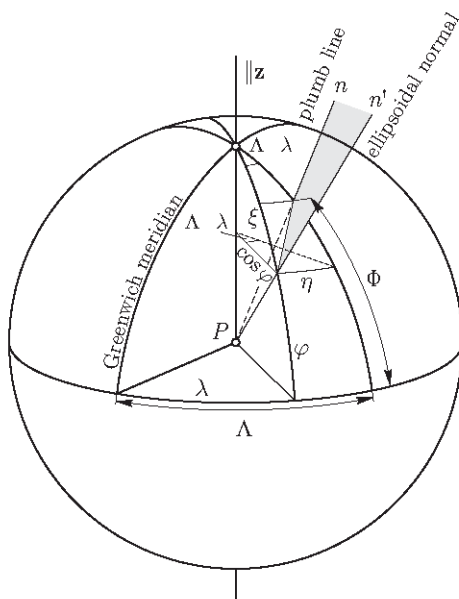
3. Odklon navpičnice po *Molodenskem*. Odklon navpičnice je kot Θ^N na površini Zemlje med smerjo navpičnice in smerjo normale v točki P na sferopotencialni ploskvi, ki ima isti potencial W_P , kot geopotencialna ploskev skozi točko P (slika 3.14). Ploskev, za katero velja, da je v vsaki njeni točki Q izpolnjeno $U_Q = W_P$, se po Hirvonenu imenuje *teluroid*. Višinska razlika med teluroidom in fizično površino Zemlje ζ se imenuje *anomalija višine* (angl. "height anomaly", nem. "die

Höhenanomalie"). Pri tem velja opomniti, da sam teluroid ni nivojska ploskev, je samo geometrijsko mesto točk, za katere velja $U_Q = W_P$.

Odklon navpičnice Θ je prostorski kot, zato ga lahko razčlenimo na dve pravokotni komponenti; odstopanje v smeri meridiana (sever – jug) ξ in odstopanje v smeri prvega vertikala (vzhod – zahod) η . Komponenti odklona navpičnice izhajata neposredno iz geografskih koordinat točk na površini Zemlje (astronomskih in geodetskih).

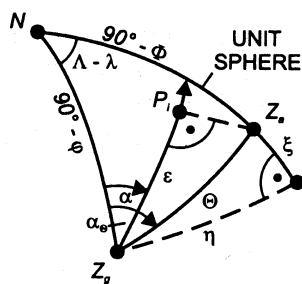
Smer težiščnice je neposredno določena z geografskimi koordinatami: geografsko dolžino in geografsko širino. Zaradi tega je možno komponente odklona navpičnice izraziti s pomočjo geografskih koordinat. Dejanske geografske koordinate točke P na geoidu, ki določajo smer težiščnice (n) oz. smer vektorja težnega pospeška \mathbf{g} , lahko določimo z astronomskimi meritvami. Zato tako dobljene koordinate imenujemo astronomske koordinate in jih običajno označujemo: astronomsko širino z Φ in astronomsko dolžino z Λ . Elipsoidne koordinate, določene s smerjo normale na ploskev elipsoida (n'), označujemo: elipsoidno (tudi geodetsko) širino z ϕ in elipsoidno (geodetsko) dolžino z λ . Torej zaključimo (slika 3.15a):

normala na geoid n \rightarrow astronomske koordinate Φ, Λ ;
 normala na elipsoid n' \rightarrow geodetske koordinate ϕ, λ .



slika 3.15a: odklon navpičnice prikazan na enotski krogli s središčem v P

Poiščimo sedaj zvezo med astronomskimi in geodetskimi koordinatami. Pri tem izhajamo iz dveh predpostavk: mala polos referenčnega elipsoida je vzporedna s srednjo rotacijsko osjo Zemlje in ničelni meridian elipsoidnega koordinatnega sistema je vzporeden z Greenwiškim meridianom. Osi smo z malimi premiki dovedli do preklopa. Skozi točko P na površini Zemlje položimo kroglo z enotskim polmerom. Potem so oznake s slike 3.15b naslednje:



slika 3.15b: komponente odklona navpičnice

točka N je presečišče rotacijske osi s kroglo (nebesni pol); Θ je sferna razdalja med točkama na krogli, ki ustrežata astronomskemu zenitu Z_a in geodetskemu zenitu Z_g . Komponenta odklona navpičnice v ravnini astronomskega meridiana je ξ (pozitivna kadar je Z_a severno od Z_g). Komponenta odklona navpičnice v ravnini prvega vertikala je η (pozitivna kadar je Z_a vzhodno od Z_g).

Iz odnosov v pravokotnem sfernem trikotniku sledijo zveze:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \phi) &= \sin(90^\circ - \eta) \sin[90^\circ - (90^\circ - \Phi + \xi)] \\ &\quad \sin\{90^\circ - [90^\circ - (\Phi - \xi)]\} \\ \sin\phi &= \sin(\Phi - \xi) \cos\eta \\ \cos(90^\circ - \eta) &= \sin(90^\circ - \phi) \sin(\Lambda - \lambda) \\ \sin\eta &= \sin(\Lambda - \lambda) \cos\phi\end{aligned}$$

Upoštevajoč, da so koti ξ, η in $\Delta\lambda = (\Lambda - \lambda)$ majhni, lahko z zadostno natančnostjo uvedemo približke za kote:

$$\cos\eta \approx 1, \quad \sin\eta \approx \eta, \quad \cos(90^\circ - \Delta\lambda) = \sin\Delta\lambda \approx \Delta\lambda$$

Na ta način dobimo komponente odklona navpičnice v obliki:

$$\xi = \Phi - \phi \tag{3.64}$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos\phi$$

Z uporabo Laplaceove enačbe, ki podaja zvezo med astronomskim in geodetskim azimutom:

$$A - \alpha = (\Lambda - \lambda) \sin\phi,$$

lahko napišemo še eno enačbo za komponento odklona v smeri prvega vertikala:

$$A - \alpha = \eta \tan\phi \tag{3.65a}$$

Enačba je koristna, ker omogoča izračun komponent odklona η s pomočjo merjenih astronomskih azimutov. Ti so se nekoč določali neprimerno lažje in bolj natančno kot astronomske geografske dolžine.

Komponenta ε :

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (3.65b)$$

je komponenta odklona navpičnice v smeri azimuta α .

Zgornje izpeljave veljajo za Helmertov odklon navpičnice. Razlike med Pizzetijevim in Helmertovim odklonom so zelo majhne, reda velikosti $0,01$, kar je manj od natančnosti astronomskih opazovanj za določanje astronomskih geografskih koordinat Φ in Λ .

Glede na izbiro elipsoida, na katerega se nanašajo geodetske koordinate, ločimo absolutne in relativne odklone navpičnice.

- a) Absolutni odkloni navpičnice se nanašajo na srednji zemeljski rotacijski elipsoid. Ta je geocentričen in njegovi fizikalni parametri (masa, gravitacijski potencial, kotna hitrost) so izbrani tako, da ustrezajo dejanskim parametrom Zemlje. Ti elipsoidi so osnova za vzpostavitev globalnih geodetskih referenčnih sistemov (GRS 80, WGS 74, WGS 84 itd.).
- b) Relativni odkloni navpičnice se nanašajo na relativne t.i. referenčne elipsoide, katerih parametri so bili določeni v različnih časovnih obdobjih in na osnovi bolj ali manj omejenih regionalnih meritev (Bessel, Hayford, Krasovski itd.). Male osi tako določenih elipsoidov, so sicer vzporedne z rotacijsko osjo Zemlje, vendar odražajo parametri teh elipsoidov nekatere sistematične značilnosti območij, s katerih so bili podatki za izračun elipsoidov zajeti. Zato se referenčni elipsoidi med seboj razlikujejo, njihova oblika pa je dober približek le za dele zemeljske površine in ne tudi za Zemljo kot celoto.

Dejstvo je, da površina Zemlje ni gladka matematično definirana ploskev in njena notranjost ni "napolnjena" s homogeno snovjo. V splošnem vplivata na nastanek odklona navpičnice relief in notranja zgradba Zemlje. Naravna površina Zemlje ustvarja presežek oz. primanjkljaj zemeljskih površinskih mas glede na okolico, kar povzroči komponento sile teže v smeri povečane mase.

Običajno največji del odklona povzroči topografija in razpored mas različne gostote v zelo široki okolici okrog obravnavane točke. Odklone navpičnice lahko določimo tudi računsko, imenujemo jih *topoizostazijski odkloni*. Sestavljeni so iz topografskih, ki so rezultat privlačne sile okoliških mas in *izostazijski*, ki se računajo na podlagi ustrezne teorije *izostazije* (so precej manjši od topografskih). Izostazijske odklone lahko štejemo kot korekcije topografskih, ker povzročajo sistemske anomalije s precej manjšimi variacijami od prvih.

Že v prejšnjem stoletju so opazili, da so izračunani topografski odkloni bili večji od dejansko izmerjenih (in to v zelo hribovitih območjih, Himalaji). Sklepali so torej, da se

pod višjim reliefom skrivajo mase z manjšo gostoto. To je t.i. pojav *izostazije*, ki ga je pozneje potrdilo tudi sistematično obnašanje anomalij težnosti (Bouguerovih). Torej presežek mase (hribi) ali primanjkljaj mase (oceani) je vsaj delno kompenziran s primerno porazdelitvijo mas v notranjosti Zemlje. Če si predstavljamo, da trdni del Zemljine skorje plava v raztopljeni tekoči masi, potem obstaja ploskev, na kateri pride do izenačenja hidrostatičnih pritiskov – *izostazična ploskev* (ploskev kompenzacije, hidrostatičnega ravnotežja, izravnane pritiska).

3.6.2 Anomalije težnosti

V poglavju 3.5 smo anomalijo težnosti opredelili kot razliko velikosti vektorja dejanske težnosti in vektorja normalne težnosti (primerjano na površju geoida).

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

Velikost vektorja dejanske težnosti je merjena vrednost težnosti, ki jo pridobimo, bodisi z absolutnimi, bodisi z relativnimi gravimetričnimi meritvami.

Vrednosti težnega pospeška oz. njihovih razlik merimo na fizični površini Zemlje, na različnih nadmorskih višinah in na različnih geografskih širinah. Na ta način, merjene vrednosti težnosti niso medsebojno neposredno primerljive. Izmerjene vrednosti težnega pospeška skrivajo v sebi vse možne prostorske in časovne vplive na težnostno polje raziskovanega območja. V različnih časih izmerjene vrednosti težnega pospeška se razlikujejo zaradi časovnih sprememb težnostnega polja in zaradi neenakomernega delovanja gravimetra.

Prostorsko se težni pospešek spreminja z geografsko širino in nadmorsko višino opazovališča, zaradi vpliva okoliške topografije in razlike v gostoti hribin. Prostorske spremembe težnega pospeška uporabljata pri svojih raziskavah geodezija in geofizika. Geodezija jih uporablja za proučevanje odstopanj Zemlje od njene elipsoidne oblike. Geofizika uporablja prostorske spremembe za določitev sprememb gostote v skorji in zgornjem plašču (t.i. *prečni kontrast gostote*), z namenom pridobitve podatkov o geologiji podzemnih plasti. Na ta način obe vedi pristopata (na podoben vendar ne enak način) k *redukciji* merjenih vrednosti težnega pospeška v obliko primerno za raziskave (interpretacijo). Cilj redukcije vrednosti težnega pospeška je dobiti t.i. *anomalijske vrednosti* težnosti, ki bodo odražale geofizikalni oz. geodetski problem (kontrast gostote oz. oblika Zemlje).

Redukcija merjenih vrednosti težnosti pomeni preračun merjenih vrednosti na eno skupno raven, kjer lahko medsebojno primerjamo vse vrednosti. V grobem so te primerjalne ploskve geoid, srednja morska gladina oz katerakoli druga poljubna ekvipotencialna ploskev. Redukcijo merjenih vrednosti težnega pospeška dosežemo z uvedbo različnih *poprakov*.

Namen redukcije merjenih vrednosti težnega pospeška v geodeziji je premestitev topografskih mas zunaj geoida na takšen način, da geoid postane robna ploskev. V fizikalni geodeziji je zahteva, da s premeščanjem topografskih mas ne vplivamo na maso celotne Zemlje. Torej je potrebno mase v okolici opazovališča vtisniti v notranjost Zemlje, ali pa enakomerno razporediti na njeno površje tako, da oblika geoida ostane nespremenjena. Redukcija na geoid je vedno opravljena z upoštevanjem določenih hipotez o gostoti notranjosti Zemlje. Iz tega izhajajo tudi največji možni pogreški pri gravimetrični določitvi geoida.

V splošnem se prostorski popravki merjenih vrednosti težnosti delijo na dve skupini: izostazijske in neizostazijske. Pri prvih se pri redukciji upošteva ena od teorij izostazije, pri drugih pa ne. Neizostazijski popravki se glede natančnosti in oblike redukcije zaradi privlačnja okoliških topografskih mas kot največjega vpliva, in ostalih manjših vplivov delijo na:

1. popravek prostega zraka;
2. Bouguerov popravek;
3. terenski popravek;
4. popravek Poincarre – Praya
5. Helmertov kondenzacijski popravek;
6. Rudzkijev inverzni popravek.

Popravek Poincarre–Praya se upošteva če meritve opravljamo pod morsko gladino ali pa v rudarskih oknih in je potrebno izračunati vpliv mas nad opazovališčem. Slednja dva se upoštevata samo v visoko natančnih raziskavah težnostnega polja.

Popravek prostega zraka (δg_{FA}) predstavlja popravljane merjene vrednosti težnega pospeška za nadmorsko višino opazovališča ter njegovo direktno redukcijo na ploskev geoida, brez upoštevanja topografskih mas, ki se nahajajo med površjem Zemlje in geoidom. Popravek je vedno pozitiven. Za praktične namene zadostuje že približna enačba, ki jo dobimo z aproksimacijo vertikalnega gradienta normalne težnosti (enačba 3.53c) :

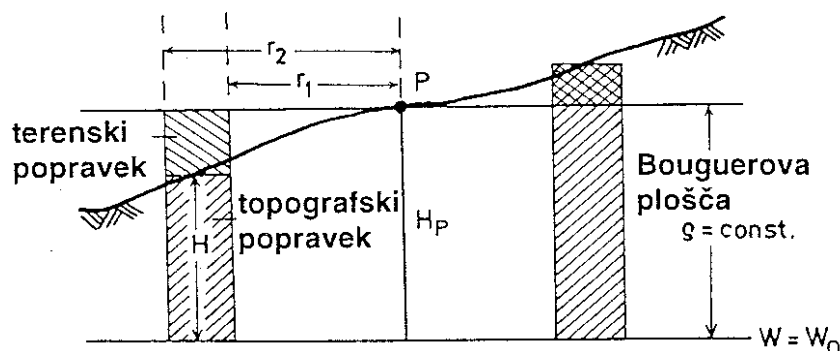
$$\delta g_{FA} = 0,3086 H_{(m)} \text{ mGal}$$

pri čemer smo v enačbi $\gamma(\phi, h) = \gamma_o - 2\frac{\gamma}{R}h$ zamenjali γ in R z njihovimi povprečnimi vrednostmi.

Vpliv okoliških topografskih mas odstranimo s topografskim popravkom. Tega lahko razčlenimo na popravek za Bouguerovo ploščo (dg_B) in terenski popravek (δg_T). Za izračun Bouguerovega popravka predpostavimo, da se merska točka na površini Zemlje

nahaja na horizontalni plošči neskončnih razsežnosti. Plošča ima debelino H_P (nadmorska višina točke) in konstantno gostoto, t.i Bouguerovo gostoto ρ . Bouguerova plošča ne more zamenjati dejanskega reliefa okoli merske točke. Zato z uvedbo terenskega popravka poizkušamo v največji možni meri odpraviti nepravilnosti reliefa (slika 3.16). Popravek za Bouguerovo ploščo lahko izračunamo s pomočjo naslednje enačbe:

$$\delta g_B = 2\pi G\rho H_P = 0,04191\rho H_{P(m)} \text{ mGal} \quad (3.67)$$



slika 3.16: popravki merjene vrednosti težnega pospeška

Popravek za Bouguerovo ploščo je vedno negativen, saj mase pod opazovališčem povečujejo vrednost izmerjenega težnega pospeška. Terenski popravek pa ima nasprotno vedno pozitiven predznak ne glede na to kakšen je dejanski relief v okolici opazovališča (ali obstaja višek oz. primanjkljaj mas). Mase nad višino opazovališča (H_P) privlačijo navzgor in zmanjšujejo vpliv Bouguerove plošče (zmanjšujejo vrednost težnosti); Bouguerov popravek moramo povečati. Nasprotno primanjkljaj mas (doline, vrtače) zmanjšuje maso Bouguerove plošče. Na ta način moramo zopet Bouguerov popravek povečati.

Računanje terenskega popravka je zelo zahtevno. Pri praktičnem računanju se za posamezne točke na Zemlji okolica točke razdeli v mrežo pravilnih kvadrov (kolobarjev). Nekoč so se terenski popravki računali ročno s pomočjo različnih diagramov (Hammerov), danes pa z numerično integracijo s pomočjo digitalnega modela reliefa (postopek je podoben izračunu topografskih odklonov navpičnice).

Glede na to, katere popravke smo prišteli merjeni vrednosti težnega pospeška, razlikujemo naslednje anomalije težnosti:

Anomalija prostega zraka ("free air anomaly", "Freiluftanomalie"):

$$\Delta g_{FA} = g_{mer} + \delta g_{FA} - \gamma \quad (3.68)$$

Bouguerova anomalija:

$$\Delta g_B = g_{mer} + \delta g_{FA} - \delta g_B + \delta g_T - \gamma \quad (3.69)$$

Anomalije prostega zraka so sorazmerne z višino območja, torej čim višja je točka tem večje je anomalija. Zato se uporabljajo pri gravimetričnem izračunu ploskve geoida. Bouguerove anomalije se uporabljajo v raziskavah uporabne geofizike, saj so odraz sprememb gostote v notranjosti Zemlje. V hribovitih območjih so večinoma negativne na morskih površinah pa pozitivne. V primeru, da smo pravilno ocenili gostoto Bouguerove plošče, so anomalije korelirane s topografijo površja Zemlje.

Bouguerova anomalija ima velik *indirektni učinek*. Ta nastane, ker se z odstranjevanjem ali premeščanjem vidnih mas spremeni tudi težnostno polje, posledično njegov potencial, s tem pa tudi potencial na samem geoidu.

3.6.3 Računanje topografskih odklonov navpičnice in anomalij težnosti

Izhajamo iz Newtonovega zakona (enačba 3.1) in sprašujemo po skupni privlačni sili, ki deluje na telo mase $m_2=1$:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \text{ (skalarno)} \quad \text{oz.} \quad \mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} \text{ (vektorsko)}$$

Skladno z enačbo (3.9) je ta sila enaka vsoti vseh delnih sil \mathbf{F}_i , ki jih povzročajo v koščke razdeljeno telo skupne mase m_1 :

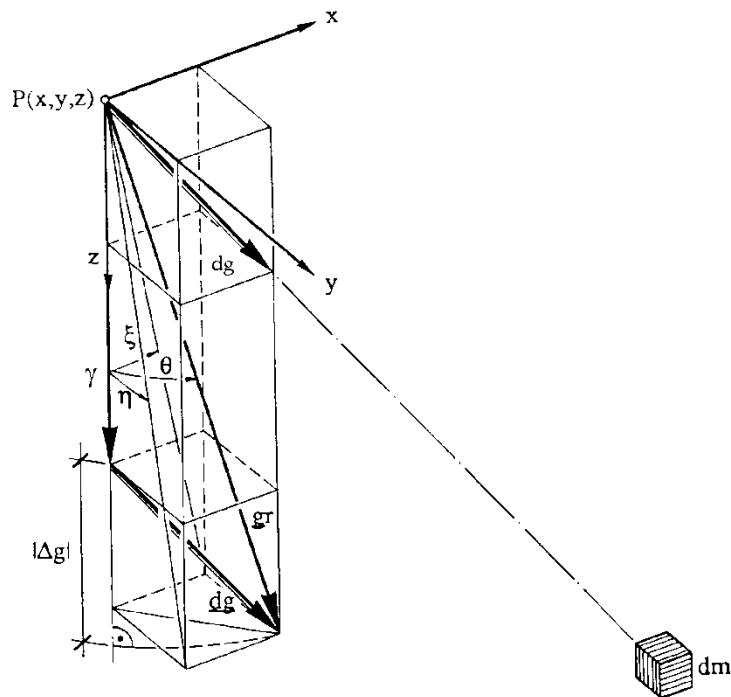
$$\mathbf{F}_{skupna} = \sum \mathbf{F}_i \quad (3.70)$$

Enačbo lahko uporabimo za izračun skupne privlačne sile (potenciala) okoliške topografije na obravnavano točko P na površini Zemlje. Za rešitev naloge moramo vse vidne in nevidne (pod površjem) mase razdeliti na ustrezne elementarne geometrijske oblike in poiskati privlačni vpliv vsakega elementa posebej. Natančnost določitve skupne privlačne sile je odvisna od našeg poznavanja razporeda mas in gostote, kot tudi od kakovosti analitične aproksimacije (digitalizacija) topografije (reliefa). Sila se zmanjšuje s kvadratom oddaljenosti mas, torej je potrebno razpolagati z dobro digitaliziranim reliefom v sami okolici obravnavane točke.

