

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
za
gradbeništvo
in geodezijo

Katedra za
matematično
in fizikalno geodezijo
ter navigacijo



Miran Kuhar

OSNOVE SATELITSKE GEODEZIJE

- študijski pripomoček -

verzija: oktober 2012

Predgovor

Pričujoči študijski pripomoček je namenjen študentom I. letnika študija druge stopnje Geodezija in Geoinformatika za lažje spremljanje i pripravo izpita pri predmetu Satelitska geodezija in navigacija.

Gibanje umetnih zemljinih satelitov v gravitacijskem polju Zemlje proučuje veda, ki ji pravimo Astrodinamika. Gre za ožje področje širše Nebesne mehanike. Da bi študentje lažje razumeli snov, posebej pa izpeljavo Keplerjevih zakonov smo na začetku podali poglavje iz Fizike, ki se nanaša na kinematiko masne točke.

V besedilu najdemo tudi par mogoče "neposrečenih" prevodov angleških izrazov. Žal, literature v slovenščini s področja astrodinamike ni, tako da lahko samo upamo, da se bo slovensko izrazoslovje s tega področja uveljavilo čim prej.

Kot je navada v večini literature, so vektorske količine v besedilu in enačbah napisane s krepko poševno pisavo ("").

Študijski pripomoček je delovna verzija učbenika. Služi naj izključno kot pomoč pri študiju in pripravi na izpit v povezavi z zapiski, ki si jih študent izdela pri poslušanju predmeta. Študenti naj vedno posežejo po najnovejši verziji, ki jo lahko dobijo v spletni učilnici oz. avtorjevi osebni spletni strani <http://www.fgg.uni-lj.si/~mkuhar/>

Seveda so v besedilu ostale še napake. Upam, da jih v enačbah ni. Vse odkrite tiskarske napake ter pripombe in komentarje mi prosim posredujte na elektronski naslov: miran.kuhar@fgg.uni-lj.si. Vesel bom vsakega predloga za izboljšavo študijskega pripomočka.

v Ljubljani, oktobra 2012

Miran Kuhar

Kazalo

	Predgovor	i
	Kazalo	ii
1	Uvod	1
1.1	Splošna razdelitev in osnovni koncepti satelitske geodezije	1
1.2	Osnovna enačba satelitske geodezije	3
1.3	Kratek zgodovinski pregled	6
2	Merske tehnike vesoljske geodezije	8
2.1	VLBI	9
2.2	SLR in LLR	10
2.3	DORIS	11
2.4	IGS	12
3	Kinematične in dinamične osnove gibanja satelitov	13
3.1	Newtonovi zakoni mehanike	14
3.1.1	Galilejevo načelo relativnosti in simetrijska načela	15
3.2	Inercialni referenčni sistemi	17
3.3	Kinematika masne točke	18
3.3.1	Gibanje točke v polju centralne sile	22
3.4	Stožnice	22
3.4.1	Geometrija stožnic	23
4	Problem dveh teles	27
4.2	Konstante gibanja – ohranitveni zakoni	29
4.2.1	Ohranitev mehanske energije	30
4.2.2	Ohranitev vrtilne količine	31
4.3	Oblika tirnice – prvi Keplerjev zakon	34
4.3.1	Laplaceov vektor	36
4.3.2	Zveza med energijo in obliko tirnice	37
4.4	Drugi in tretji Keplerjev zakon	40
4.5	Položaj satelita na tirnici	42
4.6	Kanonične enote in referenčna tirnica	43
4.7	Vrste tirnic glede na obhodni čas in višino leta	43
5	Tirnica v prostoru	45
5.1	Klasični Keplerjevi elementi	46
5.2	Dodatni elementi satelitovega tira	48
5.2.1	Keplerjeva enačba	49
5.3	Določitev tirnice	49
5.3.1	Keplerjevi elementi tirnice iz r in v	49
5.3.2	Vektorja r in v iz Keplerjevih elementov tirnice	54
5.4	Vektorja hitrosti in položaja v koord. sistemu gorišča (PQW)	54
5.4.1	Transformacija iz koord. sistema gorišča v geocentrični ekvatorski koord. sistem	55
5.5	Projekcija tirnice na Zemljinem površju	56
6	Moteno gibanje satelita	59
6.1	Moteče sile	59
6.1.1	Motnje in višina satelita	60

6.2	Vplivi posameznih motečih sil	61
6.2.1	Primeri učinka motečih sil na Keplerjeve elemente	63

1 Uvod

Po klasični Helmerotvi definiciji so naloge Geodezije določitev oblike Zemlje, njenega zunanjega težnostnega polja in upodobitev njenega površja. Satelitska geodezija obsega postopke opazovanj i obdelavo teh opazovanj do in med umetnimi zemljini sateliti za potrebe reševanja osnovnih nalog geodezije, kakor so definirani v prejšnjem stavku. Zaradi izjemnega povečanja natančnosti od začetkov satelitske ere do danes, je s merskimi tehnikami satelitske geodezije možno tudi časovno spremljanja omenjenih predmetov preučevanja. Glavne naloge satelitske geodezije so:

- določitev parametrov in orientacije Zemljinega telesa (parametri splošnega Zemljinega elipsoida).
- Določitev globalnih, regionalnih in lokalnih tridimenzionalnih geodetskih mrež.
- Določitev parametrov Zemljinega težnostnega polja in njegovih linearnih funkcionalov (npr. koeficienti razvoja gravitacijskega potenciala v vrsto po sfrenih funkcijah, globalni geoid).
- Določitev in iz vrednotenje geodinamičnih pojavov kot so na primer: parametri rotacije Zemlje, premiki tektonskih plošč.
- Določitev natančnih tirnic gibanja umetnih Zemljinih satelitov, ne gleda na to ali gre za navigacijske ali druge vrste satelite.

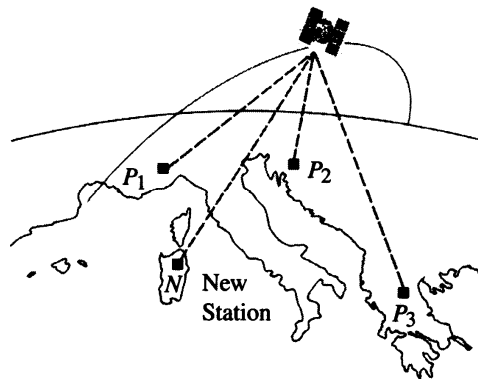
Že kmalu po začetku satelitske ere so začeli uporabljati v geodeziji posebne instrumente in postopke opazovanj, ki niso omejeni samo na umetne Zemljine satelite. Na primer leta 1969 so začeli s laserskim merjenjem razdalj do Lune. Razdalje so merili do sistema zrcal, ki jih je tam postavila odprava Apollo 11. Metode in postopke radio astronomije so tudi uporabili za reševanje geodetskih nalog – določitev geocentričnih koordinat opazovališč; tu so predmet opazovanj kvazarji – najbolj oddaljeni objekti v vesolju, katerih radijsko valovanje lahko zabeležimo s pomočjo velikih anten, ene od sestavin opreme za Interferometrijo na dolgih bazah (VLBI). Iz naštetih razlogov se je v nekaterih jezikih namesto termina satelitska geodezija uveljavil termin "Space Geodesy", "Géodésie Spatiale", oz. "Geodätische Raumvefahren", nekaj kar bi lahko prevedli kot globalna, vesoljska geodezija.

1.1 Splošna razdelitev in osnovni koncepti satelitske geodezije

Pomen uporabe umetnih zemljinih satelitov je očiten v naslednjem:

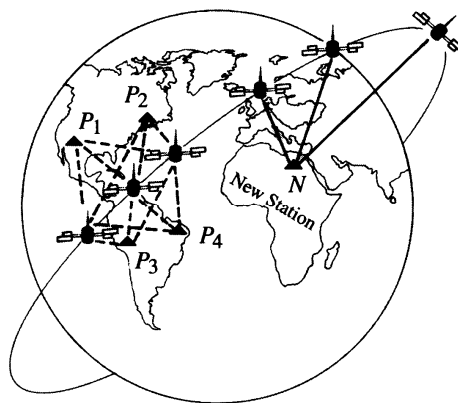
I. Satelite lahko uporabimo kot "vidne" visokoleteče cilje. V nadgradnji klasičnega koncepta trigonometričnih mrež so sateliti v začetku bili uporabljani kot "fiksne" točke, ki so bile vidne z večjega števila točk na Zemlji. Opazovanje satelitov z različnih točk na površju Zemlje je zasnova *geometrične metode* satelitske geodezije. Pri tem lahko zanemarimo dejstvo, da se sateliti gibljejo (premične vizure). Klasičen primer geometričnih metod je *satelitska triangulacija*, ki sloni na prostorskem zunanem urezu. Opazujemo satelite s številnih točk na Zemlji, ki so medsebojno oddaljene tudi do več tisoč kilometrov. Na ta način lahko prenesemo koordinate tj.

izračunamo koordinate točk na Zemlji posredno prek satelitov, ne da bi pri tem morali poznati njihove tirnice. Za opazovanja so uporabljali posebej za to razvite kamere (primer IGN-kamera, Wild BC4).



Slika 1.1: princip geometrijske metode sat. geodezije

II. Satelite lahko obravnavamo kot čutila v težnostnem polju Zemlje. Gibanje in spremembe gibanja satelita so funkcija parametrov Zemljinega težnostnega polja. Ta način obravnave satelitov vodi k *dinamičnim metodam* satelitske geodezije.



Slika 1.2: princip dinamične metode sat. geodezije

Tu se določajo razlike med dejanskim in računskim (predvidenim) gibanjem satelita, na podlagi katerih lahko sklepamo o sploščenosti Zemljinega telesa, razporeditvi mas - vse v obliki koeficientov razvoja gravitacijskega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah.

Opazovanja do satelitov so hkrati funkcija koordinat opazovališč. Na ta način se lahko s pomočjo teh opazovanj določijo geocentrične koordinate točk na Zemlji. Skupna določitev parametrov težnostnega polja in geocentričnih koordinat opazovališča omogoča izpeljavo zaključkov o različnih parametrih Zemljine orientacije v prostoru (hitrost rotacije, gibanje polov).

V zadnjih desetletjih je izginila stroga ločnica med geometričnimi in dinamičnimi metodami satelitske geodezije, saj so se pojavile nove metode, ki so kombinacije obeh. Obstajajo posebni satelitski sistemi za navigacijo, ki so namenjeni samo "pozicioniranju" tj. določitvi geocentričnih koordinat točk na Zemlji (Doppler, GPS, Glonass).

Pri nalogah določitve koordinat opazovališča je potrebno, da sateliti letijo na večjih višinah, da bi vpliv nepravilnosti težnostnega polja na njihovo tirnico bil čim manjši. Nasprotno, v nalogah kjer želimo oceniti parametre Zemljinega težnostnega polja je nujno, da sateliti letijo na čim manjših višinah.

Metode satelitske geodezije lahko razdelimo tudi glede na kraj opravljenih opazovanj. Tako ločimo:

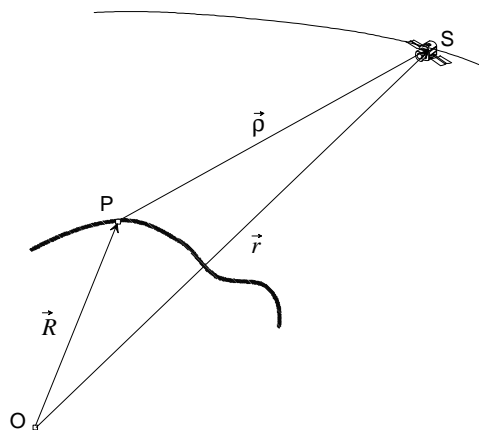
1. Zemeljske ("Earth to Space") metode:
 - fotografsko določanje smeri do satelitov,
 - lasersko merjenje dolžin (LLR, SLR),
 - Dopplerska opazovanja (TRANSIT),
 - Navigacijski sateliti (GPS, GLONASS).
2. Vesoljsko podprte metode ("Space to Earth"):
 - satelitska altimetrija,
 - lasersko merjenje s satelitov,
 - satelitska gradiometrija,
3. Čiste vesoljske metode ("Space to Space"):
 - "Satellite to satellite tracking"

1.2 Osnovna enačba satelitske geodezije

Osnovno enačbo satelitske geodezije lahko izrazimo neposredno s slike:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \quad (1.1)$$

pri čemer so: \mathbf{R} - geocentrični krajevni vektor opazovališča, $\boldsymbol{\rho}$ topocentrični krajevni vektor opazovanj, ter \mathbf{r} - geocentrični krajevni vektor položaja satelita.



slika 1.3: osnovna enačba satelitske geodezije

Za rešitev enačbe je potrebno vzpostaviti povezavo med opazovanji - vektor $\boldsymbol{\rho}$ ter znanimi in neznanimi parametri ki jih vsebujeta vektorja \mathbf{R} (parametri, ki podajajo položaj opazovališča) in \mathbf{r} (parametri, ki opisujejo položaj satelita).

V splošnem je to nelinearna enačba opazovanj, ki povezuje opazovanja in neznane parametre:

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \Phi(\mathbf{X}) \quad (1.2)$$

pri tem so: \mathbf{L} vektor opazovanj,
 \mathbf{X} vektor neznanih parametrov,
 Φ nelinearna vektorska funkcija
 \mathbf{v} vektor odstopanj (popravkov)

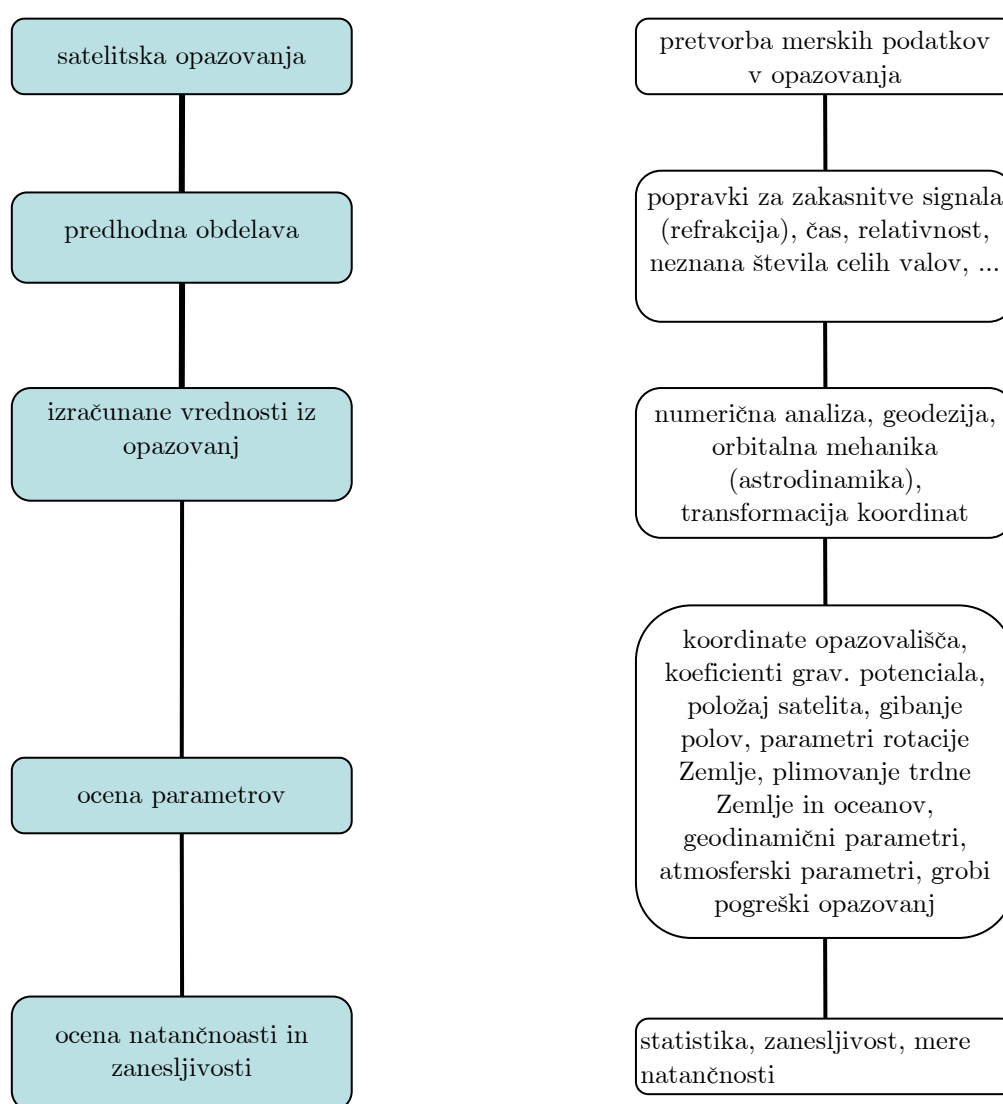
Enačbo rešujemo s klasičnim postopkom izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Za nas so zanimivi parametri, ki nastopajo v enačbi 1.2, ki jih lahko ocenimo v postopku izravnave.

1. parametri, ki podajajo geocentrično gibanje opazovališča \mathbf{R} . Prvo tu nastopajo geocentrične koordinate opazovališča; potem lahko nastopijo geodinamični parametri, ki podajajo zvezo med terestričnim k.s. in inercialnim (nebesnim) k.s. (na primer gibanje polov in parametri rotacije Zemlje). Prav tako tu so prisotni parametri, ki opisujejo plimovanje trdne Zemlje in tektonske premike zemljine skorje. Na koncu lahko kot neznanka nastopajo transformacijski parametri med geocentričnim koordinatnim sistemom in različnimi krajevnimi topocentričnimi koordinatnimi sistemi.
2. Parametri, ki opisujejo gibanje satelita \mathbf{r} . Poleg koordinat satelita so to še koeficienti razvoja gravitacijskega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah, ter vsi drugi parametri, ki opisujejo vpliv motečih sil (gravitacijskih in ne-gravitacijskih) na gibanje satelita.
3. V tretjo skupino sodijo parametri, ki neposredno vplivajo na izvedena opazovanja $\boldsymbol{\rho}$. To so različni atmosferski parametri, parametri satelitove ure, zakasnitve signala itd.

Očitno ne obstaja rešitev, ki bi zajela vse našteje parametre hkrati. V odvisnosti od namena se rešujejo samo določeni parametri, za ostale se prevzamejo različne predpostavke oz. dodatni pogoji. Možna je tudi njihova popolna eliminacija v fazi predpriprave podatkov.

Na primer: ko parametrov satelitove tirnice ne določamo in ko poznavanje tirnice ni pomembno, takrat govorimo o geometrijski metodi satelitske geodezije. Zasnova je bila uporabljena pri uporabi satelitskih kamer koncem petdesetih in v začetku šestdesetih let (že omenjena satelitska triangulacija). Geometrijske metode so po svoji naravi relativne metode, saj ni možno določiti geocentričnih koordinat opazovališča. Ko je pomembno oblikovati sile, ki deluje na satelit ("Force model") govorimo o dinamičnih metodah. Tu je poznavanje položaja tirnice pomembno, ali v obliki efemerid, ali z njihovo določitvijo, hkrati z ostalimi neznanimi parametri. Z hkratnim opazovanjem satelita(ov) z vsaj dveh opazovališč, lahko modeliramo posamezne parametre tirnic na kratkih odsekih v samem postopku obdelave podatkov

opazovanj*. Ta postopek imenujemo izravnava s "sproščeno" tirnico oz. *Semi-Short-Arc Method* ("adjustment with a relaxed orbit"). Pri tej metodi se ne upoštevajo sile, ki motijo gibanje satelita, neznane parametre tirnice odpravimo na geometrijski način. S predpostavko znanega gravitacijskega potenciala Zemlje, lahko za takšne krajše odseke tirnic, neznane elemente določimo v postopku izravnave (ocena neznanih parametrov). To je t.i. *Short-Arc* metoda. Če proces opazovanj in obdelave zajame več obhodov satelita oz. dolge odseke tirnic, govorimo o metodi *Long-Arc*. Pri tem se v postopku izravnave določajo številni parametri motene tirnice kot tudi delujoče t.i. moteče sile. Z *Long-Arc* metodo se določajo parametri gibanja Zemljinih polov, rotacije in plimovanja trdne Zemlje, ocenijo pa se lahko tudi parametri anomaljske težnostnega polja Zemlje.



Slika 1.4: Funkcionalna shema uporabe satelitskih opazovanj

* Kot bomo videli kasneje so parametri tirnice "prostostne stopnje" satelitovega gibanja ("degrees of freedom"), skupaj jih je 6.

1.3 Kratak zgodovinski pregled

Zgodovinsko je razvoj satelitske geodezije vezan za opazovanje Lune z namenom določitve velikosti Zemlje. J.A. Euler je leta 1768 pokazal možnost uporabe opazovanj Lune za določitev parametrov meridianske elipse. Pri tem je navedel vse slabosti, ki spremljajo opazovanja Lune:

- Luna je preveč oddaljena od Zemlje,
- ima preveliko maso ($m_{\zeta}=1/81_{\oplus}$),
- prepočasi se giblje,
- Luna ni točkasto telo, ima faze (mene),
- presvetla je.

V XIX. stoletju so sploščenost zemljinega elipsoida z opazovanjem gibanja Luninih vozlov določili še: Laplace leta 1802 (1:303), Hansen leta 1864 (1:296), Helmert leta 1884 (1:297,8) in Hill tudi leta 1884 (1:297,2).

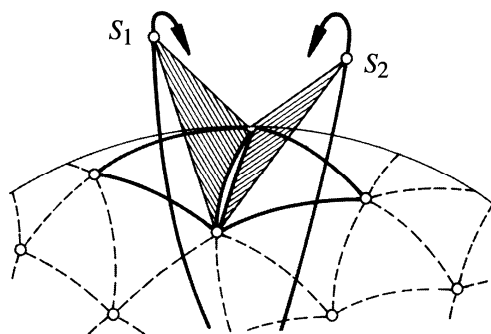
Leta 1946 je finski geodet Väisälä prvi uporabil metodo *zvezdne triangulacije* s pomočjo osvetljenih balonov, ki so jih opazovali z več opazovališč. Leta 1954 je Markowitz konstruiral prvo "mesečevo" kamero. Njen razvoj je omogočil nastanek kasnejših "satelitskih kamer" (kamere za opazovanje satelitov).

Za pravi začetek satelitske geodezije štejemo dejanski začetek razvoja vesoljske tehnologije, torej izstrelitev prvega umetnega Zemljinega satelita Sputnik 1, 4.X. 1957. Sledil je Sputnik 2 3.XI. 1957, ter Američani s svojim prvim satelitom Explorer 1, 31.I. 1958. Že istega leta so bili javnosti predstavljeni prvi rezultati opazovanj gibanja umetnih Zemljinih satelitov: določitev sploščenosti Zemljinega elipsoida $\rightarrow 1 : 298,3$, vrednost je bila manjša od do tedaj uveljavljene 1:297.

Leta 1960 so ZDA izstrelile prvi navigacijski satelit iz sistema TRANSIT, že leta 1967 je omogočena tudi uporaba sistema za civilne namene. Leta 1979 je izstreljen prvi satelit GPS, leta 1983 je sistem NAVSTAR/GPS postal odprt za civilno uporabo, ruski Glonass pa leta 1988.

Razvoj satelitske geodezije lahko časovno razdelimo v naslednja obdobja:

Optična era: razvoj kamer za opazovanje satelitov (satelitska triangulacija). Znan je PAGEOS ("Passive Geodetic Satellite"), ki je bil viden tudi s prostim očesom. V tistem času so geodeti določili parametre prvih geocentrinih datumov geodetskih mrež ter povezali mreže med kontinenti z natančnostjo približno 5 m. Izračunani so bili koeficienti razvoja gravitacijskega potenciala Zemlje do stopnje in reda 12-15. Optične metode so zgubile pomen sredi sedemdesetih leta prejšnjega stoletja.



Slika 1.4: princip satelitske triangulacije

Doppler era: že omenjeni sistem navigacijskih satelitov TRANSIT je omogočal absolutno določanje položaja z natančnostjo približno par metrov in relativno določanje položaja okoli 50 cm. Sateliti so leteli na višini 1100 km in so oddajali signal na frekvencah 400 MHz in 150 Mhz. Sprejemnik je omogočal sprejem signala z enega satelita ter je z opazovanjem signala na dveh frekvencah omogočal odpravo ionosferske refrakcije. Opazovanja razporejena na več dni so omogočala doseganje zgoraj omenjene natančnosti. Sistem so vedno tvorili 4 – 6 aktivnih satelitov.

SLR in LLR tehnika: Laserji v observatorijih oddajajo kratke impulze, ki se odbijajo od reflektorjev na satelitu oz. Luni. Prve meritve so izpeljane leta 1965. Kasneje so meritve izvajane do vseh satelitov, ki so bili opremljeni s posebnimi zrcali za odboj laserskega žarka. Danes je možno zasledovati več kot 40 satelitov. Od leta 1969 so na Luni nameščena zrcala, do katerih najmočnejši svetovni laserji še vedno opravljajo meritve.

Tehniki VLBI in VLA kot del radio astronomije.

Operativna faza satelitske geodezije: pojav navigacijskih sistemov NAVSTAR GPS ter Glonass, ki so se v vsakdanji geodetski praksi začeli številčneje uporabljati v začetku devetdesetih let.

2 Merske tehnike vesoljske geodezije

Merske tehnike vesoljske geodezije (angleško "Space Geodesy Techniques", nemško "die Geodätischen Raumverfahren"), so danes osnova za vzpostavitev nebesnih in terestričnih referenčnih sestavov. Tu sodijo:

- VLBI: International VLBI Service (IVS),
- SLR/LLR: International Laser Ranging Service (ILRS),
- GPS: International GNSS Service (IGS),
- DORIS: International DORIS Service (IDS), v pripravi.

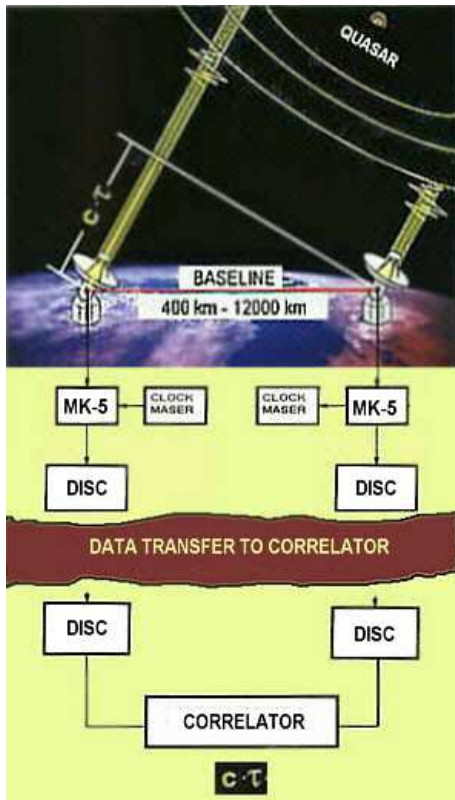
Vse omenjene službe skrbijo za koordinacijo in konsistenco rezultatov meritev. Vsi rezultati so na razpolago službi IERS.

Opazovanja so namenjena reševanju znanih nalog geodezije (tudi astronomije), ki jih s klasičnimi merskimi tehnikami ni možno rešiti. Naloge oz. parametre, ki jih lahko ocenimo s posameznimi tehnikami nam podaja tabela 6.1. Moramo poudariti, da je natančnost posamezne tehnike omejena s sistematičnimi vplivi. Zato se znanstveniki prizadevajo za integracijo različnih merskih tehnik, ki bi naj na koncu dala končno rešitev visoke natančnosti.