V neki točki na površju Zemlje lahko vektor sile teže predstavimo kot rezultanto vektorske vsote normalne sile teže in moteče sile teže (sila, ki jih povzročajo t.i moteče mase v okolici točke):

$$\mathbf{g}_r = \boldsymbol{\gamma} + d\mathbf{g} \quad (3.71)$$

Znano nam je, da je razlika smeri vektorjev \mathbf{g}_r in $\boldsymbol{\gamma}$ odklon navpičnice, razlika velikosti pa je anomalija težnosti. Geometrijsko lahko to predstavimo na naslednji način (slika 3.17). V točki P postavimo pravokotni koordinatni sistem, kjer je os z usmerjena proti nadirju, os x proti severu, ter os y proti vzhodu.



slika 3.17: vektorska predstavitev privlačne sile, ki jih povzročajo moteče mase

Proučavanje privlačne sile prestavimo na proučavanje potenciala. Torej zanima nas moteči potencial v točki P (centrifugalni potencial odpade, ker tvorimo razliko):

$$T(x, y, z) = V(x, y, z) - U(x, y, z)$$

Komponente odklona navpičnice dobimo kot vsoto vseh privlačnih sil, skladno z enačbo (3.70). Hkrati vemo, da sta komponenti sile teže v smereh koordinatnih osi x in y , parcialna odvoda potenciala:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = F_x \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_y$$

Iz horizontalnih komponent (parcialnih odvodov po x in po y) sledita komponenti odklona navpičnice:

$$\xi'' = -\rho'' \frac{F_x}{\gamma_{pov}} \quad \eta'' = -\rho'' \frac{F_y}{\gamma_{pov}} \quad (3.72)$$

kjer je γ_{pov} povprečna vrednost težnega pospeška; $\gamma = 9,807 \text{ ms}^{-2}$ (zadošča ta vrednost brez izgube natančnosti).

Topografski odkloni se danes računajo s pomočjo numerične integracije. Topografijo v okolici točke obravnave razdelimo na koncentrične cilindre in jih s sistemom vertikalnih ravnin razsekamo na kolobarje. Ravnine so izbrane tako, da sta osi y in x vzporedne z lokalnim koordinatnim sistemom, v katerem imamo na razpolago digitalni model reliefa. Zgornjo površino nadomestimo z ravnino konstantne nadmorske višine kar nam

da kvadre DMV-ja. Razdelimo tako nastali kvader na diferencialno majhne kvadre in poiščemo privlačni vpliv (potencial) teh kvadrov na točko obravnave.

Na enak način računamo terenske popravke za izračun anomalij težnosti ($\delta g_T = |\Delta g|$, na sliki 3.17).

4 Sistemi višin

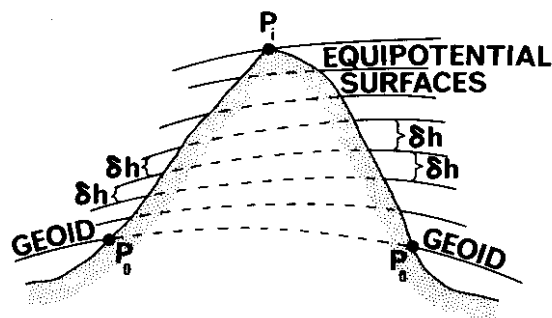
Lega točke v tridimenzionalnem prostoru je določena s tremi koordinatami. Te lahko izrazimo na različne načine, vendar so načeloma medsebojno neodvisne. Čeprav so koordinate neodvisne, v vsakdanjem življenju ločimo med položajem in višino. Če hočemo en predmet dvigniti na določeno višino, je potrebna večja sila, kot pa če isti predmet premaknemo horizontalno. Razlog temu je naslednji: položaj je geometrično definiran, višina pa fizikalno. Kot smo že videli je višina sorazmerna razliki potencialov, neločljivo je povezana z težnostnim poljem Zemlje.

Tudi višino lahko definiramo geometrično. To so na primer tridimenzionalne kartezične koordinate X , Y , Z izražene v elipsoidnih (geodetskih) koordinatah kot ϕ , λ , in h t.i. elipsoidna višina. To je vertikalna oddaljenost točke na površini zemlje od referenčnega elipsoida. Določena je z elipsoidno normalo v tej točki. Elipsoidne višine so za vsakdanjo uporabo in za izvedbo tehničnih projektov neuporabne, saj točke istih elipsoidnih višin odstopajo od nivojske ploskve (geope) tudi do ± 100 m. V gorskih območjih lahko znaša to odstopanje na razdalji 10 km tudi do 1m.

Pri izboru ustreznega sistema višin moramo upoštevati zahteve različnih uporabnikov, zahteve znanosti in posameznih strok. Tako dobimo celo vrsto pogojev, ki jih mora izpolnjevati teoretično neoporečni višinski sistem. Ti pogoji pa se do določene mere med seboj tudi izključujejo. Najvažnejši pogoji so:

1. Višine točk morajo biti nedvoumno definirane in določljive neodvisno od poti niveliranja. Ker nivojske ploskve težnostnega polja niso med seboj vzporedne in ker sta vrhunjenje libele in lega kompenzatorja nivelirja tesno povezana s težnostnim poljem, ta pogoj ni izpolnjen za višine točk, določenih na osnovi rezultatov geometričnega nivelmana.
2. Višine točk naj bi bile določene na osnovi merjenj na površini Zemlje in pri tem naj bi upoštevali čim manj različnih hipotez (na primer o gostoti in porazdelitvi mas v notranjosti Zemlje).
3. Popravki merjenih višinskih razlik, zaradi privzetega višinskega sistema, morajo biti tako majhni, da jih ne upoštevamo pri nivelmanskih mrežah nižjih redov, ker so navezane na nivelmanske mreže višjih redov.
4. Višine točk naj bi bile podane v metrih in za njih mora obstajati geometrična razlaga.
5. V zadnjem času se pojavlja zahteva, da naj bi višinski sistem omogočal enostavno povezavo z elipsoidnimi višinami, pridobljenimi na osnovi GPS meritev.
6. Poleg tega je dobro če za primerjalno ploskev (izhodiščno ploskev računanja višin) obstaja fizikalna razlaga.

Obravnavajmo primer s slike (4.1). Geometrični nivelman je izpeljan od točke P_0 (ki je na nivoju morja – geoidu) do točke P_i na vrhu hriba. Kot je znano nivojske ploskve niso vzporedne, kar je očitno tudi s slike 4.1.



slika 4.1: princip geometričnega nivelmana

Predpostavimo, da smo nivelman opravili z dveh smeri. Enkrat z leve strani hriba in drugič z desne strani. Ne glede na smer niveliranja je višinska razlika na stojišču (δh) enaka razliki čitanj na latah zadaj in latah spredaj. "Nadmorsko višino" točke P_i dobimo kot vsoto delnih višinskih razlik. Prvič dobimo višino kot vsoto δh z leve strani hriba in drugič kot vsoto delnih višinskih razlik δh z desne strani. Očitno je, da dobimo dve različni vrednosti za nadmorsko višino točke P_i : z desne strani hriba je razmaknjenost nivojskih ploskev večja kot z leve strani.

Koliko vpliva nevporednost nivojskih ploskev na rezultat geometričnega nivelmana? Zanimarimo razliko med dejanskim in normalnim težnostnim poljem in navedimo približno enačbo za razmaknjenost sferopotencialnih ploskev (nivojske ploskve v normalnem težnostnem polju), ki ustreza srednji višini nivelmanske linije h_m in ustrezni srednji geografski širini ϕ_m :

$$\Delta h \approx -0,0053 h_m \Delta \phi \sin 2\phi_m$$

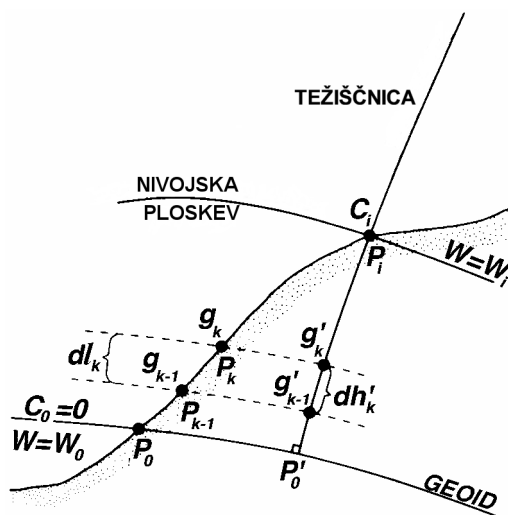
Numerična konstanta $-0,0053$ je težnostna sploščenost f^* za nivojski elipsoid GRS80. Za dolžino nivelmanske linije 50 km (ustreza razliki geografskih širin začetne in končne točke linije $\Delta \phi = 0,008$ rad) in srednjo višino linije $h_m = 500$ m, dobimo $\Delta h \approx 0,02$ m. To je vrednost, ki je večja od običajnega kilometrskega pogreška niveliranja na tej razdalji.

Če vpliv nevporednosti nivojskih ploskev ni zanemarljivo majhen, katera višina točke P_i je potem prava? Dvoumnost lahko odpravimo samo tako, da rezultat geometričnega nivelmana, ki je kot smo videli, odvisen od poti niveliranja, izrazimo s količino, ki bo od poti neodvisna.

Prikličimo enačbo (3.31) z začetka obravnave težnostnega polja Zemlje in jo napišimo v obliki

$$\delta W = -g\delta h \quad (4.1)$$

Kot vemo, poteka skozi eno poljubno točko samo ena nivojska ploskev in je torej tej točki prirejena samo ena vrednost potenciala W . Na ta način težnostni potencial predstavlja eno možnost predstavitve enoličnega višinskega položaja. Označimo sedaj delne višinske razlike med dvema točkama z δl (slika 4.1); leta zadaj – leta spredaj oz. višinska razlika med točkama P_{k-1} in P_k . Če sta nam znani vrednosti težnega pospeška na točkah, lahko s pomočjo enačbe (4.1) izračunamo razliko potencialov med tema dvema točkama.



slika 4.2: geopotencialna kota

Razlika potencialov med dvema točkama je torej neodvisna od poti, ki pa jo dejansko dobimo z integracijo enačbe (4.1):

$$W_{P_i} - W_{P_0} = \int_{P_0}^{P_i} dW = - \int_{P_0}^{P_i} g dl = - \int_{P'_0}^{P'_i} g' dh' \quad (4.2)$$

kjer integriramo vzdolž terena (dl) od geoida do točke P_i , ali pa vzdolž težiščnice (dh') točke P_i . Takšen nivelman imenujemo *geopotencialni nivelman*, saj povezuje geometrični nivelman z meritvami težnega pospeška (opravljenih na površini Zemlje).

Geoid ali ničelna nivojska ploskev predstavlja primerjalno ploskev za določitev razlik potencialov in merjenih višinskih razlik. Za njegovo upodobitev si pomagamo s srednjo morsk gladino, v mislih podaljšano pod celinami. Razlike potencialov, ki so reducirane na geoid imenujemo *geopotencialne kote* (C) ("geopotential number"). Geopotencialna kota je definirana kot negativna razlika potencialov med geoidom in točko na površju Zemlje:

$$C_i = -(W_i - W_0) = (W_0 - W_i) = \int_{P_0}^{P_i} g dl = \int_{P'_0}^{P'_i} g' dh' \quad (4.3)$$

Enota za geopotencialno koto je t.i. *geopotencialno število* ("geopotential unit" – gpu):

$$10 \text{ m}^2\text{s}^{-2} = 1 \text{ gpu} = 1 \text{ kGalm} = 1000 \text{ Galm}$$

Ker je $g \approx 0,98\text{kGal}$, sledi, da je:

$$C \approx gH \approx 0,98H$$

oz. je v enotah gpu geopotencialna kota skoraj enaka nadmorski višini točke v metrih (razlika je manjša od 2%).

V praksi nam količini l in g nista znani kot zvezni, krajevni funkciji. Zato integral v zgornji enačbi ne moremo obravnavati analitično, torej ga nadomestimo z vsoto:

$$C_i = W_0 - W_i = \sum_{k=i}^j \bar{g}_k \delta l_k \quad (4.4)$$

pri čemer so:

$\bar{g}_k = \frac{1}{2}(g_{k-1} + g_k)$, δl_k merjena višinska razlika med dvema reperjema in g_k je merjena vrednost težnega pospeška na k -tem reperju. V praksi se ne meri težni pospešek na vsakem reperju, ampak samo na posameznih, vmesne vrednosti pa interpoliramo. Pomembno je da so vrednosti g znane z zadostno natančnostjo.

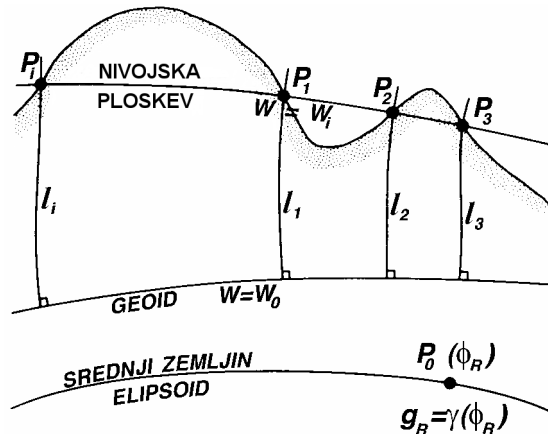
Dobre strani geopotencialnih kot so naslednje:

- so neodvisne od poti niveliranja,
- vsaka točka je višinsko enolično določena z njo,
- geopotencialne kote so pozitivne nad geoidom, nič na njem in negativne pod geoidom,
- vse točke na isti nivojski ploskvi imajo enako geopotencialno koto,
- geopotencialne kote lahko določimo na podlagi meritev opravljenih na površju Zemlje.
- zaradi znane lastnosti težnostnega polja Zemlje (polje je brez vrtincev) je krivuljni integral po sklenjeni poti (cirkulacija polja) enak nič:

$$\oint_{(K)} dC = \oint_{(K)} g dl = 0$$

Ta trditev vsekakor ne velja za nivelirane višinske razlike.

Za uporabnike so takšne fizikalno definirane višine točk neuporabne. Glavna pomanjkljivost geopotencialnih kot je ta, da jih ne moremo geometrično interpretirati in niso izražene v metrih.



Slika 4.3: dinamična višina

Če geopotencialno koto delimo s konstantno vrednostjo težnega pospeška (na primer na nivoju elipsoda z geografsko širino 45°) dobimo t.i. *dinamične višine*:

$$H_i^D = \frac{C_i}{\gamma_0^{45}} \quad (4.5)$$

Praktično določimo dinamične višine tako, da merjeni višinski razliki med dvema reperjema prištejemo *dinamični popravek* (DP):

$$DP_{ij} = \int_{P_i}^{P_j} \frac{g_k - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta l_k = \sum_{k=i}^j \frac{g_k - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta l_k \quad (4.6)$$

δl_k je merjena višinska razlika med dvema reperjema in g_k je merjena vrednost težnega pospeška na k-tem reperju. Kriteriji za vrednost težnega pospeška so enaki kot za geopotencialne kote, torej se v praksi ne meri težni pospešek na vsakem reperju, ampak samo na posameznih, vmesne vrednosti pa interpoliramo.

Točke na isti nivojski ploskvi imajo enako dinamično višino. Problem dinamičnih višin je v tem, da so lahko popravki niveliranih višinskih razlik zelo veliki in višine nimajo geometričnega pomena. Ne moremo jih povezati z elipsoidnimi višinami (h). Za ilustracijo navedimo primer izračuna dinamičnega popravka na ekvatorju: vrednosti težnega pospeška znaša približno $g \approx 9,78 \text{ ms}^{-2}$, normalni težni pospešek je $\gamma_0^{45} = 9,806 \text{ ms}^{-2}$; za višinsko razliko 300m znaša dinamični popravek $DP = -0,8 \text{ m}$. Dinamične višine so pomembne za različne inženirske projekte (npr. hidrotehnične).

Za večino ljudi je geometrična zasnova višin najbolj primerna. Geopotencialne kote niso primerne za geodetsko izmero, ker jih ne moremo geometrično interpretirati. Imajo pa velik pomen v izravnavi državnih nivelmanskih mrež višjih redov.

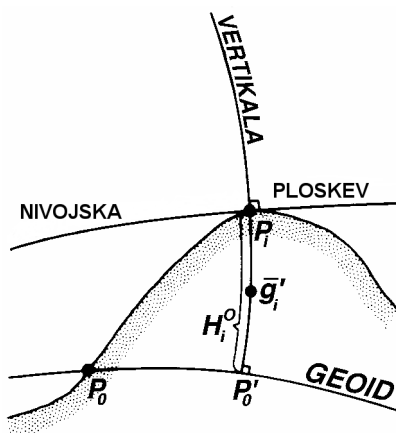
V izmeri jih zamenjujemo z *ortometričnimi višinami* H (slika 4.4). Ortometrična višina je oddaljenost točke na površju Zemlje od geoida, merjeno po ukrivljeni težiščnici.

Enačbo za ortometrično višino lahko zapišemo kot:

$$H = \int_{P_0'}^{P_1} dh' \quad (4.7)$$

pri čemer integriramo vzdolž težiščnice. Označimo vrednost težnega pospeška vzdolž težiščnice z g' in z zamenjavo dh' iz enačbe (4.2) dobimo:

$$H = - \int_{P_0'}^{P_1} \frac{dW}{g_i'} = \int_{P_0'}^{P_1} \frac{dC}{g_i'} = \int_{P_0'}^{P_1} \frac{g}{g_i'} dl \quad (4.8)$$

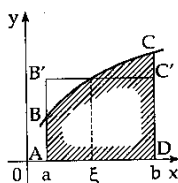


Slika 4.4: ortometrična višina

Enačba za izračun ortometričnih višin sledi neposredno iz *izreka o povprečni vrednosti integrala*:

Naj bo funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ zvezna; znotraj intervala obstaja vsaj eno število ξ , da je

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$$



Geometrijska interpretacija: med točkama a in b obstaja točka ξ , da je ploščina lika $ABCD$ enaka ploščini pravokotnika $AB'C'D$. Število m je povprečna vrednost ali aritmetična sredina funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Izhajamo iz enačbe za geopotencialno koto, ki je napišemo v malo spremenjeni obliki:

$$C_i = W_0 - W_i = \int_{P_0}^{P_1} g dl = \int_{P_0'}^{P_1} g' dh' = H_i \left[\frac{1}{H_i} \int_{P_0}^{P_1} g' dh' \right] = \bar{g}_i' H_i$$

Izrek trdi, da obstaja med geoidom in točko P_i na površju Zemlje takšna vrednost težnega pospeška, da velja:

$$H_i = \frac{1}{\bar{g}_i'} \int_{P_0}^{P_i} g dl \quad (4.9)$$

\bar{g}_i' je srednja vrednost težnega pospeška vzdolž težiščnice v integralnem pomenu.

Končno za ortometrično višino velja:

$$H_i = \frac{C_i}{\bar{g}_i'} \quad (4.10)$$

kjer je C_i geopotencialna kota točke P_i . Ortometrične višine dobimo tako, da "izmerimo geopotencialni nivelman med geoidom in točko na površju Zemlje vzdolž težiščnice". To velja samo teoretično, saj v notranjosti Zemlje ne moremo meriti. Da bi določili (izračunali) srednjo vrednost g na odseku od P_0 do P_i , moramo uvesti hipoteze o razporeditvi mas oz. gostote v Zemljini notranjosti.

Ortometrične višine imajo sicer geometrični pomen, vendar točke z enakimi ortometričnimi višinami ne ležijo na istih nivojskih ploskvah (razen na geoidu). Povezava z elipsoidnimi višinami (h) je preko geoidnih višin N , $h = H + N$.

V praksi dodamo ortometrični popravek (OP) merjeni višinski razliki in dobimo ortometrično višinsko razliko:

$$OP_{ij} = \sum_{k=i}^j \frac{\mathbf{g}_k - \gamma_0}{\gamma_0} \delta l_k + \frac{\bar{\mathbf{g}}_i - \gamma_0}{\gamma_0} H_i - \frac{\bar{\mathbf{g}}_j - \gamma_0}{\gamma_0} H_j \quad (4.11)$$

pri tem so: δl_k vsota niveliranih višinskih razlik med reperjema i in j ; $\bar{\mathbf{g}}_i, \bar{\mathbf{g}}_j$ srednje vrednosti težnega pospeška vzdolž težiščnic reperjev i in j ; H_i in H_j sta nadmorski (ortometrični) višini reperja; γ_0 je izbrana vrednost normalnega težnega pospeška. Kot vidimo, popravek tvorijo trije členi: prvi je dinamični popravek, ki je odvisen od poti niveliranja in znaša od nekaj centimetrov do decimetra: Zadnja dva člena sta krajevno odvisna in jih lahko izračunamo le na osnovi hipotez. Tudi ta dva popravka sta velika, vendar nasprotnega predznaka, kot je dinamični popravek. Skupni ortometrični popravek tako znaša od par milimetrov do centimetra.

Ker lahko srednji težni pospešek vzdolž težiščnice določimo le na osnovi hipotez o gostoti, lahko v praksi določimo le bolj ali manj natančne aproksimacije ortometričnih višin. Ker obstaja več načinov, kako določiti čim boljši približek teoretičnemu srednjemu pospešku vzdolž težiščnice, imamo celo vrsto ortometričnih višinskih sistemov, ki se običajno imenujejo po avtorju metode njihovega izračuna. Vse enačbe oz. ortometrične višinske sisteme lahko razdelimo v dve skupini:

- a) prva skupina metod poskuša določiti vrednost srednjega težnega pospeška vzdolž težiščnice čim bolj eksaktno in tako višinski sistem čim bolj približati teoretičnemu ortometričnemu višinskemu sistemu. Sem spadajo metode izračuna, ki so jih predlagali Helmert, Niethammer, Mader in Müller.
- b) druga skupina metod, ki poskušajo obdržati izračunane ortometrične višine čim bližje niveliranim višinam. Sem spadajo enačbe, ki so jih predlagali Ramsayer, Ledersteger, Baranov.