Tabela 6.1: parametri (količine), ki se določajo z tehnikami vesoljske geodezije

Parameter	VLBI	GPS GLONASS	DORIS	SLR	LLR
kvazarji (ICRF)	X				
nutacija	X	(X)			X
gibanje polov	X	X	X	X	X
UT1	X				
dolžina dneva (LOD)		X	X	X	X
visoko frekvenčni del ERP	X	X			
amplituda ERP od plimovanja morij	X	X		X	
koord. + hitrost (ITRF)	X	X	X	X	X
geocenter		X	X	X	
koef. Zemlji. gravit. polja		X	X	X	(X)
elementi tirnic		X	X	X	X
tirnice LEO satelitov		X	X	X	
ionosfera	(X)	X	(X)		
troposfera	X	X	X		
prenos točnega časa	(X)	X		(X)	

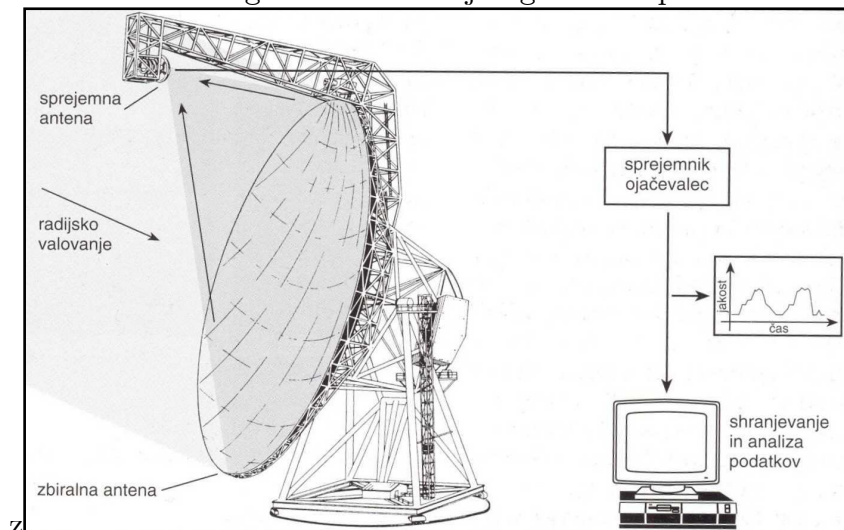
2.1 VLBI



VLBI ali "Very Long Baseline Interferometry" je kratica za interferometrijo na dolgih bazah. Izvengalaktični izvori radijskega valovanja (kvazarji "kvazi-zvezdni") oddajajo valove v cm oz. dm območju, katere beležijo velike antene radijskih teleskopov (instrumenti *radio astronomije*).

Princip delovanja VLBI tehnike nam kaže slika 2.1.

Na sliki 2.2 lahko vidimo glavne dele radijskega teleskopa.



slika 2.2: glavni deli radijskega teleskopa

Kako delujejo radio teleskopi? Ti sprejemajo naravno sevanje radijskega valovanja astronomskih objektov v območju valov od okoli 10 m (30MHz) do 1 mm (300GHz). Efektivno uporabni so valovi dolžin od 1 do 20 cm.

Radio teleskopi so zelo različnih oblik vendar v osnovi vsi vsebujejo 2 osnovni komponenti: veliko radijsko anteno ter občutljiv radiometer oz. radio sprejemnik.

Kvaliteta je odvisna od velikosti in učinkovitosti antene in občutljivosti radio sprejemnika. Problemi: obstaja motenje šibkih signalov z umetno ustvarjenimi valovi na Zemlji, težko je sledenje objektov na nebu, izgradnja anten je tehnološko zelo zahtevna, draga. Celotna oprema je težko dostopna.

Princip meritev: v 24-urni opazovalni seriji 2 - 6 anten opazuje isti radijski izvor. Točni časovni trenutki opazovanj se beležijo na magnetni trak, saj je vsaka točka opremljena z atomskimi urami (zahtevana stabilnost frekvence je reda velikosti 10-14 ali bolje.)

Opazovanja v seriji se analizirajo v korelatorju z metodo interference, kjer se določa časovna in fazna zakasnitev prispelega valovanja v posamezni anteni. Iz meritev je možno določiti bazni vektor med opazovališči. Natančnost določitve koordinat znaša nekaj *mm* oz. 1 mm/leto. Natančnost določitve Zemljine rotacije znaša 10 s oz. 0,2 mas za gibanje Zemljinih polov.

Korelator je sistem tisoč procesorjev zmožnih paralelne obdelave 16 milijard operacij v sekundi.

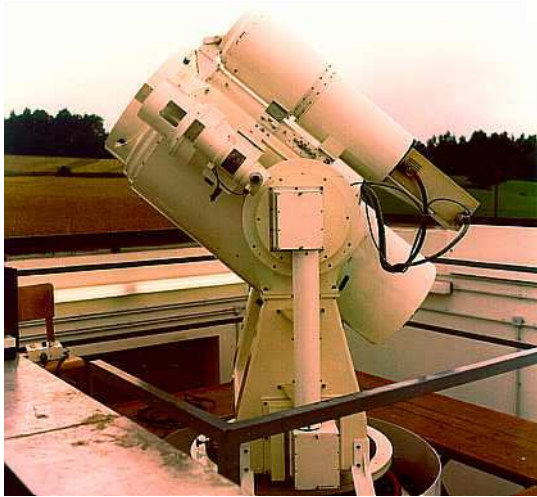
2.2 SLR in LLR

SLR in LLR sta kratici za "Satellite Laser Ranging" in "Lunar Laser Ranging". Laserji v observatorijih oddajajo kratke impulze, ki se odbijajo od reflektorjev na satelitu oz. na Luni.

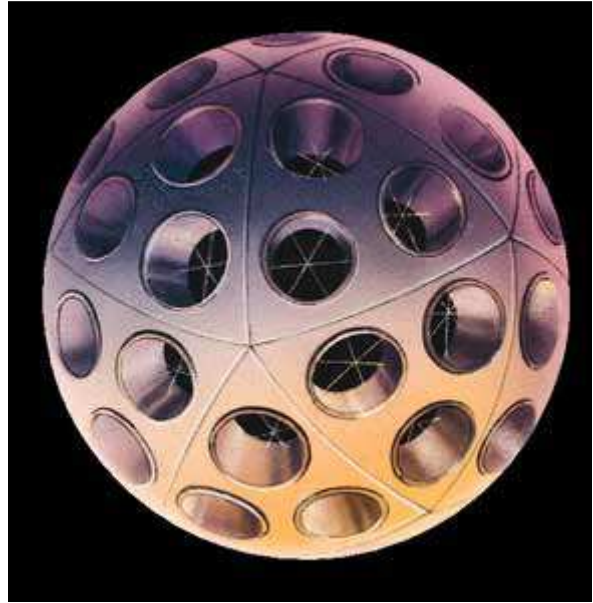
SLR

Trenutno obstaja 43 SLR postaj v 30 državah, od česar je 33 postaj postavila NASA. Več kot 40 satelitov je možno zasledovati. Natančnost meritev ~ 1cm. Uporaba:

- Določitev težišča Zemlje (najbolj natančna metoda).
- Z merjenjem geocentričnih položajev satelitov omogoča zaznavanje majhnih sprememb v gravitacijskem polju Zemlje.
- Spremembe nivoja morja.
- Spremembe volumna ledu na polih.
- Premike zemeljskih mas.
- Vplive sončne energije in letnih časov na Zemeljsko atmosfero.
- Kalibracija radarskih altimetrov.
- Zagotavljanje podatkov za GPS, PRARE in DORIS.
- Potrditev splošne teorije relativnosti.



slika 2.3: laser v observatoriju



slika 2.4: satelit z zrcali – *Stella*

LLR

V začetku delovanja je bila natančnost določitve razdalj 10 -15 cm, sedaj ta znaša 3-5 cm in tudi do 1 cm. Trenutno samo trije observatoriji lahko še merijo razdalje do Lune: Grasse (Francija), McDonalds (ZDA) in Wettzell (Nemčija).

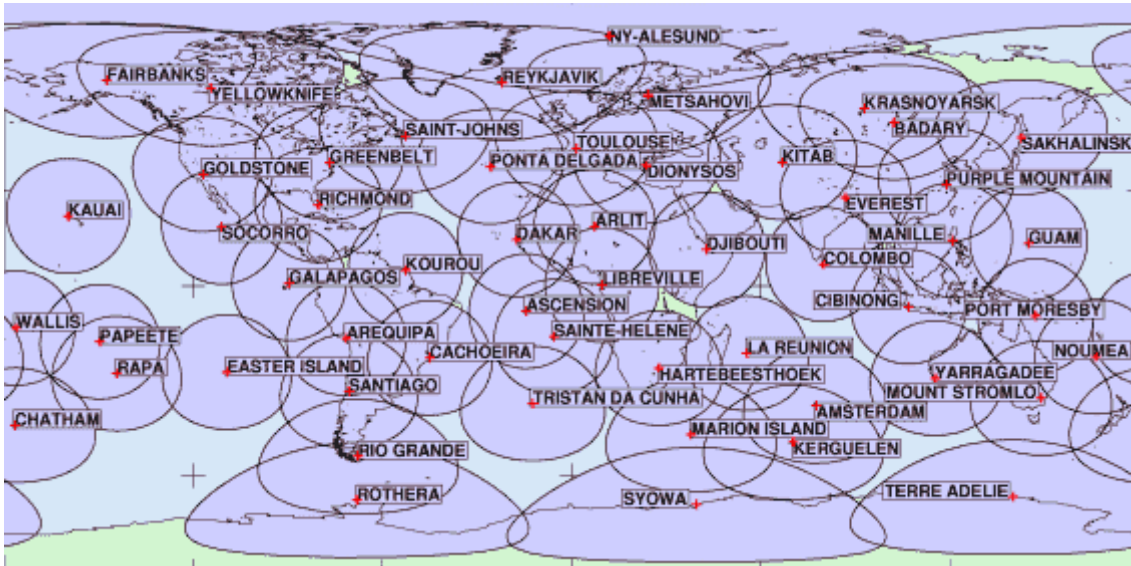
Uporaba LLR meritev:

- Precizno določanje dimenzij, rotacije in orbite Lune, ugotovljeno premikanje Lune stran od Zemlje 3,8 cm na leto.
- Variacije v dolžini dneva na Zemlji.
- Premiki tektonskih plošč na Zemlji.
- Preizkus Einsteinove teorije relativnosti.

2.3 DORIS

DORIS je kratica od "Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite". To je dvofrekvenčni navigacijski sistem (2,03 in 0,40 GHz), ki ga je razvila Francoska vesoljska agencija. Namenjen je predvsem natančnemu določanju tirnic satelitov, ki so opremljeni s napravami DORIS.

To je t.i. "two-way-system", saj je za razliko od tehnologije GPS, tu potreben "aktivni" sprejemnik, ki poleg tega, da sprejema signale oddane iz satelita, te hkrati tudi oddaja. Podatki opazovanj se zbirajo v satelitih, ki jih potem oddajajo v kontrolno postajo. Trenutno je približno 50 postaj razporejenih po celem svetu (slika 2.5)



slika 2.5: razporeditev DORIS postaj po svetu

Natančnost določitve koordinat postaj znaša okoli 2 cm, natančnost določitve orientacije Zemlje pa 1-2 mas.

2.4 IGS

IGS je kratica za "International GNSS Service". To je mednarodna zveza več kot 200 ustanov, ki upravljajo s permanentnimi postajami GPS. IGS zbira in arhivira ter razpečuje podatke visoko natančne obdelave GPS- in GLONASS-opazovanj za nadaljnjo znanstveno in inženirsko uporabo. Rezultati IGS-a so:

- Precizne tirnice,
- koordinate permanentnih postaj GPS z hitrostmi,
- podatki o orientaciji Zemlje (EOP "Earth Orientation Parameters"),
- atmosferski parametri, pridobljeni na osnovi obdelave opazovanj GPS.

3 Kinematične in dinamične osnove gibanja satelitov

Nebesna mehanika se ukvarja s teoretičnimi raziskavami pravega gibanja nebesnih teles in umetnih zemljinih satelitov, ki je posledica medsebojnega gravitacijskega privlačenja. V satelitski geodeziji nas zanima samo gibanje umetnih zemljinih satelitov okoli Zemlje in njeni širši okolici (zelo redko Osončju). Z nastopom vesoljske tehnologije se je za vedo, ki proučuje gibanje umetnih zemeljinih satelitov in vesoljskih sond uveljavil termin *astrodinamika* (orbitalna mehanika). Gibanje satelitov je podvrženo določenim zakonitostima. Z uvedbo različnih predpostavk lahko oblike in enačbe gibanja satelitov pojasnimo empirično s Keplerjevimi zakoni, vendar tudi analitično s pomočjo Newtonovih zakonov (aksiomov) klasične mehanike.

Najbolj preprost primer gibanja v nebesni mehaniki je gibanje dveh nebesnih teles, ki se medsebojno privlačita po Newtonovem gravitacijskem zakonu t.i. problem dveh teles. V primeru gibanja umetnih zemljinih satelitov je ta zanemarljivo majhne mase glede na Zemljo Zato, nekateri tu govorijo o problemu enega telesa, oz. kot bomo videli gre za gibanje masne točke v polju gravitacijske (centralne) sile. V primeru, da masi teles nista zanemarljivi i se obe telesi privlačita, govorimo o pravem problemu dveh teles (na primer dvojne zvezde, gibanje Zemlje in Lune). Mnogi znanstveniki so poskušali odgovoriti na to vprašanje še preden se je rodila moderna znanost. Že največji astronomski genij starega veka Aristarh s Sama (III. st. p.n.š.) je dokazoval, da se planeti gibljejo okoli Sonca. Čeprav se njegov nauk ni "prijel" med poznejšimi astronomi, je bil Aristarh inspirator za Kopernikovo heliocentrično zgradbo vesoljstva. V svoji razpravi "De revolutionibus orbium coelestium" iz leta 1543 je predstavil svojo zgradbo vesoljstva in predstavil Zemljina gibanja na tri načine:

1. Vsak dan se zavrti okrog svoje osi od zahoda proti vzhodu, iz tega sledi navidezno dnevno gibanje vseh zvezd od vzhoda proti zahodu.
2. V enem letu obkroži Sonce v smeri od zahoda proti vzhodu; iz tega sledi navidezno istosmerno letno gibanje Sonca.
3. Zemljiska os se med letom giblje po stožcu okrog normale, postavljene na ravnino Zemljinega tira; to letno gibanje ima nasprotno smer kakor prvi dve gibanji.

Čeprav nam je Kopernikovo učenje danes samoumevno, je malo manjkalo, da bi podobno kot v starem veku ponovno zmagalo geocentrično učenje. Dokončno zmago in dokaz v prid Koperniku je prispeval Galilej z odkritjem Jupitrovih lun in Venerinih men. Veliko dobo Tycha Braheja in Galileja je dvignil do epohalne prelomnice v razvoju astronomije njun vrstnik Johannes Kepler (1571–1630). Zakone o planetnem gibanju, ki jih je odkril in predstavil s strogimi matematičnimi obrazci, povemo z besedami takole:

1. Središča planetov se gibljejo okrog Sonca po elipsah; v skupnem gorišču teh elips je Sonce.
2. Zveznica med središčem Sonca in središčem planeta popiše v enakih časovnih presledkih enake ploščine.

3. Kvadrati obhodnih dob posameznih planetov so v istem razmerju kakor tretje potence velikih polosi njihovih eliptičnih tirov.

Keplerjevi zakoni in enačbe razločno in natančno povedo, kako se gibljejo planeti, ne odgovarjajo pa na vprašanje, zakaj se tako gibljejo. Tretji Keplerjev zakon je odkril zvezo med gibanji posameznih planetov in vzbujal misel, da morajo imeti ta gibanja skupni vzrok, neko neznano silo, ki sili planete, da se gibljejo. Keplerjevi, empirično izpeljani zakoni, sodijo še v kinematiko, najti skupni vzrok planetnih gibanj pa je naloga dinamike, ki jo je osnoval Galilei v svojih "Pogovorih" ("Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze") leta 1638. Takoj v začetku dinamika še ni bila kos tej novi pomembni nalogi. Rešil jo je šele Newton v svojih "Načelih" ("Philosophie naturalis principia mathematica") leta 1687. Newton je končno postavil zakone gibanja, s katerimi je opredelil sile in zvezo med silami in pospeški. Zapisal je tudi silo, ki naj bi delovala med poljubnima dvema masama. Pri tem ne gre spregledati imena Christian Huygensa, ki je v mehaniko uvedel pojem centripetalnega pospeška.

Na temelju Newtonovih del iz dinamike se je v tem času razvila racionalna mehanika. Tedaj je postalo jasno, da je mogoče s pomočjo drugega zakona mehanike iz znane sile in mase nebesnega telesa izračunati njegov pospešek, po dvakratnem integriranju, pa tudi položaj v poljubnem trenutku. Tako je problem glede gibanja nebesnih teles prešel na reševanje treh diferencialnih enačb drugega reda (tri koordinate) za vsako telo. S temi enačbami so astronomi računali tire nebesnih teles.

Problem gibanja dveh teles, ki se privlačita po gravitacijskem zakonu, je rešil Newton. Problem gibanja v prisotnosti še enega telesa (t.i. problem treh teles) pa astronomi niso uspeli dokončno rešiti. Enačbe gibanja za ta problem so rešljive samo za posebne primere, postopek reševanja pa je precej zamotan. Zato so najprej računali nemotena tira dveh teles, zatem pa so s postopnim približevanjem upoštevali še vpliv tretjega telesa. Ta vpliv so imenovali motnja in ga izrazili v obliki matematične vrste s številnimi členi. Teoriji motenj so veliko prispevali Laplace, Lagrange, Clairaut, Euler in Gauss i drugi znanstveniki XX. stoletja.

3.1 Newtonovi zakoni mehanike

Zakone gibanja so ljudje spoznavali in formulirali dolga stoletja. Največkrat z njimi povezujemo imena Galilea Galileia, Isaaca Newtona in Alberta Einsteina. Najbolj znani so Newtonovi zakoni gibanja. V posplošeni obliki so še danes veljavni. Trije Newtonovi zakoni se glasijo:

- če na telo deluje sila, ali če je rezultanta vseh sil, ki učinkujejo na telo, enaka nič, se telo giblje enakomerno in premočrtno (poznamo še naslednjo definicijo: vsako telo težo ohraniti stanje mirovanja ali enoličnega premočrtnega gibanja. Omenjena stanja telo spremeni ob delovanju zunanjih sil na to telo).
- Pospešek telesa je premo sorazmeren s silo, ki učinkuje na telo in obratno sorazmeren z njegovo maso.
- Sili medsebojnega učinkovanja teles sta enako veliki, a nasprotno usmerjeni.

Prvi Newtonov zakon (zakon inercije – vztrajnosti), ki ga je poznal že Galilei, vključuje prikrito definicijo inercialnega referenčnega sistema (koordinatnega sistema) in zagotavlja, da obstajajo taki sistemi. Samo v inercialnem sistemu telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič.

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} / m \quad \text{ali} \quad \mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (2.1)$$

Drugi Newtonov zakon, zakon gibanja je znan kot osnovni zakon dinamike. Druga enačba (enačba desno) poda zakon v svoji izvorni obliki: sila je enaka produktu mase in pospeška. Pospešek telesa je pri dani sili tem manjši, čim večja je masa; torej je masa merilo za vztrajnost telesa proti spremembi hitrosti. Newton je pri formulaciji tega zakona uporabil drugo obliko. Namreč, pisal je o spremembi "gibanja", o pojmu, ki ga je poimenoval "količina gibanja" in definira kot produkt mase in hitrosti. Ta produkt tudi danes imenujemo gibalna količina ali krajše impulz \mathbf{G} ("linear momentum"). Zakon, torej lahko zapišemo v obliki:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{G} / dt \quad (2.2a)$$

vemo, da je $\mathbf{G} = m \mathbf{v}$

Z besedami: sila je enaka odvodu gibalne količine po času; je kvocient spremembe gibalne količine ($d\mathbf{G}$) in časovnega intervala (dt), v katerem se sprememba zgodi. Iz zgornje enačbe sledi:

$$d\mathbf{G} = \mathbf{F} dt \quad (2.2b)$$

Produkt sile in časovnega intervala, v katerem sila učinkuje, se imenuje sunek sile. Vidimo, da je sunek sile enak spremembi gibalne količine.

Tretji Newtonov zakon akcije in reakcije pravi, da je učinkovanje enega telesa na drugo telo s silo medsebojno. Ni mogoče, da bi eno telo delovalo na drugo, ne da bi obenem tudi drugo telo delovalo nazaj na prvo.

Newtonovi zakoni mehanike so osnovni zakoni mehanike. Mehanika, zgrajena na teh zakonih – Newtonova mehanika, je uspešna teorija. Njene napovedi se skladajo z izidi poskusov, če gre za telesa, ki se gibljejo z dovolj majhno hitrostjo.

3.1.1 Galilejevo načelo relativnosti in simetrijska načela

Newtonovi zakoni mehanike veljajo samo za inercialne referenčne sisteme. Lastnost inercialnega sistema je v tem, da na nobeno telo znotraj sistema ne deluje sila, čigar izvor bi bil v samem gibanju sistema – na sistem v celoti ne deluje nobena zunanja sila.

Za inercialne sisteme velja Galilejevo načelo relativnosti: za opazovalca v katerem koli inercialnem referenčnem sistemu veljajo enaki zakoni mehanike. Z enakimi zakoni ne mislimo, da imajo vse količine, ki nastopajo v njih, v vseh sistemih enake vrednosti. S tem mislimo samo, da imajo zakoni enako obliko.

Opazovalec v popolnoma zaprtem laboratoriju po mehaničnih pojavih ne more ugotoviti, ali se giblje premo enakomerno ali miruje. Vsi inercialni sistemi so enakovredni. Opazovalec v prvem sistemu sme trditi, da miruje in da se gibljejo drugi referenčni sistemi. Opazovalec v drugem sistemu sme z enako pravico trditi, da miruje on in da se giblje prvi referenčni sistem. Ni absolutnega inercialnega referenčnega sistema, ker ni poskusa, ki bi dal absolutno hitrost. Vsak opazovalec meri le relativno hitrost glede na svoj referenčni sistem.

Galilejevo načelo relativnosti štejemo med t.i. simetrijska načela, ki skupaj z zakoni mehanike tvorijo osnovne zakone narave. Za nas so pomembna tri geometrijska simetrijska načela. Načelo o homogenosti časa pravi, da dajo enako pripravljene merilne naprave v enem trenutku in v naslednjem trenutku enake rezultate, če se ne spremenijo zunanje okoliščine. To kaže, da veljajo enake zveze med količinami, na primer zakoni mehanike, v tem trenutku in v vsakem drugem trenutku. Morebitne spremenjene okoliščine upoštevamo s spremenjenimi podatki v zvezah. Po tej ugotovitvi lahko poljubno izberemo izhodišče časa.

Načelo o homogenosti prostora pravi, da dajo enako pripravljene merilne naprave v tej točki in v bližnji točki enake rezultate, če se ne spremenijo zunanje okoliščine. V Mariboru ali na Luni potekajo pojavi enako kot v Ljubljani, če so le bistvene fizikalne okoliščine enake. Morebitne spremenjene okoliščine upoštevamo s spremenjenimi podatki v zvezah. Med take moramo šteti na primer majhno razliko med težnim pospeškom v Mariboru in Ljubljani zaradi različne geografske širine in veliko razliko med težnim pospeškom na površini Zemlje in na površini Lune zaradi različnih mas in velikosti Zemlje ter Lune. Po tej ugotovitvi lahko poljubno izberemo izhodišče koordinatnega sistema.

Načelo o izotropnosti prostora pravi, da dajo enako pripravljene merilne naprave v tej smeri in nekoliko drugačni smeri enake rezultate, če se ne spremenijo zunanje okoliščine. To kaže, da veljajo enake zveze med količinami, na primer zakoni mehanike, v tej smeri in vseh drugih smereh. Morebitne spremenjene okoliščine upoštevamo s spremenjenimi podatki v zvezah. Med take moramo šteti na primer razliko med spodaj in zgoraj, ki je posledica dejstva, da smo na Zemlji. Po tej ugotovitvi lahko poljubno usmerimo osi koordinatnega sistema.

Tri simetrijska načela povedo na prvi pogled pravzaprav le to, kar pričakujemo. Če ne bi veljala, bi sploh težko opisovali in proučevali pojave v naravi. Iz simetrijskih načel sledijo zelo pomembni trije ohranitveni zakoni fizike. Ti so bistvenga pomena za naše proučevanje gibanja v nebesni mehaniki. Iz načela homogenosti časa sledi zakon o ohranitvi energije, iz načela homogenosti prostora sledi zakon o ohranitvi gibalne količine in iz načela o izotropnosti prostora zakon o ohranitvi vrtilne količine. Ohranitveni zakon ima takšno obliko: skupna polna energija ali gibalna količina ali vrtilna količina sistema teles, ki je popolnoma neodvisen od okolice, ostane nespremenjena.

3.2 Inercialni referenčni sistemi

Newtonovi zakoni klasične mehanike predpostavljajo obstoj inercialnih sistemov, vendar ne podajajo načina za njihovo izbiro v praksi. V Newtonovem času je prevladovalo mnenje, da zvezde ne spreminjajo svojega položaja, ter zato tvorijo inercialni sistem, ki je v stanju absolutnega mirovanja. Prevladovalo je prepričanje o obstoju *absolutnega prostora*, v katerem inercialni sistemi ali stojijo ali se enakomerno gibljejo. Specialna teorija relativnosti priznava obstoj inercialnih sistemov, vendar ne v absolutnem prostoru ampak v kontinuumu *prostor-čas*. Specialna teorija relativnosti velja v prostoru brez gravitacijskega polja (n.pr. štiridimenzionalnem prostoru, ki ga tvorijo dimenzije Evklidskega prostor ter čas). Splošna teorija relativnosti ne priznava obstoja inercialnih sistemov, torej stvari še nekoliko bolj zapleta.

Na vprašanje, ali je kak referenčni sistem inercialen ali ne, ni lahko odgovoriti. Po definiciji, na telo v inercialnem koordinatnem sistemu ne deluje sila, če je hitrost telesa konstantna. Pri tem moramo že imeti referenčni sistem, da lahko izmerimo hitrost. Po drugi strani, je pospešek enak nič, če je sila enaka nič. Z obema trditvama se torej nekako vrtimo v krogu. Tu pomaga eksperimentalna izkušnja, da sile med telesi zelo hitro pojemajo z naraščajočo razdaljo. Zato je sila drugih teles na telo, ki je zelo daleč od njih, v zelo dobrem približku enaka nič. Ta zahteva je izpolnjena v vesolju v razdalji več svetlobnih let od najbližje zvezde.

Meritve v astronomiji, astrodinamiki in satelitski geodeziji so omejene na prostor znotraj Sončevega sistema. To je prostor šibkega gravitacijskega polja in ga lahko obravnavamo kot lokalni inercialni sistem. Zato tu uporabljamo koordinatne sisteme, ki so toliko natančno inercialni, kolikor znamo to določiti z meritvami. Na primer: izračun meta kamna v bližnjo mlako je povsem zadovoljiv, če za izračun koordinat izberemo lokalni astronomski koordinatni sistem: izhodišče v opazovališču na površju Zemlje, Z -os navpičnica, X -os usmerjena proti sever, Y -os dopolnjuje sisteme v desnega. Po definiciji inercialnega koordinatnega sistema, ta sistem sigurno ni inercialen, ker Zemlja rotira. Kljub temu ne naredimo velike napake, če ga uporabimo kot da bi bil inercialen, kajti kamen preleti svojo pot od roke do mlake v tako kratkem času, da se pri običajni merski natančnosti ne pozna, da se je Zemlja medtem nekoliko zavrtela. Za umetne satelite, ki dneve in dneve krožijo okoli Zemlje, tega seveda ne moremo reči. Newtonov zakon moramo zapisati glede na mirujoč koordinatni sistem, ki se seveda vrti glede na Zemljo (orbitalni k.s.). Tako zapisane enačbe gibanja lahko pozneje po potrebi prevedemo v obliko, veljavno za koordinatni sistem, ki miruje glede na nas, torej za naš vrteči se koordinatni sistem (terestrični koordinatni sistem). Zapis Newtonovega zakona v vrtečih se in (ali) neenakomerno gibajočih se koordinatnih sistemih je manj pregleden in zahteva natančno poznavanje kotne hitrosti vrtenja koordinat in pospešek izhodišča glede na Vesolje (saj mirujoče zvezde). Enako velja za geodetske meritve v astronomiji oz. satelitski geodeziji. Torej koordinatni sistem je toliko natančno inercialen, kolikor znamo to določiti z meritvami. Vpliv specialne teorije relativnosti za sistem, ki se giblje z Zemljo znotraj Osončja je reda velikosti 10^{-8} , vpliv splošne teorije relativnosti pa reda velikosti 10^{-9} . Relativna natančnost 10^{-8} ustreza dolžini na površini Zemlje 6 cm, zato pri meritvah,

kjer želimo doseči to natančnost (10^{-8}) moramo upoštevati vplive specialne teorije relativnosti.