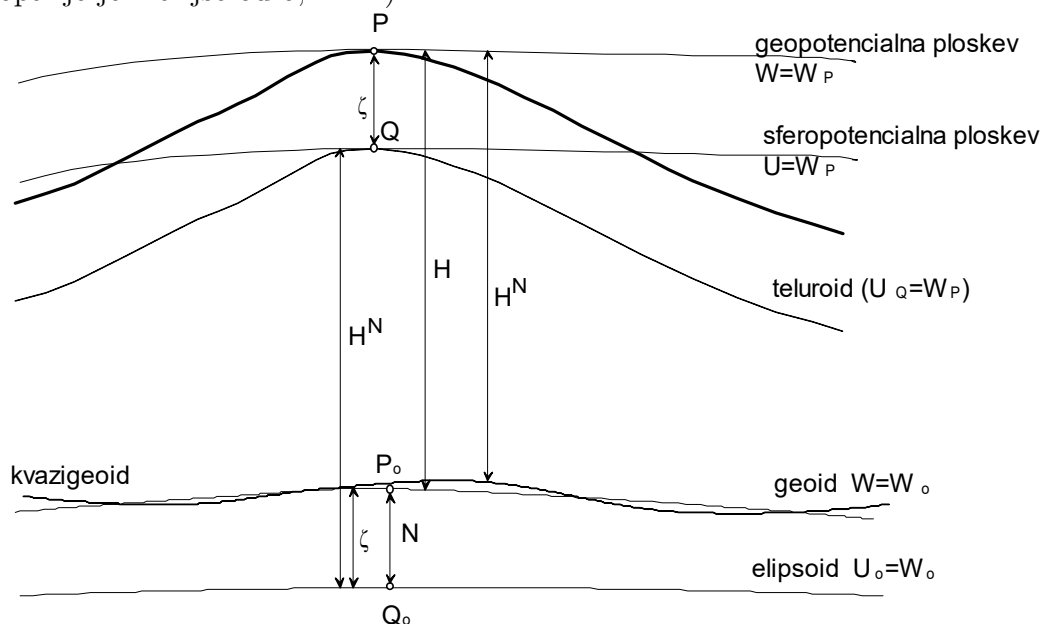
Natančnost določitve ortometričnih višin je odvisna od števila in natančnosti podatkov o gostoti zemeljske skorje, ki jih imamo na voljo.

Da bi se izognil uvedbi hipotez o vrednosti težnega pospeška v notranjosti Zemlje, je M.S. Molodenski leta 1954 predlagal uvedbo *normalnih višin* (H^N). Normalno višino dobimo če geopotencialno koto delimo z srednjo vrednostjo normalnega težnega pospeška na odseku "normalne težiščnice" točke P_i (slika 4.5):

$$H_i^N = \frac{C_i}{\bar{\gamma}_i} \quad \text{pri čemer je: } \bar{\gamma}_i = \frac{1}{H_i^N} \int_0^{H_i^N} \gamma(\phi, h) dH^N \quad (4.12)$$

Srednjo vrednost normalnega težnega pospeška iščemo na odseku težiščnice v normalnem težnostnem polju ("normalna težiščnica") med točko Q_0 na nivojskem elipsoidu in točko Q na teluroidu.

Teluroid je ploskev (bolje povedano geometrijsko mesto točk), za katero velja, da je v vsaki njeni točki Q izpolnjeno $U_Q = W_P$. Teluroid ni nivojska ploskev, namreč njegova oblika ponazarja fizično površino Zemlje. "Normalne težiščnice" imajo zelo majhno ukrivljenost, tako da se v praksi ta lahko zamenja z odsekom normale na elipsoid (odstopanje je manjše od 0,1 mm).



slika 4.5: normalna višina

Višinska razlika med teluroidom in fizično površino Zemlje je anomalija višine ζ . V splošnem ni sprejemljivo, da višino neke točke predstavlja višina, ki se ne konča v tej točki. Zato je Molodenski postopek obrnil in definiral novo ploskev *kvazigeoid*. Če bi normalne višine vseh točk na površini Zemlje nanegli navzdol v njeno notranjost bi dobili ploskev kvazigeoida. Na ta način je kvazigeoid za normalne višine to, kar je geoid za ortometrične višine. Kvazigeoid ni nivojska ploskev, vendar so njegova odstopanja od geoida majhna, na morjih ti dve ploskvi sovpadata.

Točno srednjo vrednost γ na odseku Q_0Q lahko izračunamo z integracijo, vendar zadošča, da vzamemo vrednost γ na višini $H^N/2$ in popravimo izračunano vrednost iterativno. Če poznamo vrednosti anomalije višine v točki obravnave, lahko srednjo vrednost γ izračunamo kot sredino med vrednostjo normalne težnosti na elipsoidu (*Somiglianov* izraz, enačba 3.49) in vrednostjo normalne težnosti na teluroidu (enačba 3.54): $H^N = h - \zeta$.

Ker lahko geopotencialno koto določimo z geopotencialnim nivelmanom, lahko normalne višine določimo brez dodatnih pogojev in hipotez.

Zveza med normalnimi višinami in elipsoidnimi višinami je preko anomalij višine; $h = H^N + \zeta$. Razlike $\zeta - N$ so vedno pozitivne in premosorazmerne z nadmorsko višino območja in na celinah ne presegajo vrednosti 1m.

Elipsoidna višina predstavlja oddaljenost točke na površju Zemlje od referenčnega elipsoida. Sistem elipsoidnih višin je geometrično definiran in ni podvržen vplivom lokalnega težnostnega polja. Elipsoidno višino lahko izrazimo tudi preko razlik normalnega težnostnega potenciala :

$$h_i = \frac{U_0 - U_{Pi}}{\bar{\gamma}_i} \quad \text{pri čemer je} \quad \bar{\gamma}_i = \frac{1}{h_i} \int_{Q_0}^P \gamma dh \quad (4.13)$$

Če je privzeti elipsoid (nivojski) geocentričen, govorimo o absolutnih elipsoidnih višinah, v nasprotnem primeru gre za relativne. Takšne so tudi elipsoidne višine, ki se nanašajo na Besselov referenčni elipsoid.

Med elipsoidno, ortometrično in normalno višino veljajo zveze:

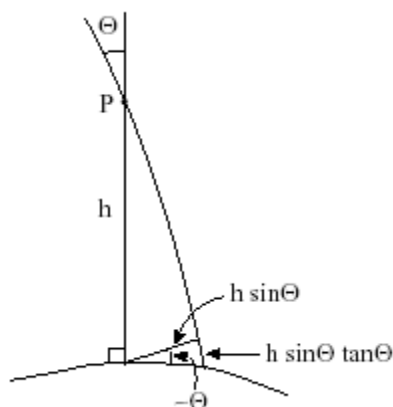
$$h = H + N = H^N + \zeta \quad (4.14)$$

Empirično velja naslednja zveza med kvazigeoidno in geoidno višino:

$$\zeta - N = 0,1 \bar{H} H \quad [\text{km}]$$

pri tem sta $H_{prečno}$ povprečna ort. višina območja in H ortometrična višina točke obravnave.

Geometrično se različne višine nanašajo na odseke različnih "težiščnic". Predvsem nastopa razlika med navpičnico in normalo na elipsoid pri ortometričnih in normalnih višinah (strogo je to normalna težiščnica, ne pa normala na elipsoid). Razlika med odsekom navpičnice in normale je sorazmerna odklonu navpičnice (slika 4.6).



Slika 4.6: razlika med odsekom navpičnice in normale na elipsoid

Ustrezna višinska razlika je približno enaka:

$$\delta h \approx h \sin \Theta \tan \Theta$$

Razlika je zanemarljiva, tudi pri ekstremnih odklonih ($\Theta=1'$, $h=10\,000$ m) je ta $\delta h < 1$ mm. Torej lahko vse višine, ki imajo geometrično predstavbo, štejemo vzdolž normale na elipsoid.

Na koncu pa omenimo še t.i. *sferoidne* oz. *normalne-ortometrične* višine (H^{NO}). Te višine so uporabljali v preteklosti, ko so bile meritve težnega pospeška zapletene in dolgotrajne. V tem primeru so namesto izmerjenega težnega pospeška uporabljali teoretične vrednosti (normalni težni pospešek). Sferoidne (normalne) ortometrične višine se nanašajo na t. i. normalno ničelno nivojsko ploskev. Iz rezultatov geometričnega nivelmana so izračunali t.i. normalne geopotencialne kote C^N . Ustrezna metrično višino so dobili z deljenjem z vrednostjo povprečne vrednosti normalnega težnega pospeška:

$$H_i^{NO} = \frac{C_i^N}{\bar{\gamma}_i}$$

Višin niso računali na ta način, ampak so višinskim razlikam prištevali ustrezne popravke. Te so računali po t.i. sferoidnih enačbah, po katerih so višine tudi dobile ime.

Danes so te višine brez posebnega pomena, vendar so dejansko v uporabi pri nas v Sloveniji, in so bile v uporabi v mnogih evropskih državah.

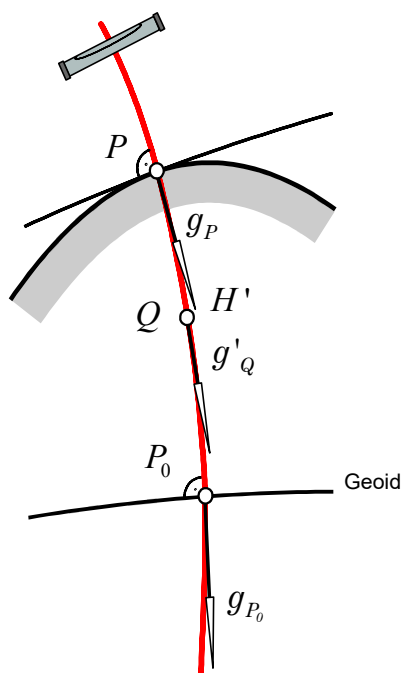
Različno ocenjevanje pogojev, ki jih mora izpolnjevati višinski sistem, je v preteklosti privedlo do tega, da uporabljajo v različnih državah različne višinske sisteme. Nadmorske višine točk, ki so jih določili z niveliranjem v XIX. stoletju so podane v ortometričnih višinah (srednja vrednost g je računana po Helmertovih enačbah). Danes v večini evropskih držav prehajajo iz sistema ortometričnih višin na sistem normalnih višin po Molodenskem. V Franciji uporabljajo normalne višine po Vignalu. Zaradi vključevanja v UELN ("United European Levelling Network") imajo vse evropske države višine reperjev podane tudi v geopotencialnih kotah. Za območje Slovenije je bila v geopotencialnih kotah izravnana nivelmanska mreža II. NVN.

4.1 Srednja vrednost težnosti vzdolž težiščnice

Srednjo vrednost g -ja vzdolž težiščnice lahko izračunamo samo z uvajanjem predpostavk o gostoti Zemljine notranjosti.

Naj bo točka P na površju Zemlje, ustrežna točka Q vzdolž težiščnice, kjer računamo srednjo vrednost težnosti, in P_0 ustrežna točka na geoidu. Vrednost g -ja vzdolž težiščnice izračunamo lahko:

$$g_Q' = g_P - \int_Q^P \frac{\partial g}{\partial H} dH \quad (4.15)$$



Slika 4.7: izračun povprečne vrednosti g' vzdolž težiščnice
 Vertikalni gradient težnosti poznamo (enačba 3.42):

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial g}{\partial z} = -W_{zz} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2$$

(razširjena generalizirana Poissonova diferencialna enačba). Povprečno težnost iz zgornje enačbe lahko izračunamo če poznamo povprečno ukrivljenost nivojske ploskve v točki P in gostoto ρ . Ker nam to največkrat ni znano, vzamemo kot približek normalno težnostno polje oz. vertikalni gradient normalne težnosti:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2$$

Kjer je J_0 srednja ukrivljenost sferopotencialne ploskve v točki P . Iz zgornjih dveh enačb sledi:

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G\rho$$

Približna rešitev enačbe (4.15) se potem glasi:

$$\bar{g} \approx g - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 2\pi G\rho \right) H$$

Pri čemer za normalni vertikalni gradient vzamemo numerični približek:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -0,3086 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$$

oz. drugi člen se z upoštevanjem vrednosti za G in $\rho=2670 \text{ kgm}^{-3}$ glasi:

$$4\pi G\rho = 0,2238 \frac{\text{mGal}}{\text{m}}$$

Končno se vrednost g -ja vzdolž težiščnice dobi kot:

$$g' = g + 0,0848 (H_P - H_Q)$$

pri čemer sta g v [Gal] in višina H v [km].

Obstaja še druga možnost izračuna povprečne vrednosti g -ja, ki pa je podobna redukciji merjene težnosti na ničelno nivojsko ploskev. Naredimo jo iz treh korakov:

1. Odstranimo vse mase nad geopotencialno ploskvo $W=W_Q$, katera vsebuje Q in odštejemo njihovo privlačenje g -ja v točki P .
2. Ker se potem stojišče P nahaja v "prostem zraku", uporabimo redukcijo prostega zraka, ter točko P prestavimo v točko Q .
3. Povrnemo odstranjene mase na njihovo staro mesto ter algebrsko seštejemo njihovo privlačenje g -ja v točki Q .

Ta postopek lahko prikažemo s numerični vrednostmi v naslednji tabeli:

težnost merjena v točki P :	g_P
1. odstranimo Bouguerovo ploščo	$-0,1119 (H_P - H_Q)$
2. redukcija prostega zraka iz P v Q	$+0,3086 (H_P - H_Q)$
3. povrnemo Bouguerovo ploščo	$-0,1119 (H_P - H_Q)$

$$g_Q = g_P + 0,0848 (H_P - H_Q)$$

Dejansko smo dobili enako enačbo kot v prejšnjem primeru vendar po drugačnem postopku. Vrednost težnega pospeška izmerjenega po teh enačbah se imenuje redukcija težnega pospeška Poincare-Preya.

Če redukcijo Poincare-Preya uporabimo v enačbi za ortometrično višino (Q je na polovici med geoidom in površjem Zemlje):

$$H_i = \frac{C_i}{\bar{g}_i}$$

dobimo t.i. Helmertovo enačbo za t.i. ortometrične višine:

$$H = \frac{C}{g + 0,04235H}$$

4.2 Morska gladina

Morska gladina je podvržena številnim časovnim in prostorskim spremembam. Ločimo spremembe malih frekvenc, ki jih povzročajo klimatski vplivi in vrtnčenje v robnih morskih tokovih. Amplitude teh sprememb so v mejah 0,1–1 m na razdaljah 100–200 km (Lambeck, 1987). V daljših časovnih obdobjih lahko obravnavamo morsko gladino kot ekvipotencialno ploskev. Vendar se gladina tudi v tem obdobju spreminja, saj geološki procesi spreminjajo količino morske vode in obliko dna. Tektonski procesi znotraj Zemljine skorje lahko spremenijo morsko gladino za nekaj sto metrov, gledano v

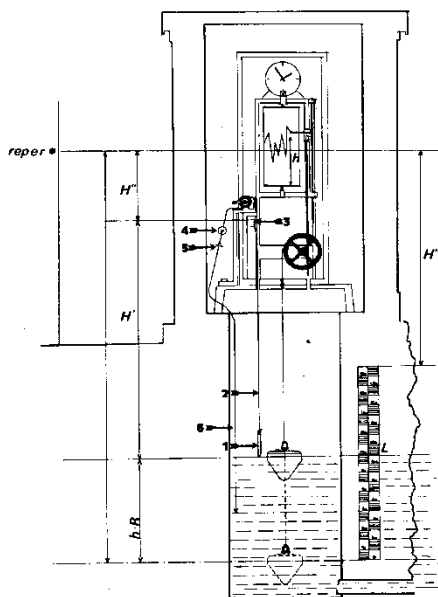
obdobju 10^8 let. V krajših časovnih obdobjih 10^3 – 10^5 let ima največji vpliv na raven morske gladine izmenjava vode med ledeniki in oceani.

V zelo kratkih časovnih obdobjih (dnevne spremembe) spreminjata raven morske gladine plima in oseka, ki sta posledica izmeničnega privlačnega vpliva Sonca in Lune. Plimo in oseko imenujemo *plimovanje* ali *bibavica*. Plima in oseka se menjujeta približno vsakih 6 ur. V 24^h 50^m sta v povprečju dve plimi in dve oseki. To pa je časovni presledek med dvema zaporednima zgornjima kulminacijama Lune. Za radi dnevnega vrtenja Zemlje zajame plimovanje zaporedoma vse kraje na Zemlji. V določenem kraju se plima in oseka vrstita približno vsakih 12 ur. Plimovanje je največje, ko ležijo Sonce, Zemlja in Luna v isti liniji, t.j. ob mlaju ali ščipu.

4.2.1 Srednja morska gladina

Morske plimske amplitude in višine točk na kopnem so definirane glede na *srednjo morsko gladino*. V prvem približku lahko srednjo morsko gladino, povprečje trenutne morske gladine za izbrano časovno obdobje, enačimo z ekvipotencialno ploskvijo ali geoidom. Razlike so očitne že v tem, da rezultat niveliranja med dvema oddaljenima mareografima v splošnem ne bo enak (vsota višinskih razlik ne bo nič). Razlike nastajajo iz prostorskih in časovnih vzrokov: geoid sam po sebi je časovno odvisen, prav tako pa definicijo srednje morske gladine moramo podati z večjo natančnostjo. Velike razlike so v srednji morski gladini v plitvih morjih ob obalah in na odprtem morju. Tam tokovi lahko povzročijo sistematične spremembe morske gladine velikosti 10 - 20 cm. Na odprtem morju spremljamo gladino z posebnimi merilci vodnega tlaka, ki se postavljajo na morsko dno. Te meritve dopolnjujemo s podatki o gostoti in saliniteti vode.

Ob obalah registriramo srednjo morsko gladino s posebnimi napravami *mareografi* ("tide gauge"). Ti se postavljajo vzdolž obal svetovnih morij in oceanov ter nenehno beležijo trenutno gladino morja. Začetki registracije morske gladine segajo v XVIII stoletje. Konstrukcijsko so lahko narejeni kot mehanski, tlačni, akustični in radarski. Do sedaj so se največ bili v uporabi mehanski mareografi (slika 4.6); sama konstrukcija se ni bistveno spremenila v zadnjih sto letih.



slika 4.8: mehanski mareograf

Glavni deli mehanskega mareografa so:

- plavač, ki v določenem merilu prek mehanskega sistema zobnikov prenaša nihanje morske gladine na pero,
- pero beleži spremembe na papir, ki je navit na valj,
- valj pa vrti ura. Valj naredi poln obrat v 24 urah, 7 dni, ali drugem, vnaprej določenem obdobju.

Sistem je narejen tako, da se zadušijo kratkoperiodični površinski valovi, ter da se v sistem spuščajo samo dolgoperiodična nihanja, ki se mehansko ali digitalno registrirajo.

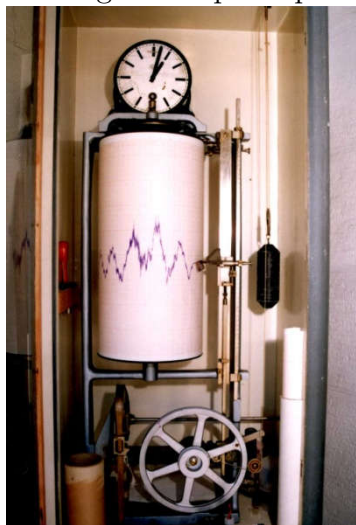
Tlačni mareograf beleži vrednosti tlaka v morju direktno z merjenjem tlaka na določeni globini ali pa meri ravnotežni tlak s pomočjo t.i. sistema mehurčkov ("bubble pressure gauge"). Iz merskega signala je potrebno odpraviti komponento izmerjenega zračnega tlaka.

Princip akustičnega mareografa je merjenje razdalje od izvira akustičnega snopa do morske gladine, ki se zaradi razsipanja snopa izvaja v cevi, in je zaradi razlik v temperaturi znotraj in zunaj cevi potrebno izračunati ustrezen popravek.

Podoben princip, vendar na drugih frekvencah in z drugo vrsto oddanega signala, ima radarska naprava, ki se je postavi brez zaščitne cevi, in je zaradi tega enostavnejša za vzdrževanje in kontrolo mareografske konstante.

Najbolj pomemben dejavnik pravilne registracije dnevnih sprememb nihanj morske gladine je dobro vzdrževanje mareografa. Zgornja meja natančnosti dnevne registracije

znaša 1mm. Kot izhodišče za izračun nadmorskih višin točk se običajno jemlje povprečje srednje gladine morja izračunano v času najmanj 18,6 let (čas v katerem ravnina Luninega tira opravi poln obrat, precesijska perioda luninega tira).

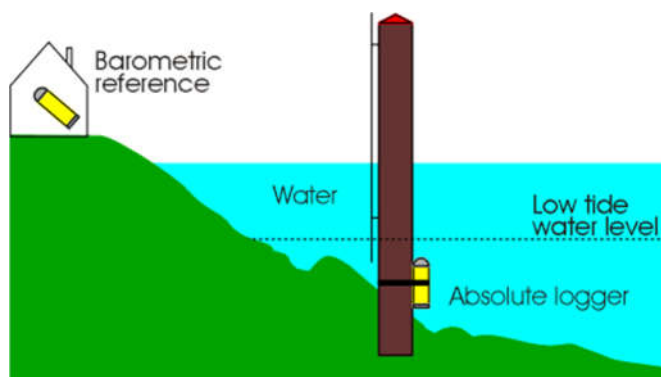


mehanski mareograf z uro (Split)



radarski mareograf

slika 4.9: različne konstrukcije mareografa

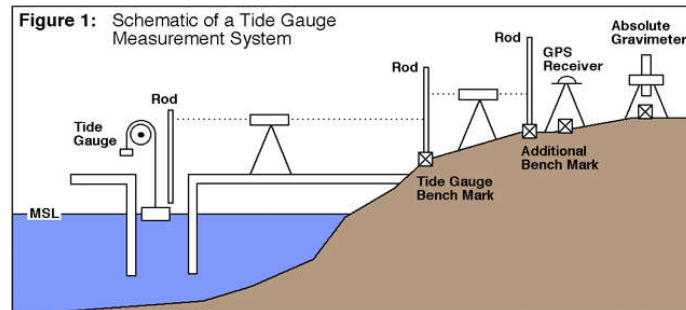


slika 4.10: princip dela tlačnega mareografa

V bližini mareografa se navadno nahaja fiksna višinska točka → osnovni mareografski reper, ki se z meritvami naveže na državno nivelmansko mrežo. Po dogovoru ima srednji nivo morja oziroma ničelna nivojska ploskev absolutno višino enako nič. Lega ničelne nivojske ploskve je definirana z vertikalno oddaljenostjo od t.i. *normalnega reperja*, ki je stabiliziran na območju, ki velja za geološko stabilno.

Številni mareografi po svetu so združeni v Mednarodno službo srednje morske gladine (PSMSL "Permanent Service for Mean Sea Level"), s sedežem v britanskem oceanografskem observatoriju v Liverpoolu. Služba hrani in hkrati računa mesečna in letna povprečja registracij z več kot 1800 mareografov po celem svetu. Mesečna in letna povprečja, ki jih ta služba izračuna so tudi v mejah 1mm.

Danes so posamezni mareografi vzpostavljeni kot kombinirane geodetske točke, kar pomeni, da se na njej nahaja permanentna GPS-postaja, periodično pa se na njej opravljajo visoko natančne nivelmanske in gravimetrične meritve (po možnosti celo absolutne). Krajevna stabilnost antene oz. objekta se spremlja z občasnimi terestričnimi kontrolnimi meritvami.

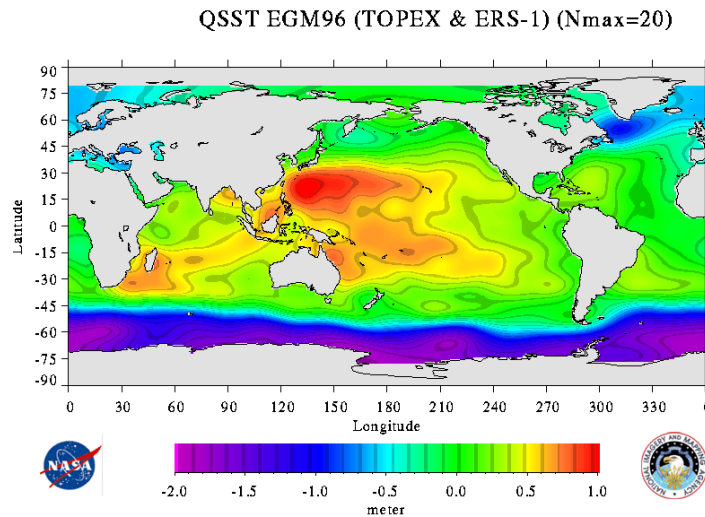


slika 4.11: kombinirana mareografska postaja

4.2.2 Topografija morske gladine

Vse nepravilnosti, ki povzročajo odstopanje srednje morske gladine od ekvipotencialne ploskve imenujemo *topografija morske gladine* (SST "sea surface topography"). Poleg že omenjenih klimatskih sprememb in vrtnčenja vode so prisotni še drugi vplivi: močni tokovi znotraj oceanskih voda, razlike v temperaturi in saliniteti (istega morja); dnevne spremembe topografije morske gladine znašajo tudi do ± 1 m.

Topografija morske gladine se danes določa izključno s satelitskimi altimetrskimi meritvami. Pri tem se merijo trenutne višine ("Sea Surface Height") morske gladine nad geoidom. Ti se spreminjajo časovno in prostorsko. Na izmerjene višine morske gladine največ vplivajo težnost, plimovanje in oceanski tokovi. Pri tem težnost lahko spremeni SSH za več deset metrov, tokovi pa za nekaj centimetrov. Vpliv težnosti na SSH je konstanten, dočim je vpliv plimovanja periodičen. Izmerjene višine morske gladine SSH so manjše na območjih manjše gostote in obratno. Na primer v najglobljem delu svetovnih oceanov - Marijanski jarek (skoraj 11 km), upade SSH za 20 m. Seveda višine morske gladine niso konstantne tudi zaradi vpliva vetra, tokov in Zemljine rotacije. Takšne spremembe imenujemo *dinamična morska topografija* (DST).



slika 4.12: SST glede na globalni geoid EGM96

4.2 Višinski datum nivelmanskih mrež v Sloveniji

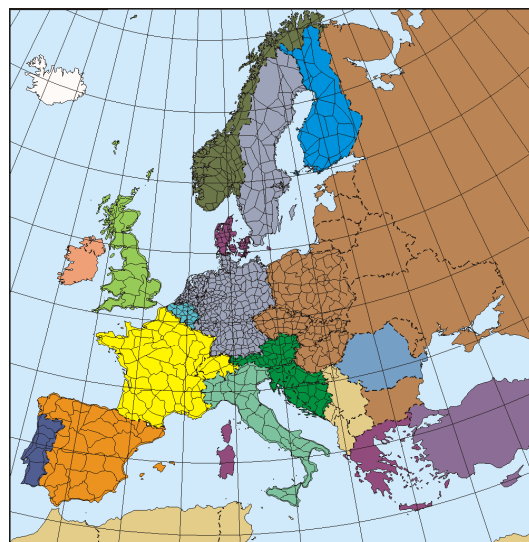
Geodetski datum je niz poljubnih numeričnih ali geometrijskih količin, ki so izhodišče za izračun drugih količin. V geodeziji raje govorimo o referenčnih (koordinatnih) ploskvah, ki predstavljajo geodetski datum. Datum je referenčna ploskev, ki je določena z obliko in velikostjo. V geodeziji je zgodovina pogojevala ločeno obravnavo med horizontalnimi in vertikalnimi datumi. Vertikalni datum predstavlja geoid, ki pa ga upodobimo z srednjo morsko gladino. Bolj stroga definicija pravi, da vertikalni datum tvorijo fundamentalne višine, ki služijo kot izhodišče za izračun višin reperjev v državnih nivelmanskih mrežah. Fundamentalne višine se običajno višine fundamentalnih oz. normalnih reperjev.

Evropska nivelmanska mreža UELN ima izhodiščno točko v Amsterdamu → NAP ("Normaal Amsterdam Peil"), reper na višini 1,4278 m poleg amsterdamskega mareografa (ki beleži srednjo morsko gladino že od leta 1675).

V preteklosti so države večinoma uporabljale različne mareografe kot izhodišča svojih nivelmanskih mrež. Pregled vertikalnih datumov Evrope podaja slika 4.14.



slika 4.13: NAP



U UELN lines

■ Alicante	■ Constanta	■ Malin Head	■ Tregde
■ Amsterdam	■ Genova	■ Marseille	■ Trieste
■ Antalya	■ Helsinki	■ Newlyn	■ no information
■ Cascais	■ Kronstadt	■ Ostend	■ other

slika 4.12: višinski datumi v Evropi

Izmere nivelmanskih mrež oziroma nivelmanskih vlakov višjih redov na območju Republike Slovenije lahko časovno razdelimo v štiri skupine (Koler, 1997):

1. 1873-1895: avstroogrski nivelman, ki ga je izvedel Vojaškogeografski inštitut z Dunaja. Na območju Republike Slovenije je bilo stabiliziranih in izmerjenih 734 km nivelmanskih linij.
2. 1946-1957: Prvi nivelman velike natančnosti SFRJ (I. NVN), pri katerem so sodelovali Zvezna geodetska uprava, Vojaškogeografski inštitut in Geodetska uprava Republike Slovenije. Na območju Slovenije je bilo stabiliziranih in izmerjenih 1084 km nivelmanskih vlakov. Nivelmanske meritve niso bile izravnane, temveč so bile samo vklopljene v stare avstrijske meritve. Višine so naslonjene na stari avstroogrski vertikalni datum (Bilajbegović et al. 1991).
3. 1970-1972: drugi nivelman velike natančnosti SFRJ (II. NVN), ki ga je izmeril Vojaškogeografski inštitut iz Beograda. V mrežo II. NVN je bilo vključenih 27 nivelmanskih zank skupne dolžine 9824 km. Na območju Slovenije so bili stabilizirani in izmerjeni nivelmanski vlaki II. NVN v dolžini 688 km. V času izmere II. NVN so bili nivelirani tudi nivelmanski vlaki nekaterih mejnih odsekov z Italijo, Avstrijo in Madžarsko. Nivelirane so bile tudi mikromreže fundamentalnih reperjev in mikromreže na mejnih prehodih (Fernetiči, Korensko sedlo, Redič). Meritve II. NVN-a so izravnane in navezane na novo stabilizirani normalni reper.
4. Niveliranje posameznih nivelmanskih vlakov višjih redov po letu 1971 oziroma po izmeri II. NVN. V letih od 1978 do 1987 so bili nivelirani posamezni odseki nivelmanskih vlakov II. NVN, ki so služili povezavi nivelmanskih mrež z

sosednjimi državami. Tako so bile navezane nivelmanske mreže Slovenije in Madžarske v Rediču in z Avstrijo na mejnih prehodih Dravograd Vič, Šentilj in Gornja Radgona. Poleg tega je bilo niveliranih 403 km nivelmanskih vlakov 1. reda. Leta 1995, 1996 in 1997, so bili nivelirani nivelmanski vlaki, ki povezujejo mejne prehode z Avstrijo in sicer: Ljubelj, Jezersko, Holmec, Radlje in Trate (dolžina nivelmanskih vlakov je 65 km).

Normalni reper za navezavo avstroogrške nivelmanske mreže na ničelno nivojsko ploskev, predstavlja reper na pomolu Sartorio v Trstu. Višino normalnega reperja v Trstu je izračunal dr. Farolfi. Nadmorska višina normalnega reperja je bila določena na osnovi enoletne registracije nihanj nivoja Jadranskega morja v letu 1875 in je znašala 3.352 ± 0.01 m. V Avstroogrski monarhiji so višino normalnega reperja določili na osnovi enoletnih opazovanj zato, ker so v teh letih v Evropi želeli povezati srednje nivoje Sredozemskega morja s severnimi morji in določiti enotni normalni reper za celo Evropo. Ker so ugotovili, da je srednji nivo Sredozemskega morja nižji za 13 cm od srednjega nivoja severnih morij, so se odločili, da ne bodo določili enotnega normalnega reperja za celo Evropo, temveč obdržijo posamezne države svoje normalne reperje.

O zanesljivosti določitve ničelne nivojske ploskve le na osnovi podatkov o enoletni registraciji nihanj nivoja morja, je že leta 1904 podvomil Sterneck. Tako je primerjal višine osnovnih reperjev mareografov v Trstu, Puli in Dubrovniku, ki so jih določili na osnovi večletnih opazovanj nihanj nivoja morja in na osnovi vključevanja v avstroogrško nivelmansko mrežo. Za obe višini normalnega reperja velja, da nista bili določeni na osnovi neprekinjenih opazovanj nihanj nivoja morja (vsaj 18.6 let). Poleg tega se oba podatka o legi ničelne nivojske ploskve (izhodiščne nule) razlikujeta za 8.99 cm. Po Sterneckovih izračunih se stare avstroogrške nadmorske višine reperjev ne nanašajo na srednji nivo Jadranskega morja v Trstu, temveč na primerjalno nivojsko ploskev, ki je za 8.99 cm nižja od ničelne nivojske ploskve, ki je bila določena na osnovi osemletnih opazovanj nihanj nivoja Jadranskega morja (1986). S problemom določitve vertikalnega datuma avstroogrške nivelmanske mreže so se ukvarjali tudi drugi geodeti in geofiziki. Tako lahko v različnih virih zasledimo, da je lega primerjalne ploskve, ki je bila privzeta za vertikalni datum avstroogrške nivelmanske mreže, nižja od ničelne nivojske ploskve od 6.056 cm do 18.5 cm. Seveda se pojavi vprašanje, zakaj obstajajo razlike med srednjimi nivoji, ki so jih določili posamezni raziskovalci? Odgovor moramo poiskati v dejstvu, da so bile posamezne vrednosti določene na različnih mareografih (jugoslovanska obala, Trst) in za različna leta.

Uradne nadmorske višine točk, ki jih uporabljamo v Sloveniji, so podane na osnovi vertikalnega datuma avstroogrške nivelmanske mreže. Te nadmorske višine točk so določene iz izmere I. NVN in navezovanj nivelmanskih vlakov nižjih redov na reperje I. NVN. V času izmere in izravnave nivelmanskih vlakov I. NVN na območju bivše SFRJ

nismo imeli stabiliziranega normalnega reperja. Tako so nadmorske višine I. NVN navezane na normalni reper avstroogrškega nivelmana, kar pomeni, da imamo za avstroogrsko nivelmansko mrežo in mrežo I. NVN isti vertikalni datum.

Poleg tega imamo vse nadmorske višine reperjev, razen za mestne nivelmanske mreže, preračunane na vertikalni datum II. NVN. Nivelmanska mreža II. NVN je bila prvič navezana na normalni reper, ki je bil stabiliziran na območju bivše SFRJ. Normalni reper so stabilizirali na geološko stabilnem območju v osrednjem delu bivše SFRJ (v mestu Maglaj – Bosna in Hercegovina).

V Kopru je leta 2005 obnovljen mareograf, ki je opremljen z GPS-sprejemnikom. Točka je vključena v evropsko službo spremljanja morske gladine ESEAS (*European Sea-Level Service*) in tudi v svetovno mrežo mareografov.



slika 4.15: mareografska postaja v Kopru.

5 Določanje geoida (kvazigeoida)

Določanje geoida (kvazigeoida) pomeni določanje oblike Zemlje oz. določitev ene določene nivojske ploskve Zemljinega težnostnega polja. Iščemo odgovor na vprašanje: ali lahko določimo težnostno polje Zemlje v zunanjem prostoru brez poznavanja razporeda gostote v njeni notranjosti, samo s poznavanjem potencial na robu območja (površje Zemlje). Matematično gledano gre za reševanje *problema robnega pogoja* (PRP) parcialnih diferencialnih enačb. V primeru težnostnega polja nastopajo Laplaceova dif. enačba (vodi k zunanjemu PRP) in Poissonova diferencialna enačba (vodi k notranjemu PRP). Nas zanima samo zunanji problem.

Parcialna diferencialna enačba ima množico rešitev, ki je navadno zelo obsežna. To množico lahko skrčimo le z dodatnimi zahtevami. V mnogih primerih iščemo rešitev, ki ima na robu območja (območje rešitev parcialne diferencialne enačbe) vnaprej predpisane vrednosti → *robni pogoj*.

V splošnem je pri reševanju PRP znana robna ploskev \mathcal{S} , vendar pri t.i. *geodetskem problemu robnih pogojev* (GPRP) temu ni tako. Gre za t.i. prosti GPRP, kjer moramo poleg geometrije robne ploskve \mathcal{S} , določiti tudi potencial W . Pri določitvi geoida nas dejansko zanima samo \mathcal{S} . Robne pogoje nam tu določa zvezna robna funkcija – težnostni potencial. Ker potenciala ne moremo neposredno izmeriti, ga predstavimo s količinami, ki se dajo neposredno izmeriti. Te količine so ali t.i. *anomaljske količine* težnostnega polja ali t.i. *moteče količine* težnostnega polja (anomalija težnosti in moteča težnost, odkloni navpičnice (Helmertovi ali Pizzetijevi) in geoidne višine ter anomalije višin). Vse te količine se lahko izrazijo v linearni obliki kot odvodi motečega potenciala T . Omenjene merjene količine podajajo robne pogoje, katerih rešitev je ploskev - približna oblika Zemlje.

Ločimo dva pristopa k rešitvi geodetskega problema robnih pogojev: t.i. "klasični", katerega rešitev je geoid in "pristop po Molodenskem", katerega rešitev je kvazigeoid. V grobem se pristopa ločita glede na redukcijo merjenih količin. Pri klasičnem pristopu merjene količine reduciramo na ničelno nivojsko ploskev ($W_0 = \text{const}$) in rešitev je geoid. V nasprotnem primeru, če uporabimo merjene količine takšne kot so (na fizični površini Zemlje) je rešitev kvazigeoid. Pri geoidu so "merjene količine" anomaljske količine, pri kvazigeoidu pa so te "moteče količine". V prvem primeru moramo upoštevati določene pogoje. Redukcija merjenih količin na geoid predpostavlja uvajanje hipotez o gostoti mas znotraj Zemlje. Poleg tega pomeni redukcija na geoid, da zunaj robne ploskve - geoida ni nobenih motečih mas (atmosfera in topografija). Pristop po Molodenskem ne terja nobenih hipotez o razporeditvi gostote, kot tudi ni potrebno opraviti nobenih redukcij merjenih količin. Je pa ta postopek mnogo bolj zapleten.

Končni rezultat izračuna geoida je določena oblika in velikost geoida (kvazigeoida) glede na izbrano referenčno ploskev elipsoida. Zaradi nepravilne razporeditve mas Zemlje je geoid nepravilne oblike in ni skladen z nobeno geometrijsko ploskvijo. V prostorskem smislu povezujejo geoid (kvazigeoid) in izbrani referenčni elipsoid geoidne višine (kvazigeoidne višine oz. anomalije višin). To so odstopanja pravilne oblike elipsoida od nepravilne oblike geoida (kvazigeoida). Naloga določitve oblike Zemlje je torej v izračunu teh odstopanj. S tem namenom so bile razvite številne metode računanja, ki pa so odvisne od vrste razpoložljivih geodetskih merskih količin.

Izračunane geoidne višine (anomalije višin) so, kot v primeru odklonov navpičnice, lahko relativne ali absolutne. Absolutne se nanašajo na absolutni geocentrični elipsoid Zemlje, kot sta GRS 80 in WGS 84. Relativne geoidne višine se nanašajo na referenčni elipsoid za izbrano območje. Relativne geoidne višine so nujne za povezavo satelitskih meritev (GPS) z državnimi mrežami, razvitimi in izmerjenimi s pomočjo klasične geodetske tehnike. Na primer pri transformacijskih nalogah vklopa lokalnih GPS mrež v obstoječo državno geodetsko mrežo. Posebej to velja, če se državne koordinate nanašajo na relativni referenčni elipsoid. Absolutne geoidne višine so uporabne v t.i. GPS višinomerstvu, kjer GPS opazovanja uporabimo za določitev nadmorskih višin točk (na primer v hribovitih območjih zamenjava za nivelman, ali trigonometrično višinomerstvo).

Geoid (kvazigeoid) je lahko izračunan na globalni ravni za celotno Zemljo, na lokalni ravni samo za določeno območje ene države ali več držav, ali pa celo samo za ozko območje z natančno določenim namenom (raziskave za potrebe geodinamike ali inženirske geodezije).

5.1 Vrste podatkov za določanje geoida (kvazigeoida)

Za izračun geoida (kvazigeoida) se uporabljajo naslednje geodetske merske količine:

1. **Meritve težnosti (težnega pospeška).** Težnost ima pomembno vlogo v fizikalni geodeziji. Uporablja se za določanje anomalij težnostnega polja, ortometričnih višin iz nivelmansko določenih višinskih razlik, v raziskavah tektonskih premikov in proučevanju sprememb srednje morske gladine.

Globalna razporeditev točk z izmerjeno težnostjo je neenaka. Obstajajo predeli z zelo gosto mrežo točk (Severna Amerika, Evropa, Avstralija), južna polobla pa vsebuje dokaj redke meritve težnosti. Ne smemo pozabiti, da morja tvorijo 70 odstotkov površine Zemlje.

2. **Astronomska opazovanja.** Z astronomskimi opazovanji zvezd in Sonca določamo astronomske koordinate točk na Zemlji (astronomska širina Φ in astronomska dolžina Λ) ter azimute stranic v državni mreži (A). Astronomska opazovanja

uporabljamo za določitev geoida posredno preko izračunanih komponent odklona navpičnice (iz primerjave astronomskih in geodetskih koordinat). Astronomska opazovanja so zelo zahtevna, zamudna in draga, ter so omejena na celinske dele Zemlje. Gostota razporeditve je najredkejša od vseh razpoložljivih podatkov za določanje geoida.

3. **Koordinate točk določene z metodami satelitske geodezije.** Satelitske meritve za določanje položaja na Zemlji (Doppler, GPS) nam podajo tridimenzionalne koordinate točk. Te se nanašajo na globalni geocentrični koordinatni sistem in globalni zemeljski elipsoid. S transformacijo kartezičnih koordinat oz. koordinate Z v elipsoidno višino h je možna primerjava z ortometričnimi višinami, ki se nanašajo na geoid, kot ničelno nivojsko ploskev. Enako velja za normalne višine in anomalije višin.
4. **Opazovanja do umetnih Zemljinih satelitov in med njimi.** S sledenjem pravilnosti tirov gibanja nizkoletečih satelitov in z analizo pridobljenih podatkov je možno določiti model za zemeljski težnostni potencial, t.i. geopotencialni model. Največja pomankljivost teh modelov je njihova majhna ločljivost, torej možnost predstavitve samo globalnega težnostnega polja (predstavitev dolgih valov, kar ustreza večjim območjem na Zemlji.
5. **Meritve satelitske altimetrije.** Osnovo satelitske altimetrije predstavljajo višinometri (altimetri), ki jih nosijo nizkoleteči sateliti. Altimetri oddajajo, pravokotno na gladino morja, radarske impulze, ki se po odboju vračajo nazaj do satelitske antene. Tiri gibanja satelitov se obravnavajo kot znane količine, torej je znana njihova višina nad referenčnim elipsoidom. Za vsak trenutek merjenja je možno določiti trenutni položaj morske gladine, ki je podana z višino nad elipsoidom. Če poznamo površino morske topografije (SST), je možno neposredno določiti višine geoida nad elipsoidom.