3.3 Kinematika masne točke

Gibanje nebesnih teles in umetnih zemljinih satelitov v prostoru predstavimo z gibanjem točkastega telesa. Gibanje točke v prostoru opazujemo seveda v nekem koordinatnem sistemu, recimo tridimenzionalnem kartezičnem, kjer smeri posameznih osi določajo enotski vektorji \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Trenutno lego točke P v prostoru običajno podamo s krajevnim vektorjem \mathbf{r} točke, ki vodi od koordinatnega izhodišča do točke:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (3.3)$$

pri čemer so x , y , z projekcije (komponente) krajevnega vektorja \mathbf{r} na posamezne koordinate osi. Gibanje točke pomeni, da se komponente spreminjajo s časom, torej je krajevni vektor \mathbf{r} funkcija časa $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$.

Gibajoča se točka opiše v prostoru krivuljo, ki ji pravimo tir (tirnica). Parameter te krivulje je seveda čas. V nekem poljubnem časovnem trenutku t se tir, hitrost in pospešek točke lahko predstavijo kot:

krajevni vektor položaja

$$\mathbf{r}(t)$$

vektor hitrosti

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.4)$$

vektor pospeška

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Vektorja hitrosti in pospeška lahko predstavimo na enak način kot krajevni vektor \mathbf{r} :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \quad (3.5)$$

Vektor \mathbf{v} podaja smer in hitrost gibanja točke. Pove kako hitro in v kateri smeri (v smeri tangente na tirnico) se točka giblje. Če se spreminja smer hitrosti, je gibanje krivočrtno, če se velikost hitrosti povečuje oz. zmanjšuje, je gibanje pospešeno oz. pojemajoče. Vemo, da je pospešek merilo za spremembo hitrosti v časovni enoti. Smer vektorja pospeška kaže smer spremembe hitrosti. Če želimo ugotoviti koliko se spreminja smer hitrosti, razstavimo pospešek na projekcijo na \mathbf{a}_t v smeri hitrosti v (smer tangente na tirnico) ter na projekcijo \mathbf{a}_r , ki je pravokotna na smer hitrosti:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r \quad (3.6)$$

Prvi je tangenti pospešek, drugi pa radialni pospešek. Tangenti pospešek \mathbf{a}_t je tisti del celotnega pospeška, zaradi katerega se spreminja velikost hitrosti (telo se pospešuje ali zavira). Po drugi strani pa se zaradi radialnega pospeška \mathbf{a}_r spreminja smer gibanja (tirnica se zakrivlja). Na ravnem delu tirnice ni radialnega pospeška:

$$\mathbf{a}_t = 0 \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_r$$

Drugače pa je radialni pospešek vedno usmerjen na notranjo stran zakrivljene tirnice.

Pri enakomernem kroženju (gibanje po krožnici s polmerom r s stalno obodno hitrostjo v) je radialni pospešek enak:

$$a_r = v\omega = v^2 / r = r\omega^2$$

Opomba: vektorsko se enačba predstavi $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$; znak minus pomeni, da vektor pospeška \mathbf{a} ima nasprotno smer, radij vektorju \mathbf{r} .

Gibanje teles v astrodinamiki se pogostokrat ponazori z gibanjem masne točke v ravnini. Ravninsko gibanje najlažje opišemo če zavrtimo kartezični koordinatni sistem tako, da dve osi (na primer osi X in Y) ležita v ravnini gibanja, koordinata z je pri temu vedno nič. Za še lažjo predstavitev si lahko pomagamo s polarnimi koordinatami: radij vektorjem \mathbf{r} in polarnim kotom θ (slika 3.1a). Radij vektor točke \mathbf{r} se lahko predstavi kot produkt razdalje r (skalar) in enotskega vektorja \mathbf{e}_r :

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (3.7)$$

Obravnavamo spremembo radij vektorja \mathbf{r} s časom. Ta lahko nastane zaradi spremembe razdalje r , zaradi spremembe smeri (sprememba polarnega kota θ), ter zaradi obeh sprememb hkrati.

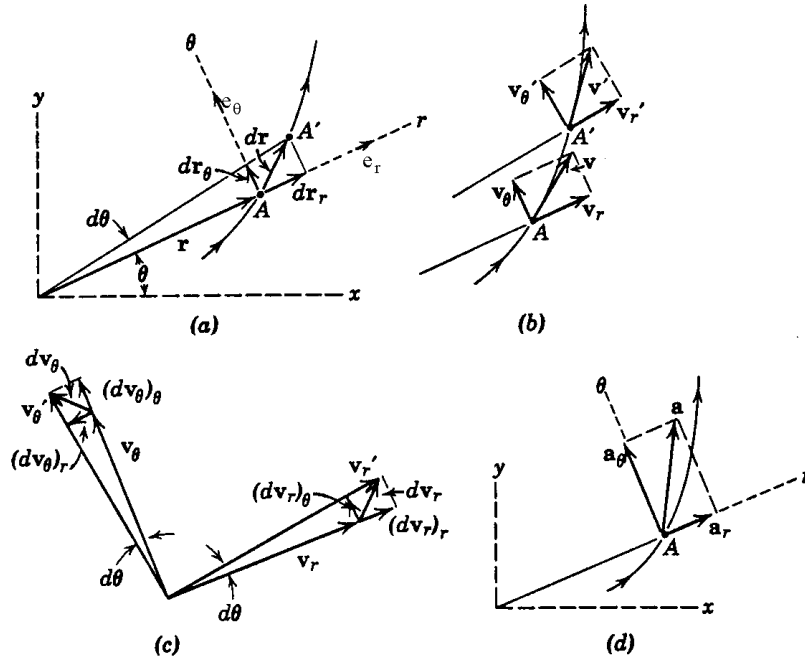
Diferencialno majhno spremembo vektorja \mathbf{r} med točkama A in A' $d\mathbf{r}$ (slika 3.1a) opišemo z dvema polarnima komponentama $d\mathbf{r} = dr_r + dr_\theta$. Radialna komponenta dr_r ima velikost dr , enako diferencialni spremembi dolžine vektorja \mathbf{r} . Prečna komponenta (transverzalna, pravokotna na smer radij vektorja \mathbf{r}) dr_θ ima velikost enako dolžini ustreznega diferencialno majhnega loka $r d\theta$. Če delimo s časom dt v katerem so nastale spremembe, dobimo komponente vektorja hitrosti \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad \mathbf{v}_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \quad (3.8)$$

Vidimo torej, da vektor hitrosti \mathbf{v} ima dve komponenti vzdolž osi koordinatnega sistema: radialno v_r in transverzalno (prečno) v_θ , ki sta določeni z enotskima vektorjema \mathbf{e}_r in \mathbf{e}_θ (slika 3.1b).

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (3.9)$$



slika 3.1: hitrost in pospešek v polarnih ravninskih koordinatah

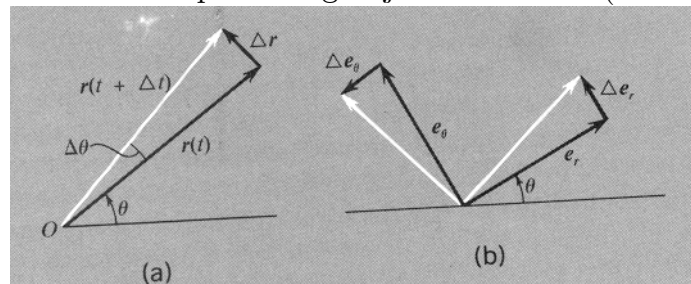
Do zgornjih enačb lahko pridemo tudi s pomočjo enotskih vektorjev e_r in e_θ . Oba se, s spremembo krajevnega vektorja r , spreminjata s časom. Hitrost dobimo z odvajanjem enačbe (3.7) po času t , pri čemer ima sprememba vektorja r smer enotskega vektorja e_θ , pravokotnemu e_r :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \quad (3.10)$$

Odvoda enotskih vektorjev e_r in e_θ po času sta enaka:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta \dot{\theta} \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \dot{\theta} \quad (3.11)$$

Znak minus v zgornji enačbi pomeni, da je smer odvoda e_θ v negativni r -smeri. Velikost vektorja e_r je po definiciji konstantna, vendar se njegova smer spreminja skladno s spremembo smeri vektorja r (v smeri prečne komponente). Tudi za drugo komponento velja: sprememba kota θ povzroča spremembo enotskega vektorja e_θ . Če je sprememba kota θ pozitivna, je potem sprememba e_θ v negativni smeri radialne komponente: $-\mathbf{e}_r$, kar smo že napisali v zgornji enačbi desno (slika 3.2.).



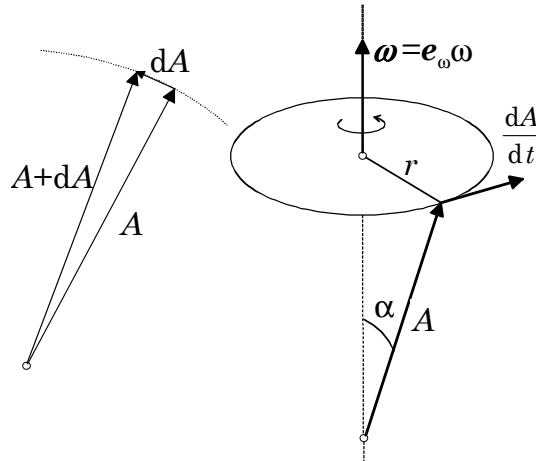
slika 3.2: sprememba enotskih vektorjev e_r in e_θ s časom

Zapomnimo se: časovni odvod enotskega vektorja pomeni spremembo njegove smeri (njegova velikost je konstantna) in je vedno pravokoten na vektor. Torej velja $\frac{d\mathbf{e}}{dt} \perp \mathbf{e}$.

Dokaz: s spremembo vektor ne spremeni svoje velikosti, torej velja $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$. Z odvajanjem dobimo:

$$d\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot d\mathbf{e} = 2\mathbf{e} \cdot d\mathbf{e} = 0$$

Ker je skalarni produkt dveh vektorjev nič sledi, da sta pravokotna.



slika 3.3: časovni odvod vektorja konstantne velikosti

Enako velja za katerikoli vektor konstantne velikosti. Sprememba vektorja s časom se lahko predstavi obliki:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\mathbf{A} + d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) - \mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

saj se sprememba vektorja \mathbf{A} za korak $d\mathbf{A}$ v času dt lahko predstavi kot del infinitezimalnega loka, ki ga konstantni vektor opravi v času dt (slika 3.3). Na sliki vidimo vektor \mathbf{A} , ki rotira okoli fiksne osi s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$. Odvod vektorja \mathbf{A} je obodna hitrost njegove konice. Velikost hitrosti znaša $r\omega$ in je pravokotna in na vektor \mathbf{A} in na vektor $\boldsymbol{\omega}$. Torej je časovni odvod $d\mathbf{A}/dt$ enak vektorskemu produktu $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$, (ta ima enako smer in velikost $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}| = \omega \text{Asin}\alpha$ – saj je oddaljenost od osi kroženja $r = \text{Asin}\alpha$).

Transverzalna komponenta hitrosti je sorazmerno enaka kotni hitrosti ω (kot, ki ga radij vektor opiše v časovni enoti), saj velja: $\omega = d\theta/dt$. Pri gibanju po krožnici, kjer je radij stalen $r = \text{const}$, velja:

$$\mathbf{v} = \omega r \mathbf{e}_\theta = v \mathbf{e}_\theta$$

Pospešek dobimo z odvajanjem enačbe (3.9) po času:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{e}_r \dot{r} + e_r \ddot{r} + \dot{e}_\theta r \dot{\theta} + e_\theta r \ddot{\theta} + \dot{r} \ddot{\theta} e_\theta \quad (3.12)$$

Z zamenjavo vrednosti odvodov enotskih vektorjev (3.11) dobimo končni izraz za pospešek:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (3.13a)$$

Enako kot za hitrost, vsebuje vektor pospeška dve komponenti: \mathbf{e}_r in \mathbf{e}_θ (slika 3.1d):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{a}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Pri enakomernem kroženju ima telo samo radialni pospešek \mathbf{a}_r , ta pa ima smer k središču kroženja.

3.3.1 Gibanje točke v polju centralne sile

V splošnem se gibanje neke točke odvija v prostoru. Gibanje teles v nebesni mehaniki je posledica medsebojnega učinkovanja gravitacijske sile med njima. Zemlja vpliva na gibanje satelita (oz. Sonce vpliva na gibanje planetov) tako, kot da bi bila njena snov zbrana v središču, kot da bi gravitacijska sila učinkovala iz središča Zemlje.

Gravitacijska sila spada v t.i. centralne sile – sile, ki so usmerjene proti določeni stalni točki prostora (med te spada tudi na primer električna, Coulombova sila). Polje centralnih sil ima to lastnost, da je konservativno in sferno simetrično t.j. velikost centralne sile je odvisna samo od oddaljenosti (r) materialne točke od središča delovanja sile in ne od smeri. Lastnost sferne simetrije je neposredna posledica načela o izotropnosti prostora.

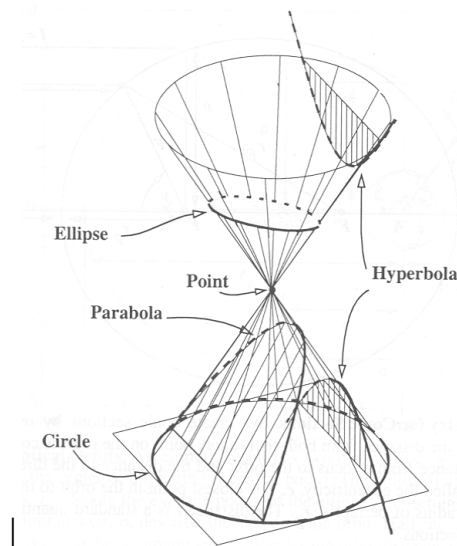
Delo konservativne sile je na zaključeni poti nič. Delo konservativne sile je torej odvisno samo od začetne in končne lege, ne pa od oblike poti. Vektorska polja konservativnih sil imenujemo tudi potencialna polja. Tem poljem lahko priredimo skalarno funkcijo – potencial.

Če je masna točka podvržena delovanju centralne sile, ima vektor delujoče sile \mathbf{F} samo eno komponento, F_r . To lahko napišemo kot funkcijo razdalje (r) od središča delovanja sile:

$$F_r = f(r) \quad (3.14)$$

3.4 Stožnice

Po prvem Keplerjevem zakonu je tirnica planeta pri gibanju okoli Sonca elipsa. Elipsa sodi med t.i. stožnice, krivulje 2. reda, ki jih dobimo kot presečišče ravnine in pokončnega stožca (slika 3.4).



slika 3.4: stožnice

Slika nam v splošnem ponazarja nastanek stožnic. Prve štiri stožnice (krog, elipsa, parabola in hiperbola) so lahko tirnice satelitov v polju gravitacijske (centralne sile). Točka in presek dveh stožcev ne sodita med realne tirnice. Obstajajo še ti. premočrtne tirnice, ki pa so poseben primer eliptičnega, paraboličnega oz. hiperboličnega gibanja. Uporabljamo jih za upodobitev posameznih odsekov tirnic kometov, odsekov tirnic pri spremembah tirnic vesoljskih sond in satelitov ter poletov vojaških projektilov.