Vse navedene geodetske količine se v neposrednem izračunu geoida uporabljajo v obliki svojih "anomalijskih" komponent oz. "motečih" komponent v primeru določitve kvazigeoida:

- Podatki o težnosti so predstavljeni v obliki anomalij težnosti oz. moteče težnosti.
- Astronomske koordinate so izražene s komponentama odklona navpičnice, torej z meridiansko komponento ξ in komponento v smeri prvega vertikalnega η .
- Tridimenzionalne koordinate točk, določene s pomočjo satelitskih opazovanj, so izražene v elipsoidnem koordinatnem sistemu, pri čemer višinska komponenta predstavlja elipsoidno višino.
- Globalni geopotencialni modeli so predstavljeni z razvojem motečega potenciala v vrsto sfernih funkcij.

- Geometrijo morske gladine predstavlja višine gladine morja nad referenčnim elipsoidom.

5.2 Metode izračuna geoida

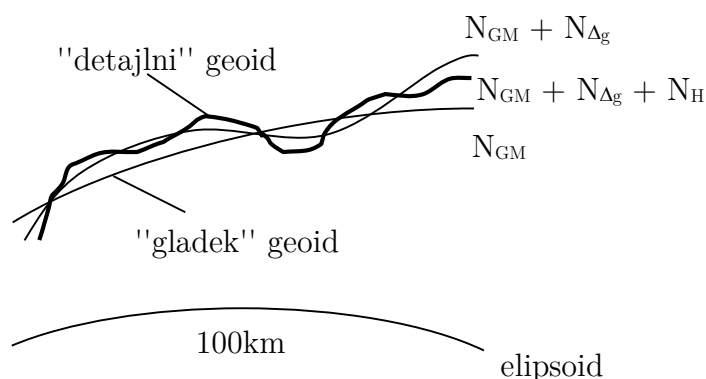
Metode računanja geoida lahko glede na vrsto uporabljenih podatkov, razvrstimo v tri glavne skupine:

1. V prvo skupino uvrščamo metode, ki uporabljajo samo terestrične podatke:
 1. gravimetrična metoda,
 2. astrogeodetska metoda,
2. V drugo skupino spadajo t.i. satelitske metode določitve geoida.
3. Tretja skupina metod predstavlja integrirani pristop k določitvi geoida, kjer se uporabi več podatkov terestričnih in rešitev satelitskih metod, običajno globalni geopotencialni model.

Slaba stran vseh klasičnih metod izračuna geoida je nepopolna in nehomogena razporeditev uporabljenih podatkov na Zemlji. Od vrste uporabljenih podatkov je odvisna tudi rešitev:

- gravimetrična rešitev podaja zelo dobro lokalno ločljivost, vendar dolgovalovna komponenta polja vsebuje sistematični pogrešek zaradi neenakomerne razporeditve izmerjenih vrednosti anomalij.
- Astrogeodetska rešitev dejansko vsebuje neposredno merjene vrednosti geoidnih višin, vendar je njena slaba stran relativno velika oddaljenost točk z merjenimi vrednostmi odklonov.
- Satelitsko podprta rešitev ima dolgovalovno komponento polja homogeno in brez sistematičnih pogreškov, vendar je detajl oz. lokalna ločljivost slaba.

Iz praktičnih in teoretičnih razlogov upoštevajo vse sodobne metode določitve geoida (kvazigeoida) vsaj tri vrste podatkov: globalni geopotencialni model, terestrična opazovanja (neposredne merjene anomalije težnosti – motečo težnost ali odklone navpičnice oz. geoidne višine) in podatke o topografiji. Tako so tudi podatki razdeljeni glede na to, kakšen vpliv imajo na celotno geoidno višino. Dolgovalovni vpliv imajo podatki globalnega geopotencialnega modela (N_{GM} , valovne dolžine okoli 100 km), terestrični podatki (anomalije težnosti (moteča težnost) in odkloni, $\rightarrow N_g$) imajo srednjevalovni vpliv (dolžine 2–10 km), kratkovalovni vpliv pa imajo podatki o topografiji pridobljeni na osnovi digitalnega modela reliefa (N_H), kjer je valovna dolžina odvisna od ločljivosti DMR-ja. To ponazori naslednja slika:



slika 5.1: prispevek posameznih vrst podatkov pri določitvi geoida

Seveda če izračunani geoid obsega tudi oceanska (morska) območja, moramo upoštevati altimetrške meritve (geoidne višine pridobljene na osnovi altimetrskih meritev se lahko pretvorijo v ustrezne altimetrške anomalije težnosti).

5.2.1 Dinamične satelitske metode – globalni geopotencialni modeli

S sledenjem pravilnosti tirov gibanja satelitov, ki se gibljejo na nižjih višinah, je možno določiti model za zemeljski gravitacijski potencial. Predstavimo ga v obliki vrste sfernih funkcij. Brunsova enačba nam poda razmerje med geoidno višino, motečim potencialom in težnostjo:

$$N_p = \frac{T_p}{\gamma_Q}$$

Anomalija potenciala (t.i. moteči potencial) predstavlja razliko med dejanskim gravitacijskim potencialom W in normalnim gravitacijskim potencialom U :

$$T = W - U$$

Moteči potencial je možno predstaviti tudi v obliki vrste sfernih funkcij. Upoštevajoč Brunsovo enačbo, lahko geoidno višino predstavimo v obliki vrste sfernih funkcij:

$$N = \left(\frac{GM}{a_e \gamma} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (\delta A_{nm} \cos m\lambda + \delta B_{nm} \sin m\lambda) \quad (5.1)$$

kjer so, koeficienti razvoja določeni z:

$$\delta A_{nm} = A_{nm} (\text{koef. iz opazovanj}) - A_{nm} (\text{referenčni})$$

$$\delta B_{nm} = B_{nm} (\text{koef. iz opazovanj}) - B_{nm} (\text{referenčni})$$

Pri razvoju potenciala oz. geoidnih višin v vrsto sfernih funkcij je pomembno torej določiti neznane koeficiente razvoja. Določimo jih lahko na različne načine: z izključno satelitskimi opazovanji ali v kombinaciji s podatki satelitske altimetrije in gravimetrične izmere (anomalije težnosti). Pri tem se uporablja metoda skupne izravnave oz. metoda integralskih enačb. Samo satelitska opazovanja zadoščajo za določitev koeficientov razvoja reda $n=20, \dots, 36$. Na določitev koeficientov vpliva predvsem člen $(a_e/r)^{n+1}$. Zaradi višine tirov gibanja satelitov je $r \geq 600$ km in z naraščanjem n je člen vse manjši. S kombinacijo različnih podatkov je možno določiti višje koeficiente razvoja, v tem trenutku vse tja do reda $n=360$. Ta red razvoja ustreza predstavitvi območja z minimalno valovno dolžino težnostnega polja 110 km ($360^\circ/n=1^\circ=110$ km), oz. ločljivosti geoidnih višin 55 km ($180^\circ/n$).

Globalni geopotencialni modeli imajo velik pomen zaradi svoje uporabnosti na območju celotne Zemlje, ker niso omejeni samo na celine oz. oceane. Njihova slaba stran je relativno majhna ločljivost v predstavitvi težnostnega polja manjših območij na Zemlji.

Najnovejši globalni geopotencialni model je *EGM96* ("Earth Gravitational Model"), ki so ga skupaj določili NIMA (National Geospatial-Intelligence Agency), NASA in OSU (Ohio State University). Predstavljen je v obliki vrste sfernih funkcij gravitacijskega potenciala, razvit je do stopnje in reda $n=m=360$. Statistični kazalci geoidnih višin modela *EGM96* izračunanih v pravilni mreži $15' \times 15'$ za celotno oblo so naslednji:

- srednja vrednost: = -0,57 m
- st. deviacija = 30,56 m
- minimum = -106,99 m
- maksimum = 85,39 m

Standardna deviacija kaže na tipično razliko med geoidom in elipsoidom.

5.2.2 Gravimetrična metoda

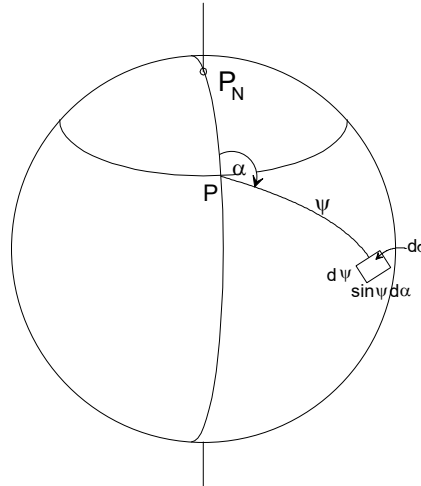
Določanje ploskve geoida s pomočjo gravimetričnih podatkov predstavlja matematično reševanje problema geodetskega robnih pogojev. Vse od leta 1849, ko je G.G. Stokes prvič opisal metodo, pa do današnjih dni, ima gravimetrična metoda najpomembnejšo vlogo pri raziskavah zemeljskega težnostnega polja. Še zmeraj so to najbolj realne metode za določanje geoida ali kvazigeoida na celinskih območjih.

Osnova metode je t.i. Stokesova enačba oz. integral, ki podaja zvezo med geoidno višino N in anomalijo težnosti Δg v poljubni točki na geoidu (območje integracije je celotna Zemlja), slika (4.2):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma \quad (5.2)$$

kjer je ψ kot med geocentričnim radijem ploščinskega elementa $d\sigma$ in točko izračuna P ; R je radij krogle, na kateri se točka nahaja; γ je vrednost normalne težnosti na krogli; $S(\psi)$ je Stokesova funkcija, definirana z enačbo:

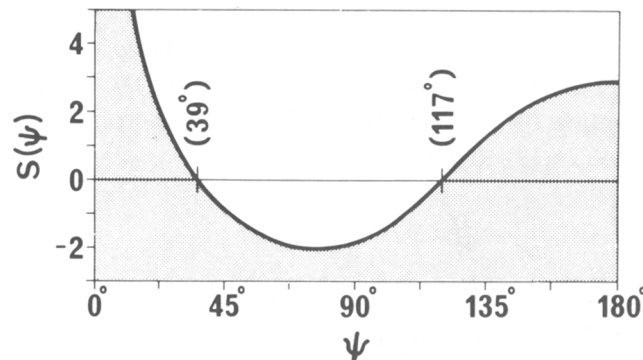
$$S(\psi) = \sin^{-1}(\psi/2) - 6\sin(\psi/2) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\{\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)\} \quad (5.3)$$



Slika 5.2: Stokesov integracijski proces

Ploščinski element $d\sigma$ je lahko podan v geografskih koordinatah ali pa v sfernih polarnih koordinatah (ψ, α) , kjer je α azimut točke izračuna P glede na ploščinski element.

Stokesova funkcija $S(\psi)$ je odvisna samo od sferne razdalje ψ med točko izračuna P in ploščinskim elementom $d\sigma$. Lahko jo obravnavamo kot "utež" k anomaliji težnosti (moteči težnosti). Za $\lim_{\psi \rightarrow 0} \rightarrow \infty$ postane funkcija singularna oz. $S(\psi) \rightarrow \infty$ (slika 5.3).



Slika 5.3: Stokesova funkcija

Integracija v enačbi (5.2) velja za celotno območje Zemlje. Zahteva je torej, da so znane vrednosti anomalij (motečih $t.$) v celotnem območju integracije oz. v vsaki točki geoida (površja Zemlje).

Rešitev enačbe (5.2) otežujejo v praksi nekateri pogoji: vrednosti Δg so podane na geoidu; geoid je krogla (s polmerom R); zunaj geoida ni motečih mas (atmosfera in topografija). Vse našete pogoje lahko upoštevamo z uvedbo ustreznih popravkov oz. z ustrezno redukcijo merskih podatkov; seveda z različno natančnostjo. Pristop k rešitvi geodetskega robnega pogoja po Molodenskem je drugačen. Tu namesto Δg na geoidu upoštevamo vrednosti motečih težnosti δg na zemeljskem površju. Rezultat integracije so namesto geoidnih višin, ustrezne "kvazigeoidne" oz. anomalije višine ζ .

Pri praktičnem računanju se Stokesov integral računa na različne načine: z eno od metod numerične integracije, s pomočjo hitre Fourierove transformacije (FFT), ali pomočjo kolokacije po metodi najmanjših kvadratov.

Izmerjene težnostne anomalije je možno uporabiti tudi za določitev vrednosti komponent odklona navpičnice s pomočjo znane enačbe Vening Meinesza (v izvirni obliki velja za geoid):

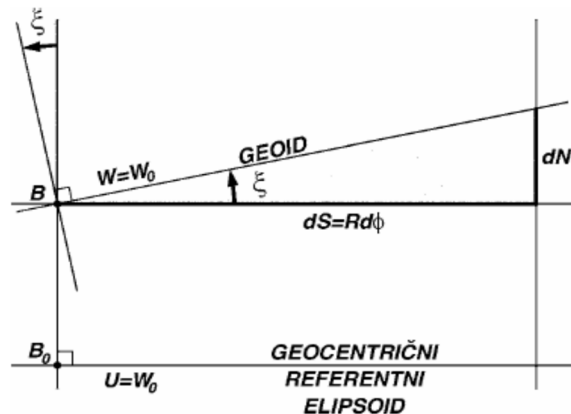
$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_0 = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{dS(\psi)}{d\psi} \Delta g \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma \quad (5.4)$$

kjer je α azimut dolžine med točko izračuna in središčem ploščinskega elementa $d\sigma$. $S(\psi)$ je Stokesova funkcija. Enačba je posledica zveze med komponentama odklona in motečega potenciala.

5.2.3 Astrogeodetska metoda

Poiščimo zvezo med komponentami odklona navpičnice in geoidno višino v neki točki. Odklon navpičnice je dejansko naklon geoidne ravnine glede na elipsoid v točki obravnave. V smeri meridiana in prvega vertikalnega je zveza naslednja (odvajamo na geoidu):

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi}, \quad \eta = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (5.5)$$



slika 5.4: zveza med komponentami odklona navpičnice in geoidno višino

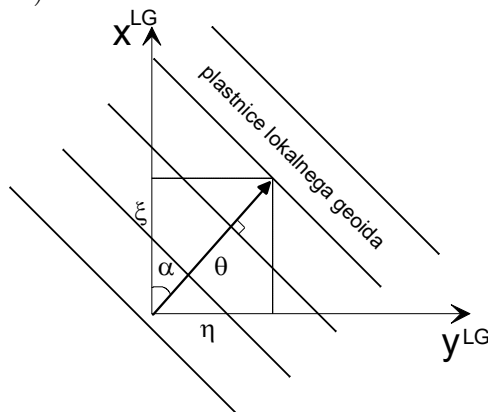
R je tukaj srednji polmer Zemlje. Za pravilno ovrednotenje zgornjih enačb moramo poznati odklone na geoidu, torej moramo izmerjene astronomske koordinate reducirati na geoid za vpliv ukrivljenosti težiščnice. Negativni predznak je skladen z dogovorom o predznakih komponent odklona.

Identična enačba povezuje komponente odklona po Molodenskem in kvazigeoidno višino ζ , s to razliko, da so odvodi določeni na površju Zemlje.

Z uvedbo Brunsove enačbe dobimo zvezo med motečim potencialom in komponentami odklona navpičnice:

$$\xi = \frac{T}{R\gamma_0^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial \phi} - \frac{1}{R\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \phi}, \quad \eta = -\frac{1}{R\gamma_0 \cos \phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \quad (5.6)$$

Če zanemarimo vpliv ukrivljenosti težiščnice vidimo, da nam astronomske koordinate (Φ, Λ) ter geodetske koordinate (ϕ, λ) v neki točki zemeljske površine dajo vse nujne informacije o nagibu ploskve geoida v tej točki: smer odklona navpičnice sovpada s smerjo največjega naklona (gradienta) geoidne ploskve; velikost odklona pa ustreza samemu gradientu (slika 5.5).

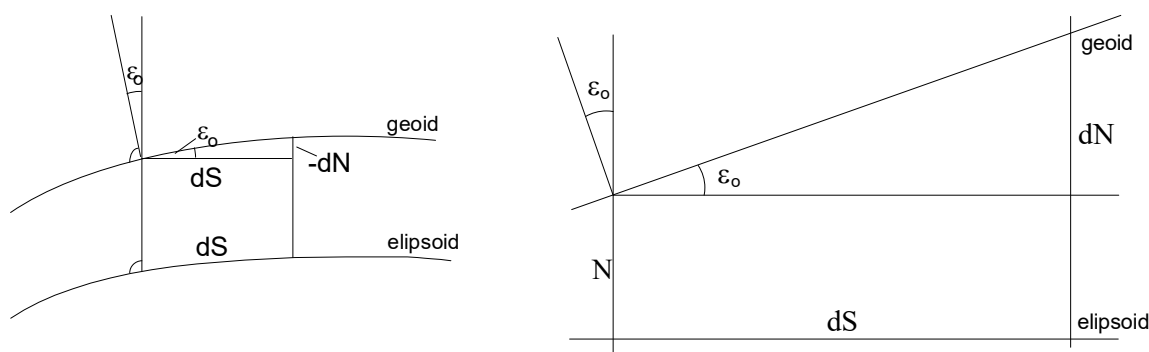


slika 5.5: geometrični pomen komponent odklona navpičnice

Vrednost komponente ξ predstavlja naklon geoida v smeri sever – jug in vrednost η je naklon geoida v smeri vzhod – zahod. Če ima geoid naklon navzdol proti severu, so vrednosti ξ pozitivne; če pa ima naklon navzdol proti vzhodu so vrednosti η pozitivne, in obratno. Očitno je, da se naklon določen na ta način nanaša na geodetski referenčni elipsoid, na katerem so izračunane geodetske elipsoidne koordinate. Če sta astronomski koordinati enaki geodetskim, je torej naklon geoida nič in sta ploskvi geoida in elipsoida v tej točki vzporedni.

Iz izmerjenih komponent odklona lahko pridobimo vrednosti razlik geoidnih višin. Slika 5.6 kaže prerez ploskve geoida in elipsoida z vertikalno ravnino v smeri poljubnega azimuta. Helmertova enačba daje zvezo med odklonom navpičnice ϵ_0 na geoidu, s prirastkom geoidne višine dN na odseku razdalje dS :

$$dN = -\epsilon_0 dS \quad (5.7)$$



slika 5.6: princip astrogeodetske določitve geoida (astronomski nivelman)

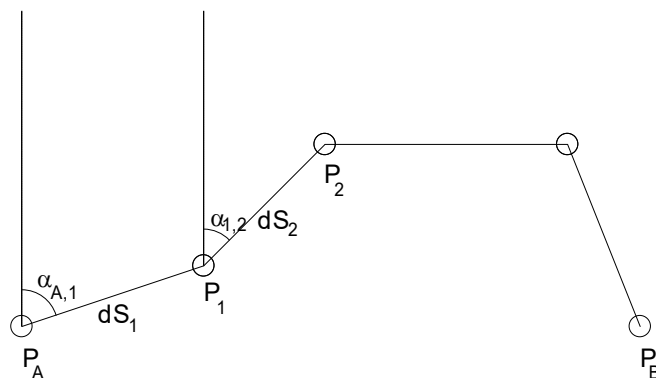
Z integracijo zgornje enačbe je možno določiti potek ploskve geoida med dvema točkama:

$$\Delta N_{12} = N_2 - N_1 = -\int_1^2 \epsilon_0 dS = -\int_1^2 (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) dS \quad (5.8)$$

Če odklone ϵ_0 prikažemo grafično kot funkcije poti (razdalje S), ustreza integral ploščini pod krivuljo $\epsilon_0 = f(s)$. Kot smo že povedali na začetku bi morali opazovane vrednosti odklonov na površju Zemlje reducirati na geoid zaradi ukrivljenosti težiščnice. Za praktična računanja se vedno vzamejo Helmertovi odkloni na površju Zemlje.

To metodo določanja geoida je prvi predlagal in praktično preizkusil Helmert leta 1880 in je postala znana pod imenom *astronomski oz. astrogeodetski nivelman*.

Geoid lahko na ta način določamo s profili ali ploskovno. Pomembno je poudariti, da se pri tem določajo samo razlike geoidnih višin. V praksi so odkloni navpičnice določeni samo na nekaterih točkah (geoidne točke). Točke z znanimi odkloni spojimo v profile (slika 5.7).



slika 5.7: določanje astrogeodetskega geoida s pomočjo profilov

Računanje na posameznih profilih je možno izvesti s pomočjo numerične integracije (integrira se z razvojem enačbe v vrsto):

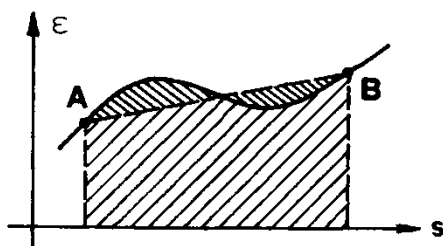
$$N_A - N_B = -\sum_{i=1}^n \varepsilon_i dS_i \quad (5.9)$$

kjer so posamezni odkloni (med dvema sosednjima točkama) podani z:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} [(\xi_i + \xi_j) \cos \alpha_{ij} + (\eta_i + \eta_j) \sin \alpha_{ij}] \quad (5.10)$$

Profile lahko podobno kot pri nivelmanu združimo v mrežo geoidnih točk in na ustrezen način izravnamo. Z ustrežno izbiro začetne točke s poljubno izbrano vrednostjo geoidne višine N_0 , lahko izravnane višine pretvorimo v končne geoidne višine. Običajno se za začetno točko izbere izhodiščna točka državne mreže (triangulacije).

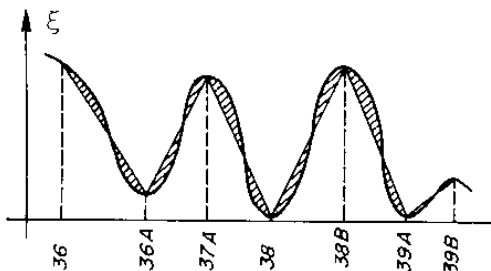
Geoidni profil med dvema danima točkama lahko aproksimiramo s premico (slika 5.8). Skladno z enačbama (5.9) in (5.10) lahko napišemo:



slika 5.8: geoidni profil med dvema točkama A in B

$$\Delta N_{AB} = -1/2 (\varepsilon_A + \varepsilon_B) \Delta s$$

V primeru, da je ploščina trapeza enaka ploščini pod krivuljo je aproksimirana geoidna višinska enaka točnemu izrazu z integralom.



Slika 5.9: geoidni profil z dobro izbranimi geoidnimi točkami

Če so točke na profilu izbrane tako, da nam tetiva v najboljši možni meri aproksimira potek geoidne ploskve, se vpliv sistematičnih pogreškov izniči, saj so te porazdeljene enakomerno pozitivno in negativno.

Če zanemarimo meridiansko konvergenco, lahko računamo v ravnini kartografske projekcije. Azimute (enačbe 5.8 in 5.10) zamenjamo s smernimi koti:

$$\cos v = \frac{x_k - x_i}{s_{ik}} \quad \sin v = \frac{y_k - y_i}{s_{ik}}$$

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2\rho''} [(\xi_i + \xi_k)(x_k - x_i) + (\eta_i + \eta_k)(y_k - y_i)] \quad (5.11)$$

Če ne računamo v projekciji temveč na elipsoidu se zgornja enačba glasi:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2\rho''} [(\xi_i + \xi_k)(\phi_k - \phi_i)M + (\eta_i + \eta_k)(\lambda_k - \lambda_i)N \cos \phi_m]$$

Če privzamemo geoidno višino ene točke kot dano, lahko izravnamo razlike geoidnih višin po metodi posrednih opazovanj. Kot opazovanja obravnavamo torej izračunane razlike geoidnih višin, neznanke pa so v tem primeru geoidne višine na točkah mreže. Enačba opazovanj se glasi:

$$\Delta N_{ik} = N_k - N_i \quad (5.11a)$$

Enačba popravkov je potem:

$$v_{ik} + \delta N_i - \delta N_k = N_k^0 - N_i^0 - \Delta N_{ik} \quad (5.11b)$$

oz. v matrični predstavitvi se izravna glasi:

$$v + B\Delta = f \quad (f = \text{približno} - \text{merjeno}) \quad (5.12)$$

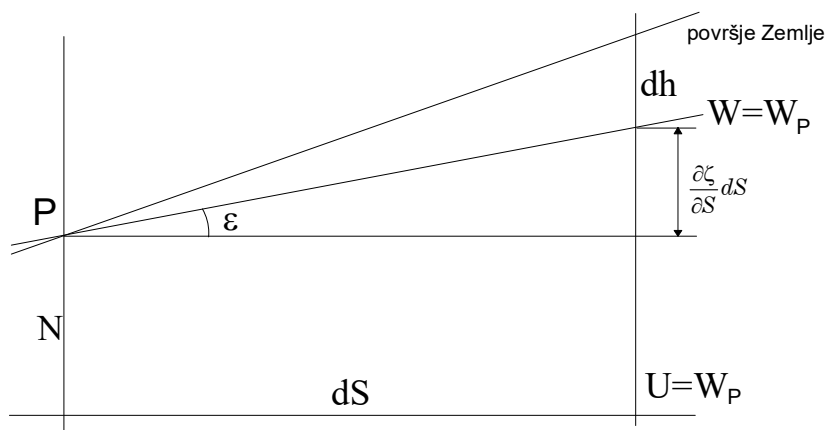
$$B^T B \Delta = B^T f$$

$$N \Delta = t \quad N = B^T B \quad t = B^T f$$

$$\Delta = N^{-1} t$$

Helmertova enačba za astronomski nivelman se v primeru kvazigeoida in anomalij višin glasi (slika 5.8):

$$d\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial S} dS + \frac{\partial\zeta}{\partial h} dh \quad (5.13)$$



Slika 5.10: astronomski nivelman po Molodenskem

Zemljino površje ni nivojska ploskev, zato imamo v enačbi (5.13) poleg horizontalnega člena še višinski člen. Prisoten je zaradi spremembe višine med točkama in je običajno manjši od horizontalnega člena. Horizontalni člen je dejansko enak:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial S} = -\varepsilon' \quad (5.14a)$$

pri čemer je ε' odklon navpičnice na površju Zemlje (po Molodenskem) izračunan iz geodetskih koordinat popravljenih za vpliv ukrivljenosti normalne težiščnice.

Vertikalni člen se lahko izračuna iz zveze med normalno in dejansko težnostjo v točki obravnave:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial h} = -\frac{\Delta g}{\gamma} = -\frac{g-\gamma}{\gamma} \quad (5.14b)$$

kar nam na koncu da:

$$d\zeta = -\varepsilon' dS + \frac{g-\gamma}{\gamma} dh \quad (5.15)$$

Integracija nam da enačbo podobno Helmertovi enačbi (5.8):

$$\zeta_B - \zeta_A = -\int_A^B \varepsilon' dS - \int_A^B \frac{\Delta g}{\gamma} dh \quad (5.16)$$

Anomalije težnosti v zgornji enačbi se nanašajo na površje Zemlje. Prvi člen je dejansko Helmertov integral s površinskimi odkloni, drugi člen pa je popravek Molodenskega Helmertovemu integralu. Ta je nujen da lahko dobimo anomalije višine ζ . Odvisen je od vrednosti dejanske težnosti na površju Zemlje.

Če želimo določiti geoidne višine na točkah, kjer niso merjene vrednosti odklonov, uporabimo interpolacijo. Z interpolacijo površinskih vrednosti odklonov navpičnice, lahko dobimo zaradi nepravilne razporeditve topografskih mas nezanesljive rezultate. Bolj zanesljiva je interpolacija na samem geoidu. Najbolj preprosta je aritmetična oz. linearna interpolacija. Pri tem predpostavimo, da so spremembe odklonov med danimi točkami linearne. Ploskev geoida lahko predstavimo tudi v obliki polinoma. Interpolacijo opravimo s pomočjo regresije po metodi najmanjših kvadratov.

Geoidna točka je točka, na kateri smo z eno od astronomskih metod določili astronomski koordinati Φ in Λ s srednjim pogreškom boljšim od $\pm 1''$. Razdalje med sosednjima geoidnima točkama naj bi znašale 15-25 km v ravninskem delu, 5-10 km v hribovitem delu ter 3-5 km v gorah. Astrogeodetska metoda se uporablja predvsem za določanje geoida na manjših območjih. Njena slaba stran so relativno dolgotrajne astronomske meritve, ki so dokaj drage in odvisne od vremenskih pogojev. Astrogeodetska metoda omogoča določitev zelo natančnega geoida $\pm 0,05 \dots 0,1$ m na 100 km, vendar je tako izračunani geoid relativno orientiran glede na državni referenčni elipsoid. Za njegovo absolutno orientacijo so nujne geoidne točke, katerih koordinate so poznane tudi v geocentričnem koordinatnem sistemu.

Metoda ni primerna za raziskave morskih geoidov. Zelo pogosto se astrogeodetske meritve uporabljajo v kombinaciji z gravimetričnimi in satelitskimi podatki za izračun geoidov za širša celinska območja.

5.2.4 Geometrijska satelitska metoda

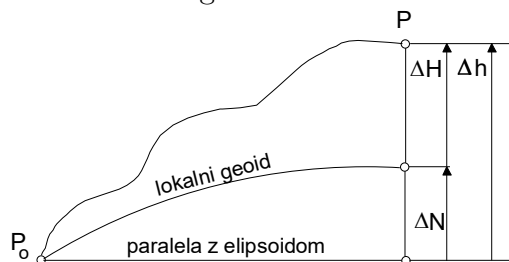
Znana tudi kot metoda satelitsko določenih koordinat točk na Zemlji. Sistemi satelitske navigacije (Doppler in GPS tehnika) nam omogočajo določitev tridimenzionalnih geocentričnih koordinat točk na Zemlji. S primerjanjem elipsoidne višine točke (h), določene s satelitskimi opazovanji in ortometrično (nadmorsko) višino točke (H), določene z niveliranjem oz. trigonometričnim višinomerstvom, je možno določiti geoidno višino N v tej točki:

$$N = h - H \quad (5.17a)$$

Zveza se lahko predstavi tudi v obliki razlik višin, ki se nanašajo na poljubno izbrano referenčno točko (slika 4.5):

$$\Delta N = \Delta h - \Delta H \quad (5.17b)$$

Slika 5.11 podaja vertikalni prerez skozi točki P_o (referenčna točka mreže) in P (poljubna točka v mreži). Višina točke P_o je poljubno izbrana tako, da skozi njo potekata ploskvi, vzporedni z lokalnim geoidom in izbranim referenčnim elipsoidom.



slika 5.11: zveza med elipsoidno nadmorsko in geoidno višino

Z dovolj velikim številom točk je možno za obravnavano območje določiti potek ploskve geoida. Tako dobljeni geoid je običajno dokaj enakomerne natančnosti, ki je odvisna od natančnosti in zanesljivosti elipsoidnih in predvsem nadmorskih višin oz. njihovih razlik. Znano je, da so ortometrične (nadmorske) višine točk v gorskih območjih zelo nezanesljive in majhne natančnosti.

Za manjša območja, ki jih zajemajo GPS-mreže je možno analitično predstaviti ploskev geoida na naslednji način. Geoidno ploskev, določeno z izračunanimi geoidnimi višinami N (iz zveze 5.17), obravnavamo kot funkcijo dveh spremenljivk:

$$N = N(y, x) \quad (5.18)$$

Tukaj sta spremenljivki y in x ravninski koordinati točk v mreži. Običajno se koordinate podajajo v lokalnem koordinatnem sistemu, pri nas so to Gauss-Krügerjeve koordinate državne izmere.

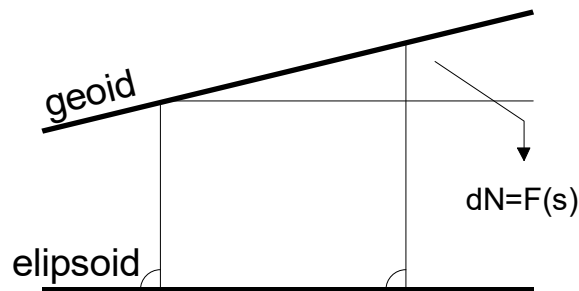
Funkcija $N(y, x)$ predstavlja interpolacijsko ploskev, določeno s številom točk z znanimi geoidnimi višinami. Povsem zadošča, če za funkcijo privzamemo ravnino v obliki:

$$N(y, x) = C + Ay + Bx \quad (5.19)$$

Če se spremenljivki y, x nanašata na težišče mreže, imajo koeficienti polinoma ustrezno geometrijsko pojasnitev. Koeficient C predstavlja vzporedni odmik elipsoida od geoida. Linearne člene polinoma s koeficientoma A in B predstavljata razliko naklona tangentne ravnine na elipsoid in ustrezne geoidne ploskve v težiščni točki, in to v smeri koordinatnih smeri (A naklon vzhod – zahod, B naklon sever – jug). Smerni kot, ki ga določata koeficienta A in B , nam poda tudi smer največjega naklona ploskve lokalnega geoida. Če se omejimo samo na tri linearne člene, predpostavimo, da imata obe ploskvi enako ukrivljenost, vendar sta medsebojno nagnjeni pod določenim kotom (slika 5.11).

Določitev geoidne ploskve se potemtakem sestoji v določitvi neznanih koeficientov ravnine. Potrebujemo najmanj tri enačbe oblike (5.19). Točke v GPS-mreži, ki imajo znane nadmorske in elipsoidne višine imenujemo dane točke (na njih je možno

neposredno izračunati geoidno višino). Če določimo neznane koeficiente geoidne ravnine lahko izračunamo (interpoliramo) geoidne višine (oz. nadmorske višine na točkah) z znanimi samo elipsoidnimi višinami.



slika 5.12: razlika naklona med elipsoidom in geoidom

Če obstaja večje število danih višinskih točk, je možno izračunati predoločeno rešitev s pomočjo metode najmanjših kvadratov. Rešitev za neznane koeficiente ravnine se glasi:

$$\Delta = (B^T B)^{-1} (B^T f)$$

kjer je Δ vektor ocenjenih neznank A, B in C; matrika B je matrika koeficientov; vektor f vsebuje geoidne višine na danih točkah; y, x so Gauss-Krügerjeve koordinate točk (preračunane na težišče mreže):

$$\Delta = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_n & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix}$$

Ocenjeni neznanki A in B določata:

gradient (največjo spremembo funkcije oz. v našem primeru maksimalni naklon) izračunane geoidne ravnine: $|\text{grad}| = \sqrt{A^2 + B^2}$; smer največjega naklona geoidne ravnine:

$$\text{tg } \nu = A/B$$

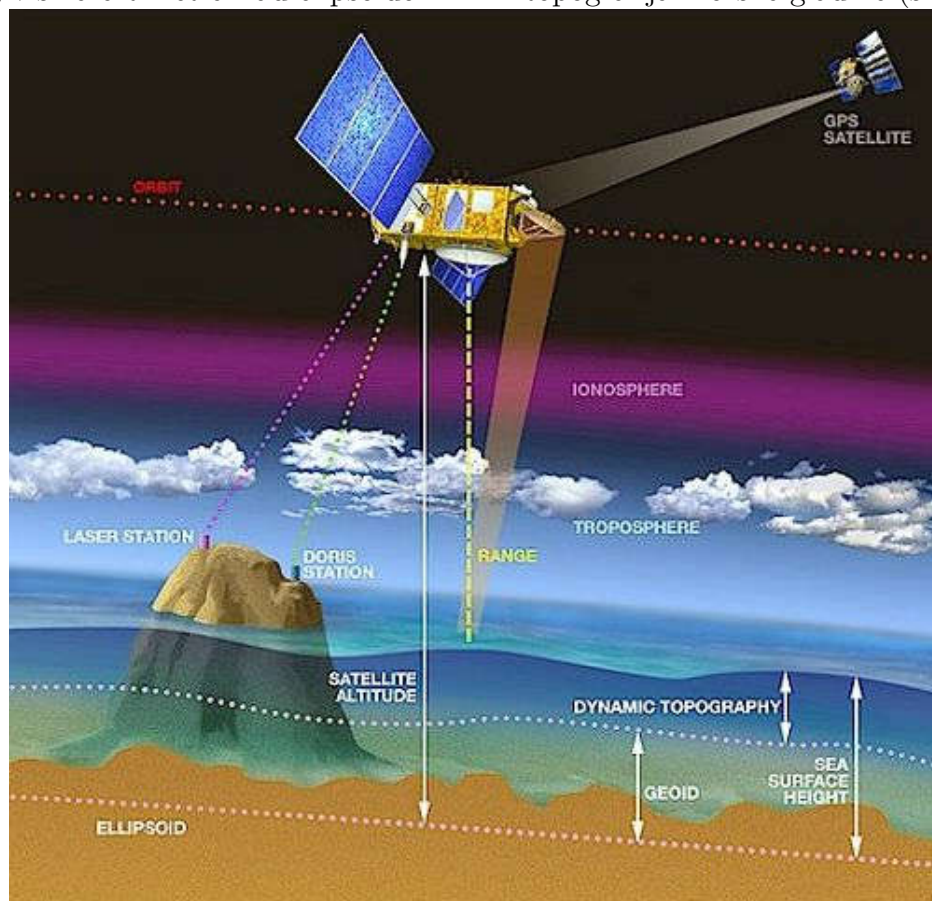
5.2.5 Satelitska altimetrija

Na oceanskih območjih je možno neposredno izmeriti morsko gladino s pomočjo satelitske altimetrije. Sateliti, ki krožijo okoli Zemlje, oddajajo radarske impulze pravokotno na morsko gladino. Impulzi se po odboju sprejemajo nazaj v altimetru na satelitu. Altimetrske meritve torej neposredno podajo razdaljo satelit – trenutna morska gladina.

Zveza med geoidnimi višinami N in altimetrskimi meritvami a je podana z enačbo:

$$N = h_s - a - H \quad (5.20)$$

kjer so: h_s višina altimetra nad elipsoidom in H topografija morske gladine (slika 5.13).



slika 5.13: satelitska altimetrija

Sateliti opremljeni z najnovejšimi altimetri dosegajo natančnost merjenja razdalj okrog ± 2 cm.

5.2.6 Kolokacija po metodi najmanjših kvadratov

Ena od metod izračuna geoida s pomočjo vseh razpoložljivih podatkov je kolokacija po metodi najmanjših kvadratov, ki jo je v geodezijo vpeljal danski geodet T. Krarup leta 1969 in nekaj let kasneje izpopolnil prof. Helmut Moritz iz Graza. Metoda je zelo uporabna pri proučevanju zemeljskega težnostnega polja in vseh geodetskih količin, ki se nanj nanašajo.

Kolokacija je dobila velik pomen z uvedbo satelitskih meritev v vsakdanjo geodetsko izmero, saj omogoča kombinacijo raznovrstnih merskih podatkov. Uporablja se v problemih transformacije koordinat, pri ugotavljanju nepravilnosti razdelb krogov

teodolitov in seveda v fizikalni geodeziji. Kolokacija je zmožna rešiti osnovno nalogo fizikalne geodezije: določitev optimalnega težnostnega polja, ki je združljivo z vsemi podanimi merskimi podatki različne vrste.

Matematična zasnova splošnega modela kolokacije je v dveh temeljnih načelih:

1. Vsako geodetsko opazovanje je odvisno od položaja ene ali več točk v prostoru in od zemeljskega težnostnega polja:

$$l = F(x, W)$$

pri tem so:

- l opazovana količina (geodetske meritve)
- x vektor sistematičnih parametrov ali neznank (vsebuje koordinate opazovališča, na katero se meritve nanašajo)
- W težnostni potencial v opazovališču
- F nelinearni funkcijski operator med argumentoma x in W , ki poda realno število l

2. Vsako geodetsko opazovanje vsebuje tri komponente:
 1. *sistematični del*, ki je funkcija parametrov oz. neznank,
 2. *signal*, ki predstavlja vpliv motečega težnostnega polja na opazovanja,
 3. *šum*, slučajna komponenta, ki vključuje vse nesistematične pogreške merjenja.

Kolokacija predstavlja posplošitev izravnave po metodi najmanjših kvadratov in obsega skupne probleme *izravnave, filtriranja in predikcije* (napovedovanja). Izravnava, prevedena v jezik kolokacije, je določitev neznanih parametrov (neznank), kot na primer koordinat opazovališča itn. Filtriranje predstavlja določitev neznank in signala z minimiziranjem šuma (merskih pogreškov). Predikcija ali napovedovanje predstavlja določanje signala v novih točkah, točkah v katerih nismo opravili opazovanja → računske točke.

5.3 Upodobitev izračunanega geoida (kvazigeoida)

Končni rezultat določitve ploskve geoida (kvazigeoida) so (kvazi)geoidne višine. Podobno kot upodabljammo površino Zemlje, lahko upodobimo tudi ploskev geoida: z množico diskretnih točk, ali pa s pretvorbo teh točk v določen matematičen zapis (funkcija oz. matematična vrsta). Eden takšnih primerov je globalni geopotencialni model, oz. razvoj gravitacijskega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah. Na osnovi koeficientov razvoja lahko predstavimo geoidne višine, anomalije težnosti ali pa komponente odklona navpičnice. Ker gre za matematično funkcijo, je vsaka izračunana

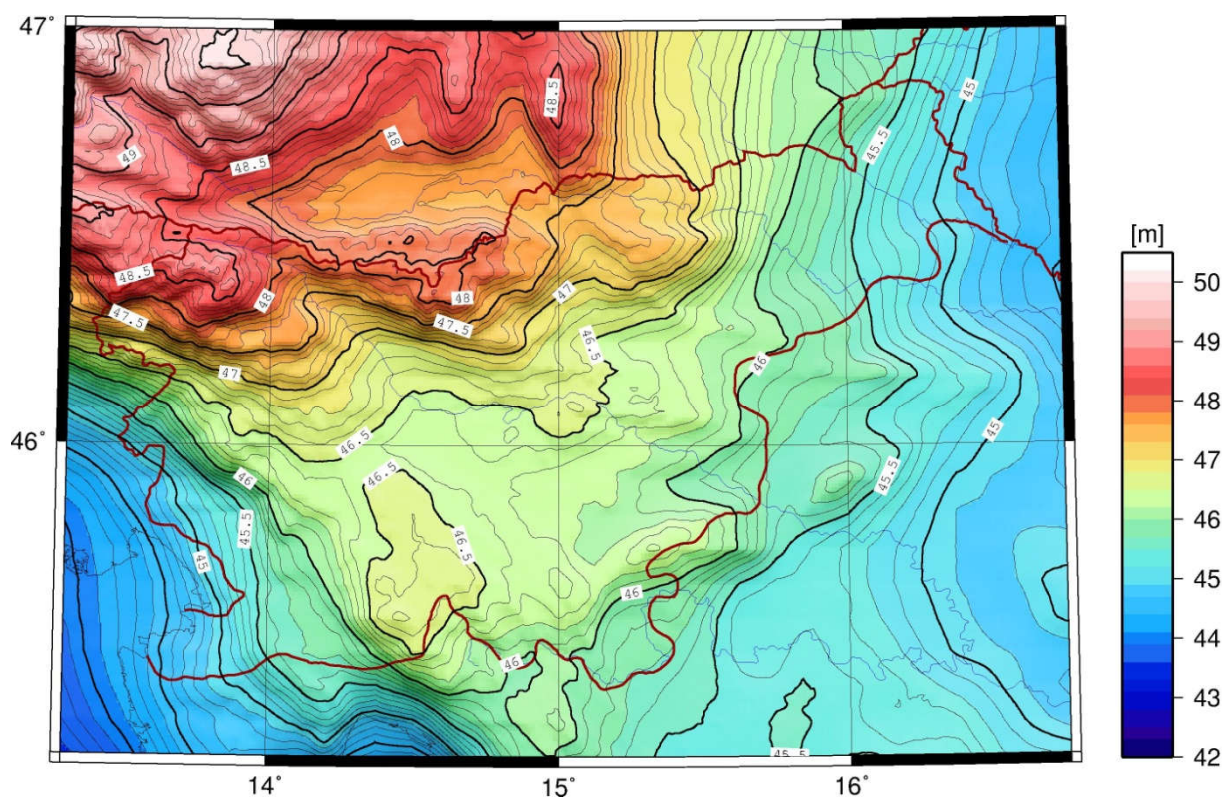
geoidna višina točno povezana z geografskim položajem točke na zemlji (geocentrična sferna širina in sferna dolžina) in jo je možno izračunati (interpolirati) v poljubni točki.