V satelitski geodeziji oz. astrodinamiki sovpada gravitacijsko središče z enim goriščem stožnice. Imenuje se primarno gorišče ("primary focus"). Slika 3.6 ponazarja dve različni gorišči pri elipsi, slika 3.7 pa podaja poseben primer stožnic pri krogu, kjer obe gorišči sovpadata. Hiperbola ima dve veji priključeni vsakemu gorišču (slika 3.8). Obe tirnici sta "odprti", saj se satelit ne vrača ponovno v isti položaj. Zaprte tirnice ("closed orbits") so tiste, kjer satelit satelit čez nekaj časa ponovno pride v izhodiščni položaj (ponovi svojo tirnico).

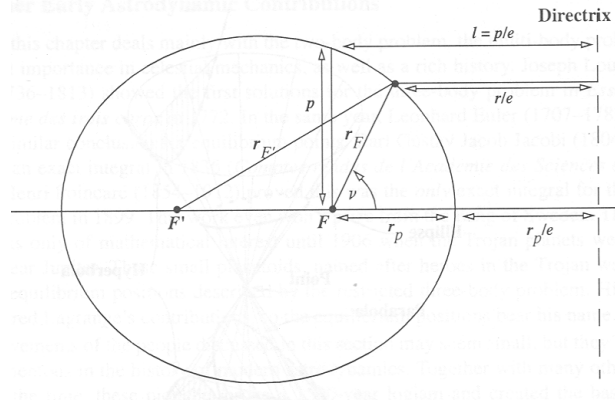
3.4.1 Geometrija stožnic

Velikost stožnic je določena z veliko in malo osjo, ter razdaljo med gorišči. V praksi se podajajo polovici teh razdalj; velika polos (a), mala polos (b) in polovica razdalje med gorišči (c). Velika polos je pozitivna pri elipsi in krogu, neskončna pri paraboli ter negativna pri hiperboli. Vsem stožnicam je značilna numerična ekscentricita e , parameter, ki določa njihovo obliko ("okroglost" z. "ploskost"). Enak je $e = \frac{c}{a}$. Velja:

numerična ekscentriciteta (e)	Vrsta stožnice
$0 < e < 1$	elipsa
$e = 0$	krog
$e > 1$	hiperbola
$e = 1$	parabola

Numerična ekscentriciteta je parameter stožnice, ki določa njeno obliko ("okroglost" z. "ploskost"). Je vedno pozitivna. V uporabi je tudi sploščenost:

$$f = \frac{a - b}{a}.$$



slika 3.5: geometrija stožnic

Vse točke na stožnici imajo to lastnost, da je vsota razdalj od obeh gorišč stalna:

$$r_{F'} + r_F = \text{konst.} = 2a$$

Velja tudi:

$$|r_{F'} - r_F| = \text{konst.} = 2c$$

Parameter c je znan kot linearna ekscentriciteta $c = ae$, enak je oddaljenosti gorišča od središča elipse oz. kot je omenjeno zgoraj je enaka polovici razdalje med gorišči.

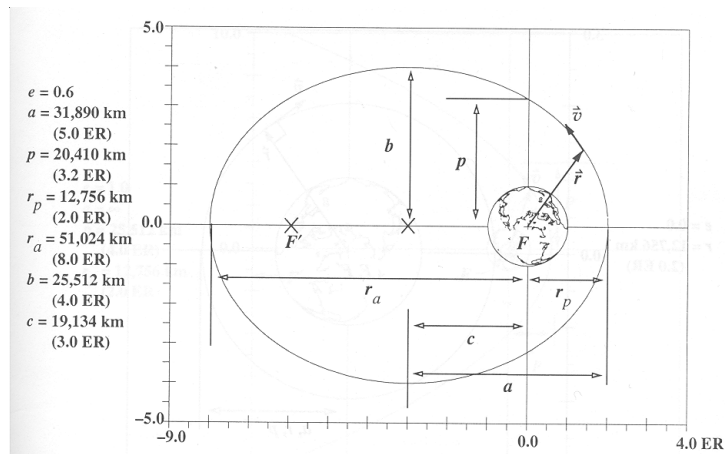
Vodilki (direktrisi) elipse sta premici, vzporedni mali osi elipse in od nje oddaljeni za:

$$l = p / e$$

Goriščni parameter elipse ("semi-latus rectum") p je oddaljenost točke na tirnici od primarnega gorišča. Računamo ga pravokotno na veliko os. Igra pomembno vlogo pri paraboličnih tirnicah, kjer je vrednost velike polosi neskončna. Med zgoraj naštetimi elementi obstajajo naslednje zveze:

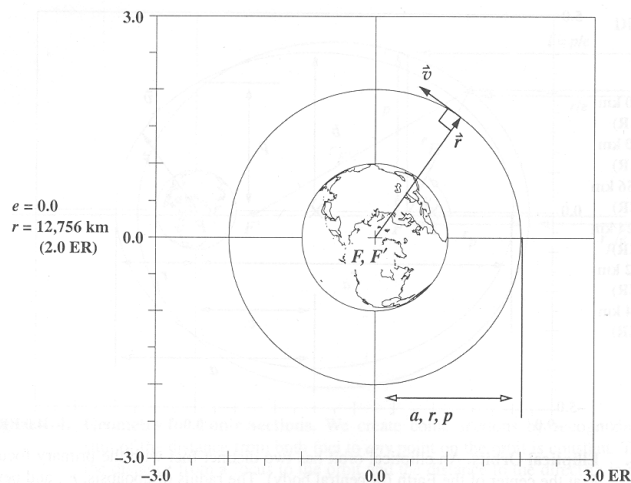
$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad a = \frac{p}{1 - e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Slika 3.6 podaja elemente eliptične tirnice.



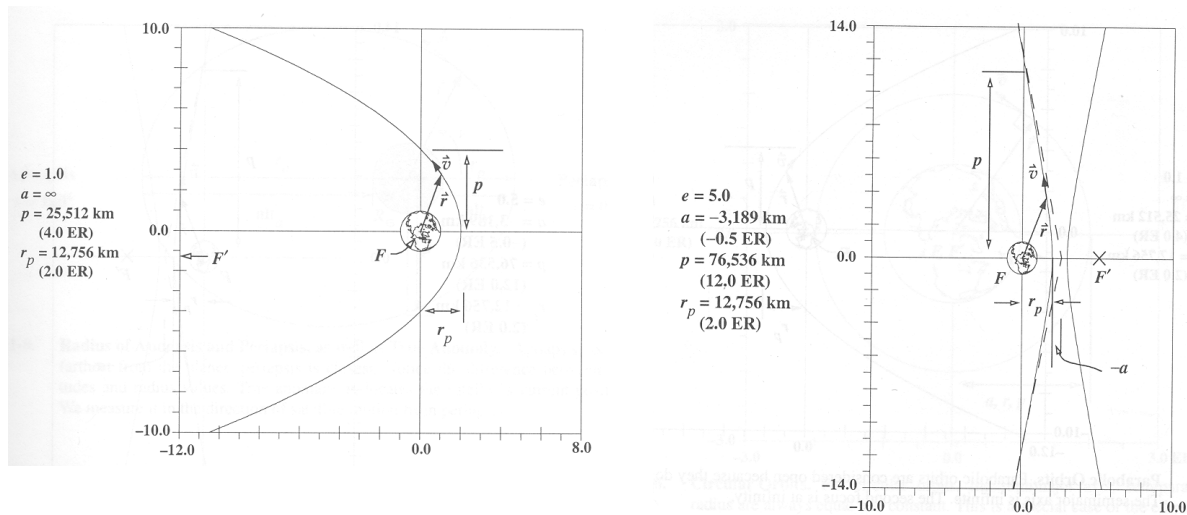
Slika 3.6: eliptična tirnica

Ekstremni točki na eliptični tirnici sta *apocenter* ("apoapsis") in *pericenter* ("periapsis"). Apocenter je najbolj oddaljena točka tirnice od gorišča, dočim je pericenter najbližja točka. V primeru umetnih Zemljinih satelitov sta apocenter in pericenter *apogej* in *perigej*. Krajevna vektorja, ki ustrezata tem točkam sta r_a in r_p .



Slika 3.7: krožna tirnica

Slika 3.9 podaja geometrijo paraboličnih in hiperboličnih tirnic.



Slika 3.8: parabolična in hiperbolična tirnica

Na koncu podajmo še polarno enačbo stožnice, pri čemer sta polarni koordinati r in kot v . V primeru gibanja satelita po stožnici sta koordinati krajevni vektor r in kot v (prava anomalija):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (3.15)$$

4 Problem dveh teles

Gibanje satelitov v gravitacijskem polju Zemlje je podvrženo določenim zakonitostima.

Gibanje umetnih zemljinih satelitov v gravitacijskem polju Zemlje določamo najlažje z reševanjem t.i. *problema dveh teles*.

Problem dveh teles je gibanje dveh nebesnih teles, ki se medsebojno privlačita po gravitacijskem zakonu. V primeru umetnih zemljinih satelitov je ta zanemarljivo majhne mase glede na Zemljo.

V splošni obliki je naloga reševanja problema dveh teles naslednja:

"V dveh časovnih trenutkih sta podani položaj in hitrost dveh teles, ki se gibljeta v polju medsebojnega privlačenja. Mase teh teles sta znani. Izračunati je potrebno položaj in hitrost v poljubnem časovnem trenutku."

Gibanje satelitov obravnavamo kot nemoteno oz. Keplerjevo gibanje. Pri tem smo uvedli naslednje pretpostavke:

- Zemlja je krogla, sestavljena iz homogenih, koncentričnih lupin (to pomeni, da je njeno gravitacijsko polje radialno simetrično); enako je, če Zemljo obravnavamo kot masno točko;
- masa satelita je zanemarljivo majhna glede mase Zemlje;
- Zemlja nima atmosfere;
- pri gibanju satelitov ne upoštevamo privlačnega učinka Lune in Sonca, oz. dodatnih vplivov okolice.

Tako se obravnava gibanja satelita spremeni v obravnavo gibanja točke v polju centralne sile. Nekateri pojmujejo določitev tega gibanja tudi kot problem enega telesa.

Obravnavajmo sedaj satelit mase m in Zemljo mase M . Njihov položaj je, glede na izhodišče inercialnega referenčnega sistema, določen z krajevnima vektorjema \mathbf{r}_1 , in \mathbf{r}_2 (slika 4.1). Med njima deluje gravitacijska sila. Njena velikost je po Newtonovem zakonu splošne gravitacije:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (4.1)$$

Delujoča sila je samo funkcija relativne razdalje (r) med njima in je usmerjena vzdolž veznice obeh teles. Torej jo lahko prikažemo kot produkt velikosti sile in enotskega vektorja:

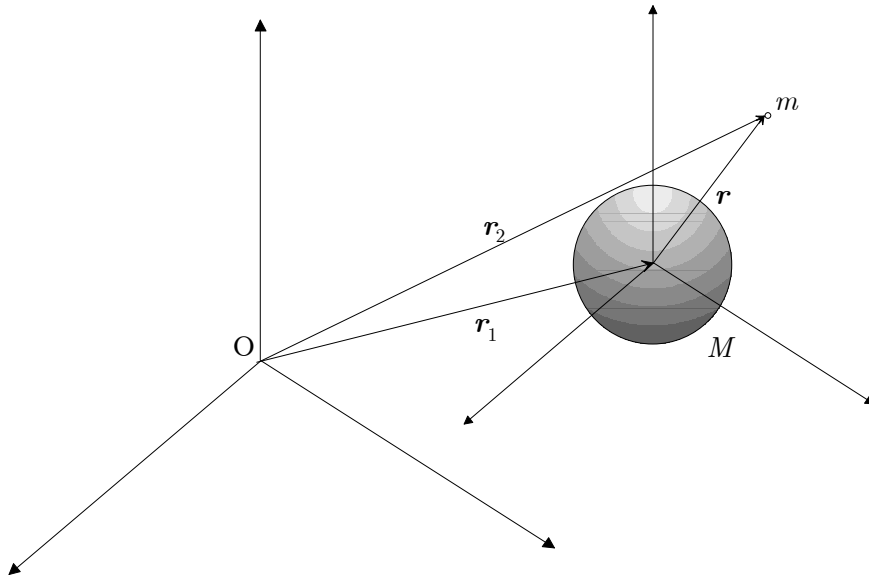
$$\mathbf{F} = F \mathbf{r}_e \quad (4.2)$$

kjer so $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ in enotski vektor \mathbf{r}_e :

$$\mathbf{r}_e = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.3)$$

Uporabimo II. Newtonov zakon gibanja za satelit (m):

$$-\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (4.4)$$



slika 4.1: geometrija problema dveh teles

Za Zemljo (M) uporabimo hkrati II. i III. Newtonov zakon:

$$\mathbf{F} = M \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (4.5)$$

Diferencialno enačbo gibanja satelita m glede na Zemljo M , dobimo če (4.5) odštejemo od (4.4) in delimo z njunima masama:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{1}{M} \mathbf{F} - \frac{1}{m} \mathbf{F} \quad (4.6)$$

Z uporabo enačbe (4.2) dobimo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \mathbf{F} \mathbf{r}_e \quad (4.7)$$

V klasični mehaniki se naslednji kvocient imenuje reducirana masa:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{m} = \frac{M+m}{Mm}$$

Za satelit in Zemljo pa hkrati velja Newtonov gravitacijski zakon, torej če v enačbi (4.7) uporabimo velikost sile (gravitacijske sile, enačba 4.1), dobimo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{M+m}{Mm} G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_e$$

Če enotski vektor izrazimo prek relativne razdalje r med satelitom in Zemljo, dobimo končno diferencialno enačbo gibanja:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M + m}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.8)$$

Masa satelita je zanemarljivo majhna glede na maso Zemlje $m \ll M$, torej jo v zgornji enačbi lahko brez zadržkov izpustimo. Končno dobimo enačbo gibanja za satelit:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.9a)$$

V praksi je \mathbf{r} geocentrični krajevni vektor satelita; to pomeni, da smo izhodišče inercialnega koordinatnega sistema s slike 4.1 prestavili v središče Zemlje.

Produkt mase Zemlje M (v astronomiji in astrodinamiki imajo parametri vsakega objekta Osončja svojo oznako; npr. masa Zemlje M) in gravitacijske konstante G imenujemo geocentrična gravitacijska konstanta μ . Pogosto srečamo tudi oznako μ . Zgornjo enačbo potem pogosto pišemo v obliki:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (4.9b)$$

To je vektorska diferencialna enačba drugega reda. Za rešitev sistema šestih enačb je potrebno poznati 6 integracijskih konstant, ki določajo gibanje satelita okoli Zemlje. Z drugimi besedami, potrebno je poznati položaj in hitrost satelita v nekem poljubnem (začetnem) časovnem trenutku.

V jeziku mehanike zgornja enačba pravi, da ima gibanje satelita (nebesnega telesa) glede na drugo centralno telo v polju delujočih gravitacijskih sil šest prostostnih stopenj. Kot bomo videli kasneje je to 6 elementov satelitovega tira ali t.i. Keplerjeve elipse.

4.2 Konstante gibanja – ohranitveni zakoni

Preden poiščemo rešitev enačbe gibanja (4.9) v obliki satelitove tirnice, podajmo nekaj koristnih lastnosti orbitalnega gibanja satelita. Gravitacijsko polje Zemlje kot polje centralne sile je konservativno, torej gibajoči se satelit ne izgublja in ne pridobiva mehanske energije. Prihaja samo do spreminjanja oblik energije, kinetične v potencialno in obratno.

Znano je, da pri rotacijskem gibanju nekega telesa okoli nekega središča spremembo vrtilne količine povzroča tangenta komponenta sile. Gravitacijska sila, je kot centralna sila usmerjena proti središču privlačanja, torej je za pričakovati, da se pri gibanju satelita ohranja tudi vrtilna količina satelita.

Ohranitveni zakoni mehanske energije in vrtilne količine satelita sledijo neposredno iz simetrijskih načel (poglavje 3.1.1). V primeru planetnega oz. satelitskega gibanja gre za izoliran sistem – neodvisen od okolice. Na sistem ne deluje nobena zunanja sila. Na gibanje satelita deluje le polje konservativne gravitacijske sile.

4.2.1 Ohranitev mehanske energije

Enačbo gibanja (4.9) skalarno pomnožimo z $\dot{\mathbf{r}}$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad / \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

Levi člen je enak:

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Pri razvoju desnega člena uporabimo enakosti:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2, \quad \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} \quad \text{ter} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

kar nam da:

$$\mu \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} = \mu \frac{r\dot{r}}{r^3} = \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

In levo in desno stran smo napisali v obliki čsovnih odvodov: Končno sledi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

oz.

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E_M \quad \text{konstanta} \quad (4.10)$$

Konstanto E imenujemo specifična mehanska energija sistema (specifična ker govorimo o enotski masi). Gre seveda za kinetično energijo satelita in potencialno energijo sistema (kinetično energijo Zemlje pri tem zanemarimo)*. Izraz 4.10 je hkrati izraz za ohranitev specifične mehanske energije sistema, saj je ta enaka v vseh točkah satelitove tirnice.

*Izraz za energijo sistema se dejansko glasi:

$$\frac{v^2}{2} + \left(c - \frac{\mu}{r} \right) = E_M$$

Člen v oklepajih vsebuje poljubno konstanto c , katere vrednost je odvisna od izbire ničelnega referenčnega nivoja potencialne energije. Z drugimi besedami, nas zanima v kateri točki prostora je potencialna energija sistema enaka nič. To pa je lahko povsem poljubno. Od prej smo navajeni, da potencialna energija z višino narašča (ničelna referenčna raven je površje Zemlje). V primeru gibanja satelita lahko ravnamo povsem enako, torej konstanta c je lahko enaka 0. S tem smo za ničelno referenčno raven izbrali točko v neskončnosti. Pomankljivo je samo to, da bo s tem potencialna energija satelita ($-\mu/r$) vedno negativna.

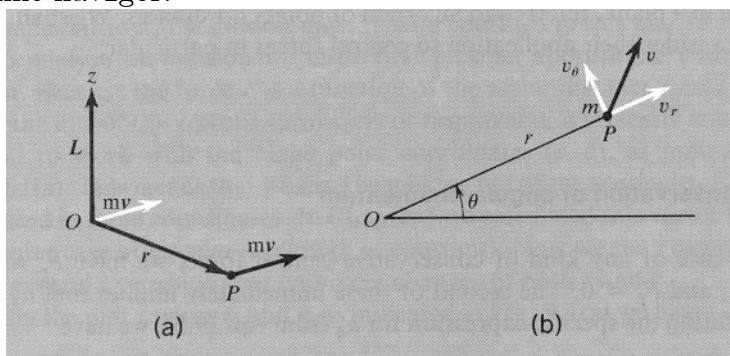
Specifična mehanska energija satelita (oz. telesa) v polju centralne sile je v odvisnosti od hitrosti tega lahko pozitivna, negativna ali pa celo nič. Energijski ohranitveni zakon nam pomaga dokazati prvi Keplerjev zakon, ki pravi, da so tirnice planetov elipse.

4.2.2 Ohranitev vrtilne količine

Satelit, ki kroži okoli Zemlje na razdalji krajevnega vektorja \mathbf{r} ima vrtilno količino \mathbf{L} ("angular momentum"):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{G} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

Velikost vektorja \mathbf{L} je enaka $L = r m v \sin\theta$, kjer je θ kot med vektorjema \mathbf{r} in \mathbf{G} oz. \mathbf{v} . Na sliki 4.2a vidimo, da je vektor \mathbf{L} pravokoten na ravnino, določeno z vektorjema \mathbf{r} in \mathbf{v} . V primeru ravninskega gibanja in uporabe polarnih koordinat, je velikost vektorja \mathbf{L} enaka: $L = m r v_\theta$ (slika 4.2 b). V tem primeru kaže vektor \mathbf{L} pravokotno od slike navzgor.



slika 4.2: vektor vrtilne količine \mathbf{L}

Kot med komponento v_r in \mathbf{r} je nič; komponenta v_θ pa je pravokotna na radij vektor \mathbf{r} ($\sin 90^\circ = 1$). Če vstavimo vrednost komponente v_θ (enačba 3.8, $v_\theta = r\dot{\theta}$) dobimo velikost vrtilne količine:

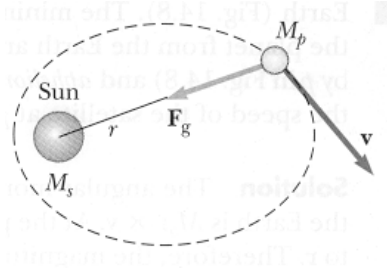
$$L = m r^2 d\theta/dt \quad (4.11)$$

V izpeljavi enačb gibanja satelitov se uporablja t.i. specifična vrtilna količina satelita (h ali H). Gre za vrtilno količino na enoto mase. Torej velja:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{h} \quad (4.12)$$

Navor gravitacijske sile \mathbf{M} ("torque"), ki učinkuje na satelit je nič; smer njenega delovanja je vzporedna krajevnemu vektorju \mathbf{r} (smeri sovpadata); koordinatno izhodišče je v težišču Zemlje (slika 4.3).

Navor sile je vektorski produkt sile \mathbf{F} in (njene ročice) - krajevnega vektorja \mathbf{r} .



slika 4.3: smer delovanja gravitacijske sile

Če je navor nič pomeni, da je vrtilna količina satelita konstantna, saj je navor enak:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

Zgornji izraz lahko napišemo v obliki:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{G}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{G}) - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{G}\right) \\ \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{G} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{G}}{dt}\right] \end{aligned}$$

ker je $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ (hitrost) izpade zadnji člen, saj je vektorski produkt dveh (paralelnih) kolinearnih vektorjev nič. Ker je $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{G}$, sledi:

$$\mathbf{M} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{G})}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{oz.} \quad \mathbf{L} = \text{const} \quad (4.13)$$

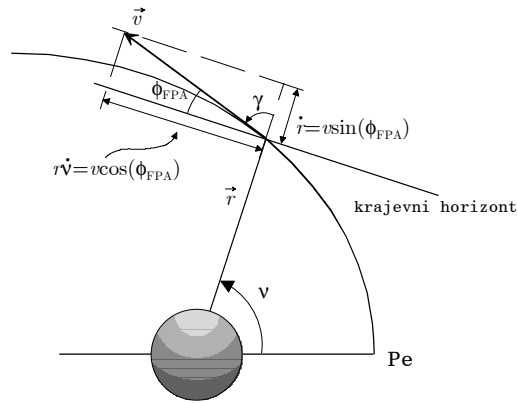
Navor je torej enak časovni spremembi vrtilne količine. Ker je navor gravitacijske sile nič, je njena sprememba v času konstantna. Ker se vrtilna količina tekom gibanja ohranja pomeni, da je satelitova tirnica omejena na ravnino, določeno z vektorjima \mathbf{r} in \mathbf{v} . Torej, pri kroženju satelita se ohranja ravnina v kateri leži tirnica.

Ohranitveni zakon za vrtilno količino nam pomaga dokazati drugi Keplerjev zakon.

Velikost vektorja vrtilne količine h , je možno izračunati tudi iz definicije vektorskega produkta (slika 4.4):

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = rv \sin\gamma$$

V astrodinamiki se zelo pogosto uporablja komplementaren kot ϕ_{FPA} , ki se imenuje kot letenja ("flight path angle"). To je kot med vektorjem hitrosti in krajevnim horizontom satelita (letala, vesoljskega plovila). Ta je vedno pravokoten na vektor hitrosti, slika 4.4.

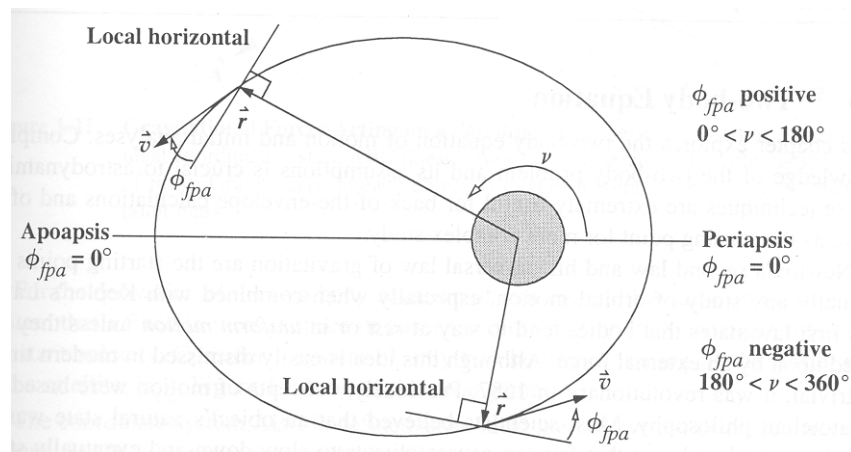


slika 4.4: kot letenja

Za vrtilno količino torej sledi:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = rv \cos \phi_{FPA} \quad (4.14)$$

Predznak kota ϕ_{FPA} je enak predznaku produkta $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$. Geometrijo kota letenja podaja slika 4.5. Kot ν na sliki je prava anomalija, ki jo bomo vpeljali v poglavju 5.1 (popolnoma ustreza kotu θ , ki smo ga obravnavali v poglavju 3.3).



slika 4.5: geometrija kota letenja

V perigeju in apogeju je kot letenja enak 0° in sta vrednosti vrtilne količine v teh točkah:

$$h = r_a v_a \quad (4.15)$$

$$h = r_p v_p$$

Vrednost vrtilne količine dobimo lahko tudi prek komponent vektorja hitrosti v polarnih koordinatah (poglavje 3.3). Tega tvorijo radialna komponenta in transverzalna komponenta (enačba 3.9, pri čemer smo kot θ zamenjali s kotom ν):

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\nu} \mathbf{e}_\nu$$

Prečna komponenta vektorja hitrosti je iz geometrije kota letenja hkrati enaka (slika 4.4):

$$r\dot{\mathbf{v}} = v \cos \phi_{FPA}$$

Torej je kosinus kota letenja enak:

$$\cos \phi_{FPA} = \frac{r\dot{\mathbf{v}}}{v}$$

To zamenjamo v enačbo 4.14, kar nam da vrednost vrtilne količine:

$$h = r^2\dot{\mathbf{v}} \quad (4.16)$$

Vrednost vrtilne količine lahko izračunamo tudi prek goriščnega parametra elipse p . To bo očitno v naslednjem poglavju, ko bomo izpeljali enačbo satelitove tirnice.

4.3 Oblika tirnice – prvi Keplerjev zakon

Čeprav je diferencialna enačba gibanja 4.9 relativno enostavna, žal njene rešitve niso. Delno rešitev, ki nam poda enačbo krivulje po kateri se satelit giblje ni težko izpeljati. Mnogo težja je rešitev, ki nam pove kako se giblje satelit po tirnici v odvisnosti od časa.

Enačbo gibanja pomnožimo vektorski z vektorjem vrtilne količine:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{h}) \quad \text{oz.} \quad \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{\mu}{r^3}(\mathbf{h} \times \mathbf{r}) \quad (4.17)$$

Leva stran se lahko napiše:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) - (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}})$$

Vrtilna količina \mathbf{h} je konstanten vektor, torej je vektorski produkt hitrosti in vrtilen količine nič. Ostane samo:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})$$

Desno stran tudi želimo razviti v obliki časovnega odvoda neke vektorske količine:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} = \frac{\mu}{r^3}((\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r})$$

Uporabimo vektorsko enakost:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$$

in dobimo:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} = \frac{\mu}{r^3} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}]$$

Za izraze v oklepaju uporabimo že znane vektorske enakosti (glej 4.2.1):

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 \quad \text{in} \quad \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$$

kar nam da:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} [r^2 \mathbf{r} - (r\dot{r})\mathbf{r}]$$

Če zmnožimo do konca:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} = \mu \left[\frac{r^2}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\dot{r}r}{r^3} \mathbf{r} \right] = \mu \left[\frac{1}{r} \mathbf{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} \right]$$

Odvod enotskega vektorja je lahko podan kot:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r}$$

Torej je izraz v srednjih oklepajih enak odvodu enotskega vektorja. Končno je desna stran enaka:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

Če združimo levo in desno stran:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

Integrirajmo levo in desno stran (glede na čas):

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \mathbf{B} \tag{4.18}$$

pri čemer je \mathbf{B} integracijska konstanta (v obliki vektorja). Konstantno izračunamo iz začetnih pogojev za položaj in hitrost satelita. Vektor \mathbf{B} je pravokoten na vektorja vrtilne količine in hitrosti in leži v ravnini tirnice (sovpada z apsidno linijo). Kot med njim in radij vektorjem satelita \mathbf{r} je prava anomalija .