V primeru določitve geoida v množici diskretnih točk se ploskev predstavi v obliki karte ali pa se množica izračunanih točk preračuna (pretvori) v pravilno točkovno strukturo, celično mrežo točk → grid.

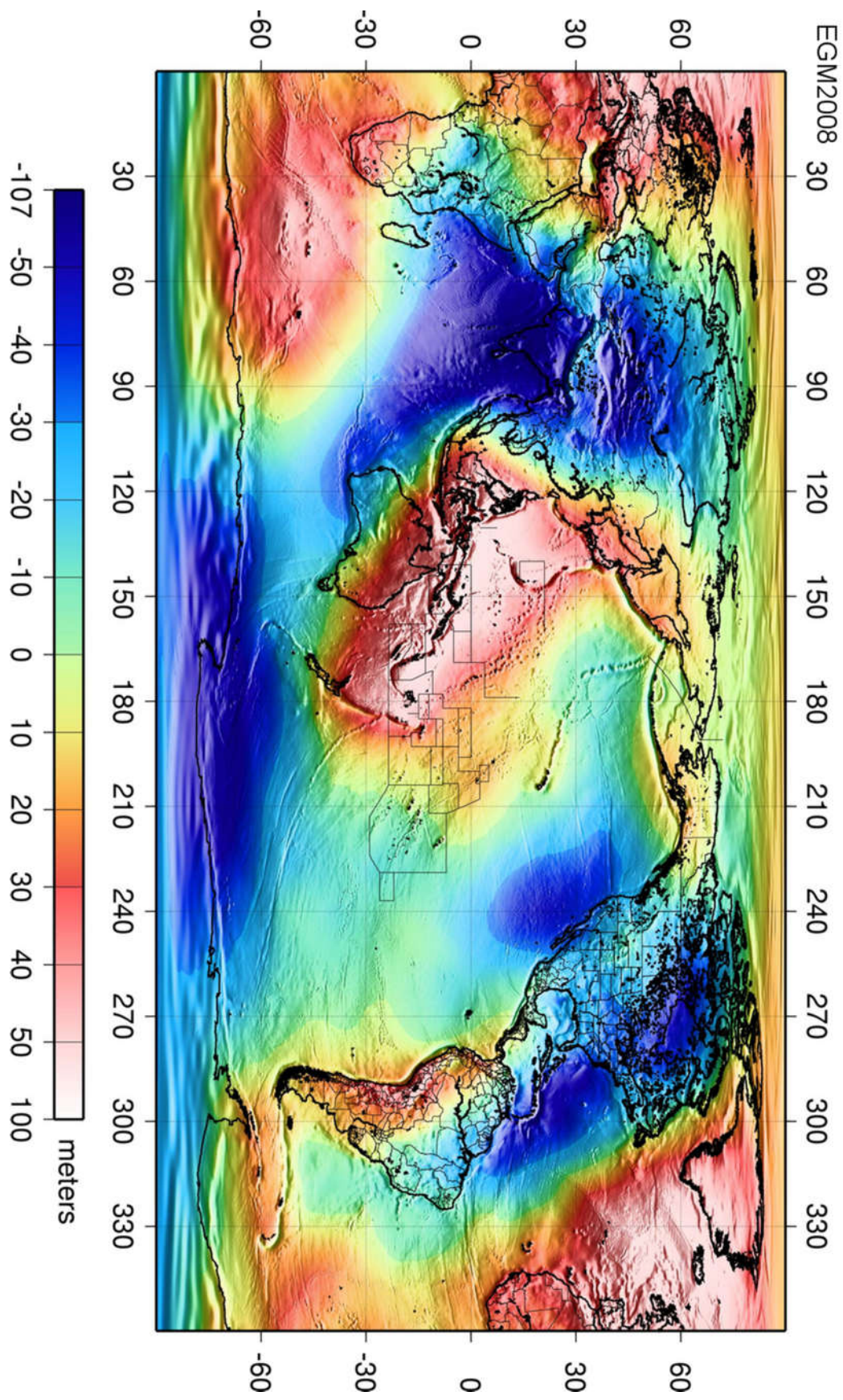
V splošnem je grid pravilna mreža vertikalnih in horizontalnih koordinatnih linij; lahko je podana v pravokotnih ali pa geografskih koordinatah. V primeru predstavitve ploskve (geoid, površina Zemlje) je poleg horizontalnih koordinat (X, Y) , (ϕ, λ) , potrebno podati tudi višinsko koordinato Z , oz. H . Postopek izračuna (preračuna) grida iz množice diskretno razporejenih točk je znan pod imenom "gridding". Predstavitev ploskve s pomočjo grida ima iz računalniškega vidika zelo dobro lastnost: ker so horizontalne koordinate točk v gridu podane v enakih presledkih (oddaljenostih), je planimetrični položaj posamezne točke določen z njeno lego v matriki. V računalniškem spominu moramo hraniti samo prostorsko Z koordinato. *Ločljivost grida* ("resolution") pomeni korak s katerim je definirana mreža (lahko je enak v obeh smereh, lahko pa tudi ne, odvisno od velikosti in oblike območja izračuna).

Ločljivosti celične mreže današnjih geoidnih modelov so manjši kot ustrezni digitalni modeli višin (DMV) oz. reliefa (DMR), predvsem zaradi omejitve računalniškega spomina in lažje prenosljivosti. Ta čas najnatančnejši globalni geoidni model izračunan na osnovi globalnega geopotencialnega modela EGM96, je podan v geografski celični mreži $15' \times 15'$ (ASCII datoteka velikosti 9,30 MB). Regionalni in lokalni geoidni modeli so podani z desetkrat večjo ločljivostjo. Na primer Evropski gravimetrični kvazigeoid (EGG97) je podan v mreži $1' \times 1,5'$ (binarna datoteka velikosti 32,3 MB).

Grafični prikaz globalnega geoida iz modela EGM2008 je podan na posebni strani.



slika 5.14: Geoid v Sloveniji

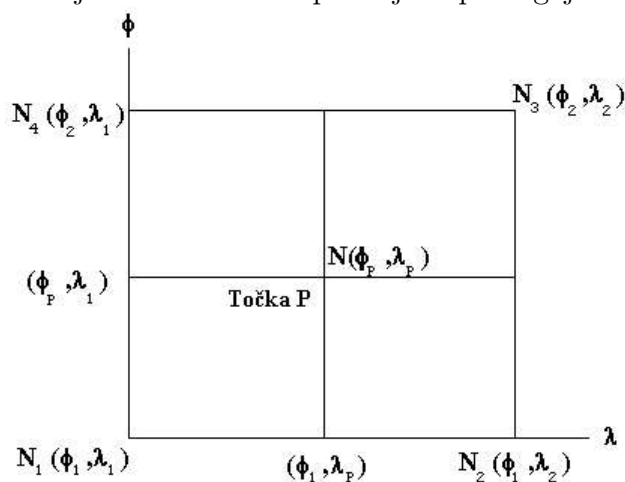


5.3.1 Interpolacija geoidnih višin iz celične mreže

V primeru, da je ploskev geoida predstavljena v celični mreži (gridu) in če želimo izračunati vrednost geoidne višine v poljubni točki območja za katerega grid velja, moramo opraviti postopek "interpolacije".

Osnovna naloga interpolacije je poiskati funkcijo, katere graf poteka skozi dano zaporedje točk. V primeru geoidnih gridov se uporabljata bilinearna interpolacija (manjša natančnost) ali pa enodimenzionalna spline funkcija (zlepki).

Za izračun višine s pomočji bilinearne interpolacije si pomagajmo s sliko:



Bilinearna interpolacija geoidne višine v točki P (ϕ , λ) poteka po enačbi:

$$N(\phi, \lambda) = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3XY \quad (5.21)$$

kjer so:

$$\begin{aligned} a_0 &= N_1 & X &= (\lambda - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ a_1 &= N_2 - N_1 \\ a_2 &= N_4 - N_1 & Y &= (\phi - \phi_1)/(\phi_2 - \phi_1) \\ a_3 &= N_1 + N_3 - N_2 - N_4 \end{aligned}$$

Oznake v zgornjih enačbah so naslednje:

- ϕ, λ ... geodetske koordinate točke P
- $N(\phi, \lambda)$... interpolirana geoidna višina v točki P
- N_1, N_2, N_3, N_4 ... geoidne višine v štirih najbližjih gridnih točkah (slika)

Interpolacija s pomočjo bilinearne interpolacije je v prostorskem smislu enaka postavitvi (določitvi) hiperboličnega paraboloida skozi štiri višinske točke mreže (grida).

6 Gravimetrija

Sama gravimetrija pomeni merjenje težnosti (težnega pospeška). Izhaja iz latinske besede "gravis" – težek in grške besede "μετρειν" – meriti. Gravimetrija predstavlja skupino metod uporabne geofizike, ki se ukvarjajo z merjenjem težnega pospeška in gradienta težnosti na in v bližini Zemljinega površja.

Čeprav so številni fizikalni pojavi odvisni od vrednosti težnega pospeška, lahko izkoristimo samo nekatere od njih za njegovo določitev. Dejansko se merita obe temeljni količini pospeška: čas ali dolžina (kar neposredno sledi iz enote za težni pospešek [ms^{-2}]). Vse obstoječe metode merjenja lahko razdelimo na dinamične in statične.

4. Dinamične metode obravnavajo gibanje telesa pod vplivom sile teže. Pri njih merimo neposredno čas, ki ga potrebuje telo, da se premakne iz enega v drugi položaj.
5. Statične metode obravnavajo spremembo ravnovesja telesa pod vplivom sile teže in njej nasprotne sile. Neposredno merimo dolžinski premik ali spremembo kota telesa konstantne mase. Nasprotno delujoča sila je v tem primeru lahko sila prožnosti vzmeti, torzija nitke, membrane itd.

Instrumente za merjenje težnega pospeška imenujemo *gravimetri*. Ne glede na to, katero metodo uporabljamo, določamo lahko absolutne in relativne vrednosti težnega pospeška. Absolutne meritve pomenijo določitev težnega pospeška v polnem iznosu, relativne meritve pa nam dajo razlike vrednosti težnega pospeška med dvema točkama (glede na točko z znano vrednostjo g).

Z dinamičnimi metodami lahko določamo absolutne in relativne vrednosti težnega pospeška. Pri absolutnih določitvah vrednosti g je poleg časa potrebno izmeriti še razdaljo (dolžino nihala oz. dolžino poti prostega padanja).

S statičnimi metodami določamo samo relativne vrednosti težnega pospeška, torej razlike vrednosti težnega pospeška med dvema točkama.

6.1 Absolutne meritve težnega pospeška

Pri dinamičnih metodah merjenja težnega pospeška izkoriščamo naslednja fizikalna pojava:

- nihanje telesa pod vplivom sile teže,
- prosti pad telesa.

Absolutni gravimetri za dinamične metode so konstruirani kot nihala ali pa t.i. balistični instrumenti (gravimetri na principu prostega padanja telesa v vakuumu). Danes se skoraj izključno uporabljajo gravimetri na principu prostega padanja. Natančnost absolutne določitve vrednosti težnega pospeška s prostim padom znaša od $\pm 10^{-7}$ do $\pm 10^{-9} g$.

Meritve z nihalom so bile v preteklih 200 letih, vse do sredine prejšnjega stoletja, prevladujoči način določitve absolutnih vrednosti težnega pospeška. Princip delovanja teh gravimetrov je zasnovan na teoriji matematičnega nihala oz. nihanja tega telesa (težno nihalo). Za majhne amplitude perioda nihanja (T) ni odvisna od same amplitude; za težni pospešek velja enačba:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (6.1a)$$

kjer je l dolžina nihala.

Fizikalni približek matematičnega nihala je t.i. *nitno nihalo*. Sestoji se iz težkega telesa, ki visi na tenki žici (niti). Za odstranitev sistematičnih pogreškov določitve dolžine nihala, je Bessel predlagal nihalo, kjer merimo nihajne čase istega telesa pri dveh različnih dolžinah nihala. Za določitev težnega pospeška potrebujemo samo razliko teh dveh dolžin:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1 - l_2}{T_1^2 - T_2^2} \quad (6.1b)$$

Gravimetri z nihalom so grajeni tudi na principu *težnega nihala* (togo telo, ki niha pod vplivom težnosti) ali tudi t.i. *reverzibilnega nihala* (ima dve osi nihanja, dva vrtilišča).

Instrumente na principu matematičnega nihala lahko zasledimo že na začetku XVIII. stoletja. Natančnost takratne določitve težnosti v pariškem astronomskem observatoriju je znašal okrog $\pm 10^{-5}g$. XIX. stoletje je zaznamovano s konstrukcijo lažjih prenosnih nihalnih instrumentov, ki so svoj vrhunec doživeli v začetku tega stoletja.

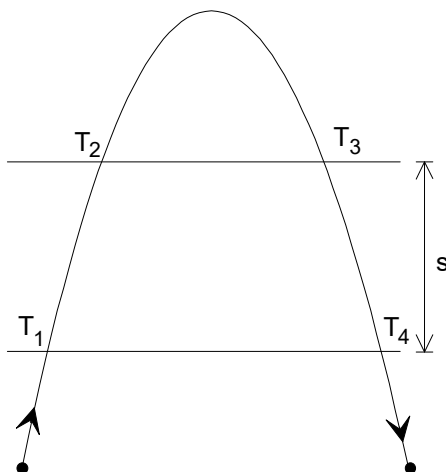
Problem absolutne določitve težnega pospeška z nihalnimi gravimetri je od samega začetka vezan na pravilno ovrednotenje vpliva številnih pogreškov. Če želimo določiti g z natančnostjo $\pm 10^{-7}g = 0,1 \text{ mGal}$ z nihalom dolžine 1 m in nihajnim časom 1 s, je potrebno poznati njegovo dolžino z natančnostjo $\pm 0,1 \mu\text{m}$ in izmeriti nihajni čas z natančnostjo $\pm 0,1 \mu\text{s}$. Te natančnosti pa lahko dosežemo samo s posebnimi napravami: merjenje dolžin s pomočjo laserskih interferometrov in merjenje časa s elektronskimi števci, ki jih krmilijo časovni signali. Z upoštevanjem vsega naštetega je zgornja meja določitve absolutne vrednosti $g \pm 0,3-0,4\text{mGal}$ (reverzibilna nihala). Natančnost z začetka stoletja je bila desetkrat manjša.

Poskusi za določitev absolutne vrednosti težnega pospeška na principu prostega padanja telesa so bili prvič opravljeni med leti 1950 in 1960. Možni so bili šele takrat, ko je sodobna tehnologija (metrologija) omogočila merjenje dolžin in časa s natančnostjo $\pm 0,5$ nm oz. $\pm 0,2$ ns (že omenjeni laserski interferometri in elektronsko merjenje časa \rightarrow uvedba kvarčnih kristalov).

Matematična zasnova določitve g -ja je merjenje časa (t), v katerem telo zaradi prostega padanja preide določeno pot (s):

$$s = \frac{gt^2}{2} \text{ od tod je } g = \frac{2s}{t^2} \quad (6.2)$$

Največji vpliv na določitev g -ja ima pogrešek izmerjene razdalje (poti) s . To pomankljivost lahko odpravimo s kombinacijo navpičnega meta in prostega pada. Posebna naprava vrže telo v višino; ko le-to doseže največjo višino začne prosto padati. Registriramo samo čas med deli poti navzgor in navzdol (slika 6.1).



slika 6.1: princip merjenja časa pri balističnemu gravimetru

Časovne intervale med dvema sosednjima točkama označimo z $t_1 = T_4 - T_1$ in $t_2 = T_3 - T_2$. Težni pospešek dobimo potem kot:

$$g = \frac{8s}{(t_1^2 - t_2^2)} \quad (6.3)$$

Od leta 1970 je bilo narejenih in danih v uporabo približno trideset različnih prenosnih absolutnih gravimetrov (na principu prostega padanja). Instrumenti se uporabljajo za razvoj in izmero fundamentalne gravimetrične mreže točk, za pridobitev podatkov o časovnih spremembah težnostnega polja ter v različnih raziskavah na področju tektonskih premikov, vulkanologije, seizmike, oceanografije itd.

Natančnost določitve absolutne vrednosti g s prenosnimi absolutnimi gravimetri je 10^{-9} oz. 10^{-8} ms⁻². Torej na razdalji 0,2 m v času 0,2 s je potrebna natančnost določitve

dolžine in časa $\pm 0,2$ nm in $\pm 0,1$ ns. Dolgoročna stabilnost standardov dolžine in časa se kontrolira z občasno kalibracijo laserja (potrebna je stabilnost frekvence reda velikosti 10^{-8} do 10^{-9})

Natančnost absolutne določitve g -ja je predvsem odvisna od pogojev na opazovališču. Meritve se na točkah praviloma izvajajo več dni v serijah 20-50 meritev, tako da je končna natančnost določitve na točki okrog $1 \mu\text{Gal}$. Nekaterih sistematičnih vplivov se ne da odpraviti in tako znašajo razlike med različnimi instrumenti na isti točki tudi to $5 \mu\text{Gal}$.

6.2 Relativno merjenje težnega pospeška

Pri relativnih meritvah težnega pospeška čutilo (senzor) gravimetra omogoča posredno ali neposredno opazovanje časa ali dolžine. To je nedoločen problem, ki ga lahko rešimo z opazovanjem časa ali dolžine na enem opazovališču, pri čemer je druga, neopazovana količina privzeta kot fiksna. Razliko vrednosti težnega pospeška med dvema točkama lahko izračunamo iz opazovanih razlik časa ali dolžine. Relativne meritve težnosti je moč izvesti hitreje in bolj ekonomično od absolutnih meritev.

Relativne meritve težnega pospeška lahko opravimo z dinamičnimi in statičnimi metodami.

Za dinamične relativne meritve se uporabljajo gravimetri na principu nihala. Slonijo na merjenju nihajnih časov T_1 in T_2 nihala s konstantno dolžino na dveh opazovališčih. Zveza med dvema vrednostima težnega pospeška in nihajnih časov je:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad (6.4)$$

Če nam je znana vrednost g_1 , je možno izračunati neznanu vrednost g_2 s pomočjo merjenih nihajnih časov. Razliko težnih pospeškov $g_2 - g_1$ je možno dobiti brez kalibracije:

$$\frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{T_2 - (T_2 - T_1)}{T_2} \right)^2 = \left(1 - \frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)^2 \quad (6.5a)$$

oz.

$$\Delta g_{1,2} = g_2 - g_1 = -2g_1 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + g_1 \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_2^2} \quad (6.5b)$$

Razvoj zgornje enačbe v vrsto nam poda izraz:

$$\Delta g_{1,2} = -2g_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1} + 3g_1 \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1^2} - \dots \quad (6.6)$$

Drugi člen zgornje vrste je reda velikosti 0,1 mGal.

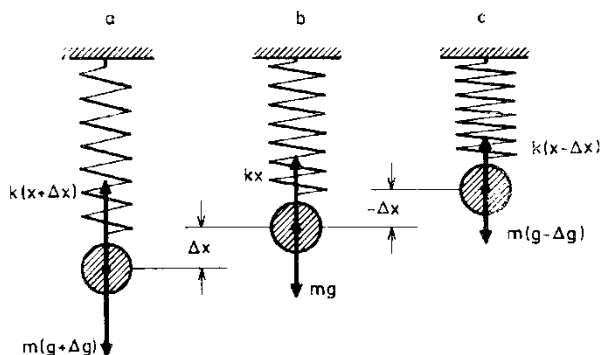
Sistematični pogoški, ki so neodvisni od položaja in časa se izničijo v razliki pospeškov. Natančnost določitve razlike težnosti 0,1mGal terja določitev nihajnega časa nihala z relativno natančnostjo boljšo od $\pm 5 \times 10^{-8}$. V praksi so se uporabljala nihala dolžine $l=0,25\text{m}$, s nihajnim časom $T=1\text{s}$; za te instrumente je zahtevana natančnost določitve časa $\pm 0,05\mu\text{s}$ in $\pm 0,025\mu\text{m}$ stalnosti (konstantnosti) dolžine nihala.

V prvi polovici XIX. stoletja so bile opravljene številne relativne meritve v kombinaciji z absolutnimi. Avstrijski geodet R. von Sterneck je z iznajdbo posebnega relativnega gravimetra z nihali leta 1887 omogočil množične meritve po vsej Evropi. Številne nacionalne gravimetrične mreže točk so bile izmerjene in vezane na točke z znanimi absolutnimi vrednostmi g -ja. Nihajni relativni gravimetri so bili v množični uporabi do tridesetih let tega stoletja, ko so jih nadomestili t.i. mehanski gravimetri, ki omogočajo relativne meritve težnega pospeška s statičnimi metodami.

Mehanski gravimetri delujejo v biti kot izredno občutljive vzmetne tehtnice. Čutila gravimetrov predstavlja sistem vzmeti, ročic, tozijskih elementov ipd. Deformacija vzmeti nastane pod vplivom teže uteži, ki pa je odvisna od sile teže. Prirastek deformacije med dvema točkama je merilo spremembe sile teže (težnega pospeška), to pa je dejansko podatek, ki ga merimo.

Konstruktivsko so izpeljani kot gravimetri z vertikalno vzmetjo ali kot gravimetri z horizontalno vzvodno (torzijsko) vzmetjo. Moderni gravimetri imajo t.i. astatičen sistem vzmeti, to je sistem, ki je nenehno uravnovežen.

Princip merjenja ponazarja v grobem naslednja slika 6.2. Med težo mase in napetostjo vzmeti je na danem mestu vzpostavljeno ravnotežje.



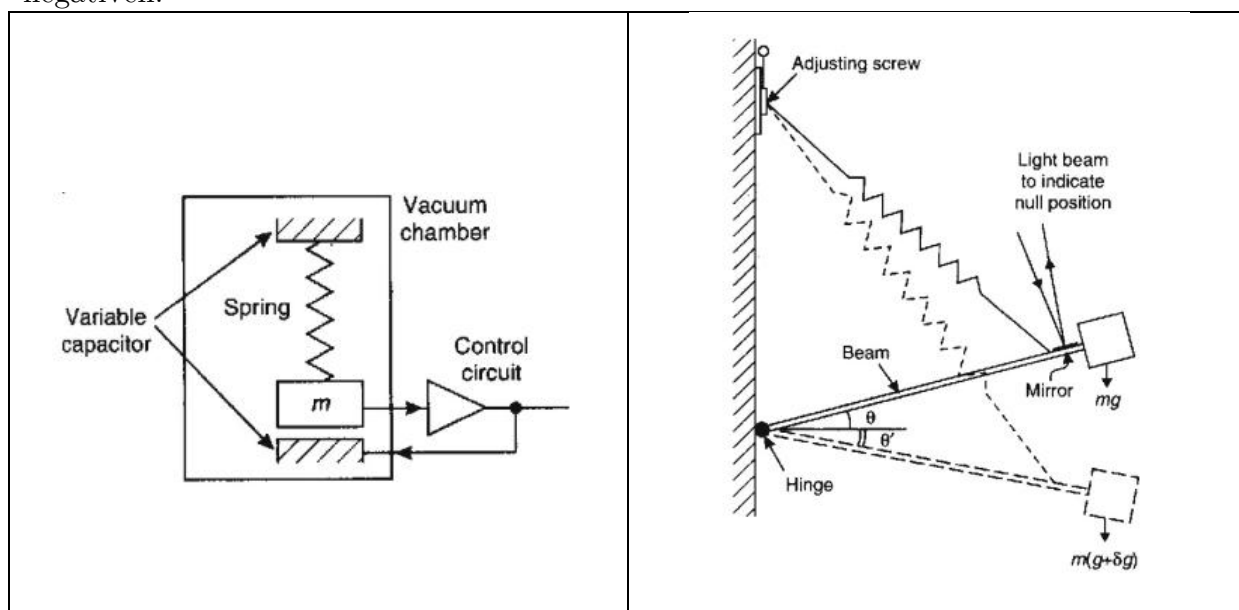
slika 6.2: princip merjenja relativnega gravimetra

Če prestavimo gravimeter na drugo mesto, kjer je težni pospešek večji za Δg , se vzmet čutila raztegne za dolžino Δx zaradi povečanja teže za $m\Delta g$. Pri tem se napetost vzmeti poveča za $k\Delta x$ (k je konstanta prožnosti vzmeti). Ker je povečanje teže izravnano s povečanjem napetosti, velja:

$$m\Delta g = k\Delta x$$

Od tod lahko izračunamo neznano razliko težnega pospeška Δg .

Ob prestavitvi gravimetra na mesto z manjšo težnostjo se vzmet skrči, Δx je torej negativen.



Slika 6.3: shema delovanja gravimetrov Scintrex (levo), LaCoste Romberg (desno) Moderni gravimetri ne merijo premika Δx neposredno, temveč ga izničijo z nekim lažje merljivim pomikom. Najbolj znane konstrukcije sodobnih gravimetrov so naslednje: Wordenov gravimeter (kremenčeva vzmet), Scintrex gravimeter (podobna konstrukcija) in LaCoste–Rombergov gravimeter (jeklena vzmet).



Slika 6.4: relativna gravimetra: Scintrex (levo), LaCoste Romberg (desno)

Rezultati merjenja z gravimetrom se izražajo v različnih enotah njegove merilne naprave (čutila). Da bi te enote lahko pretvorili v enote težnega pospeška je potrebno opraviti *kalibracijo* gravimetra. Kalibracija je torej postopek določevanja t.i. kalibracijske funkcije, ki omogoča omenjeno pretvorbo merskih enot. Kalibracijo lahko izvedemo na dva načina:

1. z meritvami na odprtem → merjenje na točkah z znanimi vrednostmi težnega pospeška,
2. z laboratorijskimi meritvami → merjenje sprememb težnega pospeška pri odklonu čutila gravimetra iz horizontale.

Za kalibracijo na prostem se uporabljajo gravimetrične merske baze, ki jih tvorijo točke z natančno določenimi vrednostmi težnega pospeška.

6.2.1 Vplivi na izmerjene vrednosti težnega pospeška

Vse vplive na izmerjene vrednosti težnega pospeška lahko razdelimo v dve skupini:

- vplivi zaradi neizpopolnjenosti instrumenta → instrumentalni pogreški,
- zunanji vplivi okolice.

Instrumentalne pogreške povzročča sama konstrukcija gravimetra. V to skupino sodijo pogreški čitanja (v primeru, da gravimeter nima zaslona z možnostjo digitalnega

odčitka), pogrešek zaradi nepravilnega horizontiranja, elastična histereza, nestabilna napetost v instrumentu ter kalibracijska funkcija.

Elastična histereza ali zmanjšanje (popuščanje) napetosti vzmeti nastane zaradi spremembe dolžine vzmeti s časom. Vpliv se lahko zmanjša ($< 0,001$ mGal) z načinom dela.

Gravimeter mora biti na vsaki točki čim bolj pazljivo horizontiran. Scintrex CG-3 omogoča celo upoštevanje vpliva nehorizontalnosti na izmerjeno vrednost g -ja.

Med zunanje vplive sodijo: spremembe zunanje temperature in pritiska, vplivi magnetnega polja, pretresi gravimetra zaradi transporta ter naravna in umetna mikroseizmičnost okolice.

Pri stacionarnem in terenskem delu z gravimetrom prihaja do sprememb v ravnotežju sistema vzmeti. Zaradi tega se spreminja ničelni položaj čutila ("zero position") kar je znano kot *tek gravimetra* ("gravimeter drift"). Do tega prihaja zaradi sprememb nemodeliranih zunanjih vplivov in popuščanja napetosti sistema vzmeti. S posebnim načinom dela in uvedbo ustreznega popravka na merjene vrednosti lahko upoštevamo vpliv hoda na opazovanja, predvsem v daljšem časovnem obdobju.

Natančnost relativne določitve vrednosti težnega pospeška je od $\pm 0,02$ do $\pm 0,03$ mGal. Z zelo natančnimi postopki merjenja lahko povečamo natančnost na $\pm 0,01$ mGal. Relativne meritve lahko izvajamo povsod. Navadni gravimetri se uporabljajo za meritve na kopnem in podzemeljskih prostorih in vrtinah. Za morske in zračne meritve se uporabljajo posebej prirejeni gravimetri. Natančnost teh meritev je manjša od omenjene.

6.3 Gravimetrična izmera

Gravimetrična izmera se med seboj loči glede na medsebojno oddaljenost izmeritvenih točk in glede na zahtevano natančnost izmere, ki jo terja sam namen nadaljnje raziskave.

Točke z izmerjenimi vrednostmi težnega pospeška so povezane v gravimetrične mreže. Te lahko razdelimo na globalne, regionalne in lokalne mreže gravimetričnih kontrolnih točk. Detajlna gravimetrična izmera za potrebe ožjih geodetskih, geodinamičnih in geofizikalnih raziskav se potem navezuje na te mreže.

Uporaba gravimetričnih meritev v širših območjih zahteva, da gravimetrični podatki ne vsebujejo sistematičnih pogreškov. Zato se je MZzGG (IUGG) že od samega začetka prizadevala za ustanovitev referenčnega gravimetričnega sistema na katerega bi bilo možno vezati regionalne in lokalne meritve. V letih 1909 – 1971 je bil v veljavi *Potsdamski težnostni sistem* ("Potsdam Gravity System"). Temeljlil je na absolutni določitvi vrednosti težnega pospeška na Geodetskem Inštitutu v Potsdamu leta 1900. Kasnejše meritve so ugotovile zamik v izhodišču sistema; absolutna vrednost g je večja za +14 mGal. Med leti 1950 in 1970 je bila z mednarodnim sodelovanjem zasnovana nova globalna gravimetrična mreža točk, ki jo je MZzGG na skupščini v Moskvi leta 1971 preimenovalo v *International Gravity Standardization Net 1971* I.G.S.N.71. Izhodišče novega sistema predstavlja 10 absolutnih meritev na osmih točkah. Mreža IGSN71 vsebuje 473 osnovnih točk in 1398 pomožnih, ekscentrično postavljenih točk (letališča ipd.).

Zaradi vse večjega števila razpoložljivih absolutnih gravimetrov se po letu 1983 vzpostavlja t.i. "International Absolute Gravity Basestation Network", IAGBN. Dejansko predstavlja globalno gravimetrično mrežo 0. reda. Vsebuje 36 globalno razporejenih osnovnih točk (te so kategorije natančnosti A – reda velikosti μGal ali bolje). Glavni namen te mreže je nadzor trenutnih sprememb težnosti v globalnem smislu (obstaja možnost permanentne kontrole absolutnih vrednosti na teh točkah). Poleg tega se točke uporabljajo tudi kot kontrolne točke regionalnih mrež.

Enotna evropska gravimetrična mreža 1994 ("Unified European Gravity Network 1994") - EUGN94 predstavlja poizkus vzpostavitve evropske gravimetrične mreže, ki bi z večjo natančnostjo in homogenostjo, dopolnila IGSN71. Trenutno mreža vsebuje okoli 500 točk v 11 evropskih državah. Izravnana opazovanja vsebujejo okoli 120 absolutnih in 14 500 relativnih meritev. Zaradi pomanjkanja absolutnih točk v nekaterih področjih (in s tem nehomogenosti) se mreža navezuje na vrednosti IGSN71. Dosežena natančnost točk v tej mreži je okoli 20 μGal .

6.3.1 Gravimetrična izmera v Sloveniji

Prve gravimetrične meritve pri nas je izvedel Vojaški geografski inštitut iz Dunaja med letoma 1887 in 1894. Meritve so izvajali s Sterneckovim nihalnim gravimetrom, predvsem v dolini reke Drave, ter okolici Trsta in Reke. Namenjene so bile vojaškim potrebam. Leta 1938 je jugoslovanski VGI iz Beograda navezal osnovno gravimetrično točko v Beogradu na evropsko referenčno točko v Potsdamu.

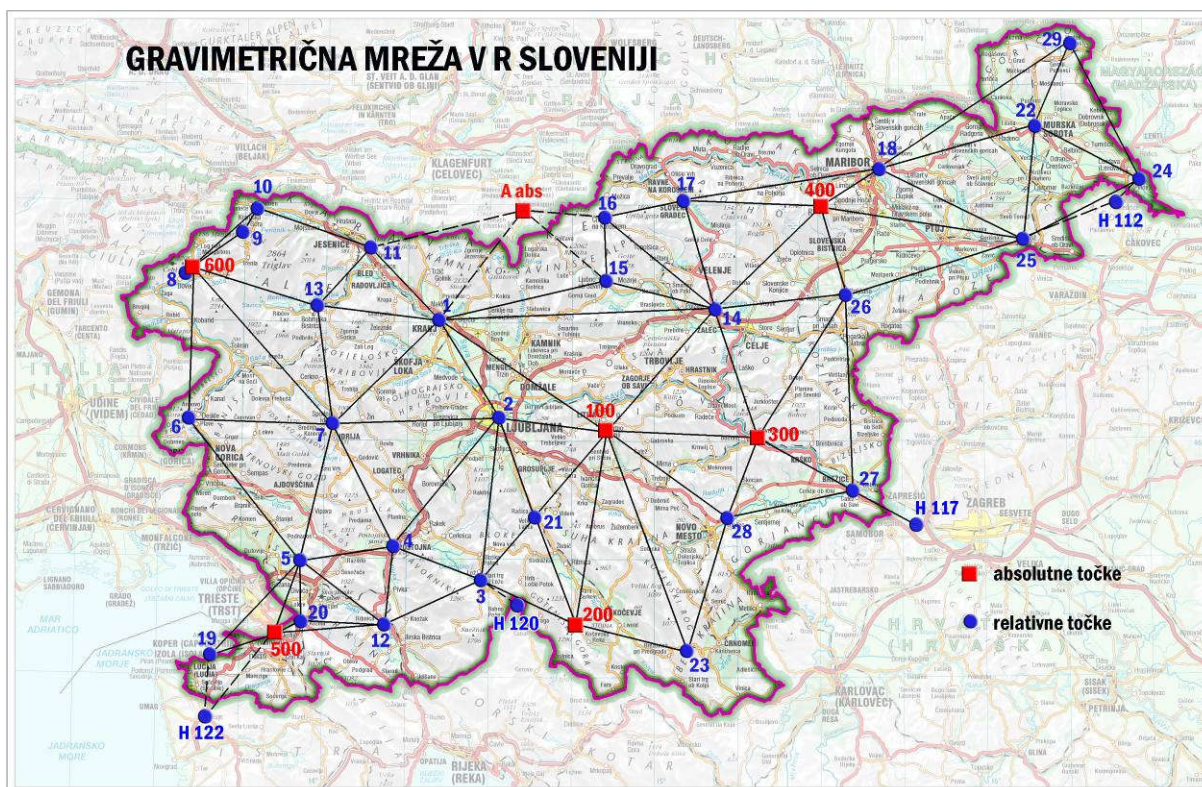
Po drugi svetovni vojni sta bili zasnovani gravimetrični mreži I. in II. reda. Jugoslovansko mrežo I. reda je tvorilo 15 točk; v Sloveniji je točka v Ljubljani. Mreža

je, razen s Parizom povezana tudi z italijansko gravimetrično mrežo. Obstaja še mreža II. reda. Konec šestdesetih let sta bili obe mreži združeni v eno t.i. *osnovno gravimetrično mrežo Jugoslavije*. Tvori jo okoli 350 točk, od tega v Sloveniji 32 točk. Razen nekaj izjem, položaji točk niso znani slovenskim strokovnjakom (Stopar, 1994). Vse meritve se nanašajo na stari Potsdamski sistem in so bile opravljene z gravimetri, ki so bili kalibrirani na bazi v Jugoslaviji. Izračun vseh vrednosti težnega pospeška je bil opravljen z vrednostjo mgala dobljenega na tej bazi (velika baza: Beograd – Skopje, mala baza: na Avali poleg Beograda).

V novo mednarodno mrežo IGSN71 sta bili z neposrednimi meritvami vključeni samo točki v Zagrebu in Beogradu. Primerjava vrednosti težnega pospeška na teh točkah v starem in novem sistemu poda razliko +15,1mGal; absolutna vrednost v starem sistemu je manjša. Izmerjene vrednosti g -ja na ostalih točkah niso bile prevedene v novi sistem.

V Sloveniji obstajata tudi obsežna regionalna in lokalna izmera. Regionalna izmera je bila opravljena z namenom določitve regionalne gravimetrične karte Slovenije. Skupno število gravimetričnih točk na celem ozemlju znaša približno 2800. Lokalno oz. detajlno izmero so izvajali strokovnjaki Geološkega zavoda Ljubljana v okviru raznih naftnih, mineralnih in drugih raziskav. Meritve so potekale od leta 1951 dalje. Popolnejši podatki obstajajo samo za obdobje 1985–1991.

Leta 1995 je GURS začel z delom na obnovi gravimetričnih meritev na območju Slovenije. Tako je bilo stabilizirano in opazovano šest novih absolutnih gravimetričnih točk. Te točke so: Bogenšperk, Gotenica, cerkev sv. Areha na Pohorju, Sevniški grad pri Sevnici, grad Socerb, ter grad Kluže pri Bovcu. Meritve in izvrednotenje so opravili nemški in italijanski strokovnjaki. Absolutne gravimetrične točke predstavljajo ničelno gravimetrično mrežo Slovenije (slika 6.5). V okviru štirih projektov je bilo z različnimi balističnimi instrumenti izvedenih 10 absolutnih meritev na 6 točkah. Tako so bile na točki Bogenšperk izvedene 4 meritve, na točki Gotenica 2 meritvi in na ostalih točkah po ena meritev.



slika 6.5: osnovna gravimetrična mreža Republike Slovenije

Gravimetrična mreža 1. reda je sestavljena iz 29 relativnih točk. Vključenih je 17 ohranjenih gravimetričnih točk osnovne gravimetrične mreže Jugoslavije, dodatno pa je bilo stabiliziranih 12 novih točk. Pri tem je bilo upoštevano geološko mnenje o primernosti lokacij točk, enakomerna pokritost območja, kot tudi stanje prometnic na ozemlju Slovenije, saj je meritve v posameznem gravimetričnem liku potrebno opraviti v enem dnevu. Mreža je tako sestavljena iz 39. gravimetričnih likov.

Mreža je bila izmerjena konec leta 2006. V izmero so vključene tudi točke onstran meja Slovenije: ekscenter avstrijske absolutne točke in štiri hrvaške relativne gravimetrične točke. Tako je bila dosežena večja homogenost naše gravimetrične mreže, poleg tega pa je mreža navezana na gravimetrične mreže sosednjih držav (Avstrija in Hrvaška). Meritve so se izvajale z dvema relativnima gravimetričnima instrumentoma SCINTREX CG-3M. Uporabljena je bila metoda izmere zvezda in metoda profilov z vsakodnevnim zapiranjem likov. Vsaka stranica mreže je bila izmerjena vsaj dva krat. Trenutno obdelujemo merske vrednosti. Rezultati izmere gravimetrične mreže I. reda bodo na voljo spomladi 2008.

Z novo gravimetrično mrežo Slovenije bomo pridobili osnovo za vse nadaljnje gravimetrične izmere na območju Slovenije. Gravimetrično mrežo bomo navezali tudi na nivelmansko mrežo Slovenije. Tako bomo dobili tudi osnovo za določitev višin točk v sodobnem višinskem sistemu (z geopotencialno koto).

7 Literatura

- Bilajbegović A., Hečimović Ž., Bačić Ž. 1991. Istraživanje o izboru sustava visina za NVT SFRJ s obzirom na točnost ubrzanja sile teže, *Geodetski list*, 4-6, 97–106.
- Blakely R. 1996. *Potential theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bomford G. 1980. *Geodesy*, Oxford University Press, IV. izdaja London.
- Grašič M. 1976. Međunarodna standardna gravimetrijska mreža 1971 i naša osnovna gravimetrijska merenja, "Simpozijum o osnovnim geodetskim radovima", Herceg Novi, zbornik del, 136-148.
- Heiskanen W.A., Moritz H. 1967. *Physical Geodesy*, ponatis TU Graz.
- Heiskanen W.A., Vening Meinesz F.A. 1958. *The earth and its gravity field*, McGraw-Hill, New York.
- Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J. 1992. *GPS theory and practice*, Springer Verlag, Wien New York.
- Jakosky J. 1960. *Geofizička istraživanja*, prevod iz angleščine, Naučna knjiga, Beograd.
- Ilk K.H. 2000. *Astronomische und Physikalische Geodäsie*, skripta s TU Bonn.
- Kladnik R. 1985. *Visokošolska fizika*, 1. del, DZS, Ljubljana.
- Klak S. 1974. *Gravimetrija*, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Koler B. 1997. Stanje nivelmanskih mrež na območju Slovenije, Zbornik del: "Novejši dosežki na področju geodezije in geofizike", SZGG, Ljubljana
- Lambeck K. 1988. *Geophysical Geodesy*, Clarendon Press, Oxford.
- Mišković D. 1985. Določitev geoidnih točk z metodo astrolaba v Karavankah, diplomska naloga, FAGG, Ljubljana.
- NOAA 1985. *Geodesy for the Layman*, NOAA, NOA
- Pellinen L, Deumlich F. 1982. *Theoretische Geodäsie*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- Rummel R. 2003. *Erdmessung 1, 2 in 3*, skripta s TU München.
- Schwarz K.P. 1996. *Fundamentals of Geodesy*, skripta z University Of Calgary, Faculty of Geomatics Engineering, Kanada.
- Starčević M. 1991. *Gravimetrijske metode istraživanja*, Nauka, Beograd.
- Svečnikov N. 1955. *Viša geodezija*, knjige I., II., III., Zvezna geodetska uprava, Beograd.
- Torge W. 2001. *Geodesy*, Walter de Gruyter, New York, II. izdaja
- Torge W. 1989. *Gravimetry*, Walter de Gruyter, New York.
- Vaniček P., Krakiwsky E. 1986. *Geodesy: the Concept*, Elsevier, Amsterdam (2.izdaja).