Zgornjo enačbo skalarno pomnožimo s krajevnim vektorjem \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$$

Uporabimo vektorski enakosti: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ in $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$

in dobimo skalarno enačbo oblike:

$$h^2 = \mu r + rB \cos \nu$$

kjer je ν kot med Laplaceovim vektorjem \mathbf{B} in krajevnim vektorjem \mathbf{r} (sliki 4.4 in 4.5). Rešimo enačbo po r :

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \nu} \quad (4.19)$$

Zgornja enačba je enačba tirnice v polarnih koordinatah, kjer sta polarni koordinati krajevni vektor r in polarni kot ν (merimo ga od nepremičnega vektorja \mathbf{B} do premičnega vektorja \mathbf{r}).

Da bi videli katero krivuljo predstavlja enačba 4.19, prikličimo splošno enačbo stožnic v polarnih koordinatah (enačba 3.15):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (4.20)$$

Koordinatno izhodišče je v enem izmed gorišč (slika 4.7). Polarni kot merimo od točke na stožnici, ki je najbližja gorišču do krajevnega vektorja \mathbf{r} . Enačba 4.18 je identična enačbi tirnice, ki smo jo izpeljali - 4.19. Parameter p v enačbi 4.18 je geometrijska konstanta vseh stožnic ti. goriščni parameter (latinsko "semi latus rectum; glej poglavje 3.4.1), konstanta e pa nam je dobro znana numerična ekscentriciteta stožnic, ki določa vrsto stožnic (tabela iz poglavja 3.4.1).

4.3.1 Laplaceov vektor

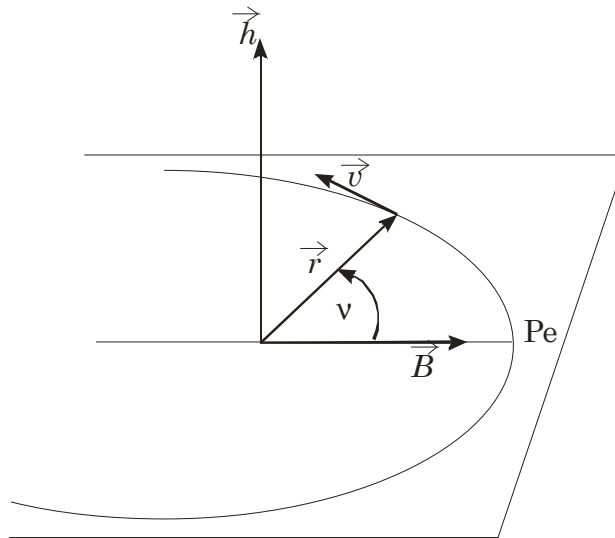
V prejšnjem poglavju, kjer smo izpeljevali obliko tirnice satelita smo se srečali z integracijsko konstanto - vektorjem \mathbf{B} . Konstanta \mathbf{B} je t.i. Laplaceov vektor, ali pa vektor ekscentricitete v literaturi znan kot Laplace-Runge-Lenz vektor. Vektor \mathbf{B} je pravokoten na vektor vrtilne količine in leži v ravnini tirnice (sovpada z apsidno linijo) in je usmerjen proti pericentru (perigeju). Iz primerjave enačb 4.19 in 4.20 sledi, da je $B = \mu e$. Vektor ekscentricitete \mathbf{e} tudi kaže proti perigeju in je enak:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (4.21)$$

Vektor \mathbf{e} igra pomembno vlogo pri določitvi elementov tirnice satelita.

Laplaceov vektor lahko dobimo iz enačbe 4.18:

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.22)$$



slika 4.6: geometrija značilnih vektorjev na tirnici

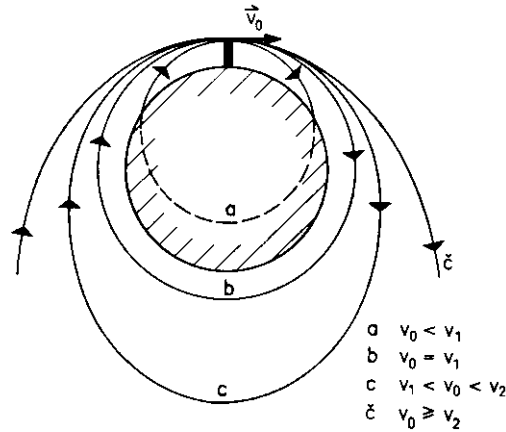
4.3.2 Zveza med energijo in obliko tirnice

S primerjavo enačb 4.19 in 4.20 je očitno, da se vrtilna količina satelita lahko izračuna tudi prek goriščnega parametra p in torej velja:

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\mu p} \quad (4.23)$$

Pogljemo kako prirastek v vrtilni količini satelita vpliva na spremembo oblik tirnice. Zamislimo, da smo na vrhu zelo visoke gore, kjer lahko celo zanemarimo vpliv atmosferskega trenja. S tega mesta izstrelimo telo z začetno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri. Torej je kot letenja 0° in skladno z enačbo 4.14 je vrednost vrtilne količine enaka $h = rv$. Z večanjem začetne hitrosti se povečuje tudi vrtilna količina telesa. Ta pade na tla tem dlje od vrha gore, s čim večjo hitrostjo ga izstrelimo. Na telo učinkuje gravitacijska sila Zemlje in to tako, kot da bi bila njena snov zbrana v središču (centralna sila). Oddaljenost telesa od središča Zemlje je: $r = R + h$.

Skrajnji oddaljenosti telesa od središča Zemlje sta: $r_1 = 2a - r$; $r_2 = r$. Če je $r < a$, je r_1 največja, r_2 pa najmanjša oddaljenost. Če pa je $r > a$, velja obratno, r_1 je najmanjša in r_2 pa največja oddaljenost od središča Zemlje. Dokler so začetne hitrosti majhne velja drugo in je $r_1 < r$ in telo se slej ko prej zaleti v Zemlje (čeprav naj bi se gibalo po elipsi), (slika 4.7).



slika 4.7: oblika tirnice v odvisnosti od začetne hitrosti

Če začetno hitrost povečujemo, se bo telo v enem trenutku vrnilo iz nasprotne smeri do izhodnega mesta na gori. Takrat se izenačita r in a , tj. $r = a$. Pri $v_0 = v_1$ se tirnica zaokroži v krog. Telo kroži okoli Zemlje po krožnici s polmerom r , ki je večji od polmera Zemlje. Hitrost, ki je potrebna da bi telo krožilo okoli Zemlje na razdalji r , dobimo lahko iz enačbe 4.14, če vemo, da je za krog $a = r = p$ (kot letenja je enak $\Phi_{\text{FPA}} = 0^\circ$):

$$h^2 = p\mu \quad p = r \quad r^2 v^2 = r\mu$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$

Za vrednost $r = R$ dobimo izraz za t.i, prvo kozmično (ubežno) hitrost, $v = v_1$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R_\oplus}} \quad (4.24)$$

Prva kozmična hitrost ($v_1 = 7,9 \text{ km/s}$) je tista najmanjša vodoravna hitrost, ki jo mora imeti telo (satelit) na nadmorski višini $h = 0$, da ne pade na Zemljo, ampak stalno kroži okoli nje.

Zanima nas še zveza med velikostjo vrtilne količine, goriščnega parametra in celotne mehanske energije sistema Zemlja - satelit. V apogeju in perigeju je kot letenja nič in velja (enačba 4.15): $h = r_a v_a$ in $h = r_p v_p$. Poiščimo kolika je energija v perigeju:

$$E_M = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h^2}{2r_p^2} - \frac{\mu}{r_p}$$

V perigeju je tudi velikost krajevnega vektorja r minimalna:

$$r_{\min} = r_{\text{perigej}} = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

pri čemer je vrednost polarnega kota nič (saj polarne kote štejemo od apsidne linije). Torej:

$$= r_{\text{perigej}} = \frac{p}{1 + e \cos 0^\circ} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \quad (4.25a)$$

Enako velja za apogej, kjer je krajevni vektor satelita največji:

$$r_{\text{max}} = r_{\text{apogej}} = \frac{p}{1 + e \cos 180^\circ}$$

oz.

$$r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) \quad (4.25b)$$

Iz enačb 4.23 in 4.25a sledi vrtilna količina:

$$h^2 = \mu a(1 - e^2)$$

oz. energija:

$$E_M = \frac{\mu a(1 - e^2)}{2a^2(1 - e)^2} - \frac{\mu}{a(1 - e)}$$

kar na koncu da:

$$E_M = -\frac{\mu}{2a} \quad (4.26)$$

Zgornja enačba je zelo pomembna in velja za vse stožnice. Pomeni, da je velika polos tirnice a odvisna samo od celotne mehanske energije sistema. Tudi obratno velja, energija satelita je določena z veliko polosjo njegove tirnice. Za eliptično tirnico je energija negativna, ker je a pozitivna količina. Parabolične ($1/a = 0$) in hiperbolične ($1/a < 0$) tirnice imajo pozitivno energijo oz. energijo enako nič. To pomeni, da lahko doseže satelit v teh primerih neskončno razdaljo od Zemlje.

Vrtilna količina (h) sama določa goriščni parameter (p), energija (E) sama določa polos (a), obe količini skupaj pa določata numerično ekscentriciteto oz. obliko stožnice (e). Pokažimo na kakšen način:

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{od tod je} \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad \text{in} \quad a = -\frac{\mu}{2E}$$

Torej za katerokoli stožnico velja:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} \quad (4.27)$$

Enačba (4.27) nam pove, da kadar je celotna energija sistema negativna, je tirnica elipsa. Zaključimo zgornje trditve z naslednjo tabelo 4.1.

Tabela 4.1: vrsta tirnic v odvisnosti od energije

tirnica elipsa	$e < 1$	E je negativna
tirnica parabola	$e = 1$	$E = 0$
tirnica hiperbola	$e > 1$	E je pozitivna

Trditev je odvisna od izbire datuma potencialne energije, torej za $r = \infty$ je $V = 0$, kar pa smo že povedali v poglavju o ohranitvi celotne mehanske energije sistema.

Za eliptične tirnice je zanimiva še ena oblika energijskega izreka. Ta namreč podaja hitrost telesa na tirnici v funkciji radij vektorja in velike polosi elipse:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.28)$$

Enačba je znana pod imenom *vis-viva* (integral žive sile). Pove nam naslednje: vsi sateliti, ki jih izstrelimo z enako hitrostjo na enaki razdalji od Zemlje, obkrožajo Zemljo po elipsah z enako glavno polosjo.

Vrnimo se na sliko 4.7 in telo, ki smo izstrelili z začetno hitrostjo v_0 . Videli smo, da pri $v_0 = v_1$ telo ostane "ujeto" v privlačno silo Zemlje, ki ga sili, da kroži okoli nje. Če začetno hitrost povečamo na $v_2 = \sqrt{2}v_1$, gre po integralu vis-viva, polos $a \rightarrow \infty$. Z večanjem hitrosti se večja, napihuje in oddaljuje od Zemlje tudi eliptična tirnica in pri v_2 se zaključena eliptična tirnica pretrga in odpre. Elipsa, po kateri kroži telo, se razpotegne v neskončnost oz. se razpotegne v parabolo. Pri tej hitrosti telo že pobegne od matičnega telesa in jo imenujemo druga kozmična hitrost:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{\oplus}}} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 11,2 \text{ km/s}$$

Na koncu omenimo še tretjo kozmično hitrost. To je hitrost, ki jo potrebuje telo (satelit), da premaga gravitacijsko privlačnost Sonca in zapusti Osončje. Znaša $v_3 = 16,7 \text{ km/s}$.

4.4 Drugi in tretji Keplerjev zakon

Iščemo obhodni čas satelita na poti okoli Zemlje. Slika 4.8 ponazarja geometrijsko II. Keplerjev zakon o konstantni ploščinski hitrosti. Prečna komponenta vektorja hitrosti je $v_{\perp} = r\dot{\nu}$ (slika 4.4), oz. v funkciji kota letenja $\cos\phi_{FPA} = r\dot{\nu}$. Vrtilna količina satelita je enaka:

$$h = r\mathbf{v} \cos\phi_{FPA} = r^2\dot{\nu} \quad (4.29)$$

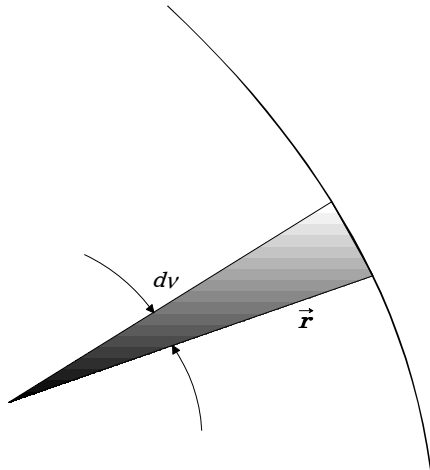
Vrtilno količino lahko napišemo v obliki:

$$h = r^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Enačbo rešimo po dt :

$$dt = \frac{r^2 d\mathbf{v}}{h} \quad (4.30)$$

Krajevni vektor \mathbf{r} v diferencialno majhnem času dt popiše diferencialno majhno ploščino dA , ko preide kot $d\mathbf{v}$ (dejansko gre za diferencialno majhen trikotnik, slika 4.8):



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\mathbf{v} \quad (4.31)$$

slika 4.8: II. Keplerjev zakon

Enačbi 4.30 in 4.31 izenačimo prek kota $d\mathbf{v}$:

$$dt = \frac{2}{h} dA \quad (4.32)$$

Izraz je dejansko II. Keplerjev zakon, saj je vrtilna količina h satelita konstantna. V času enega obhoda T , popiše satelit ploščino cele elipse (kroga). Z integracijo zgornje enačbe na območju 2π , dobimo obhodni čas satelita:

$$T = \frac{2\pi ab}{h}$$

Ploščina elipse je $P = \pi ab$, ploščina kroga pa $P = \pi a^2$. Iz poglavja o geometriji stožnic so znane enačbe:

$$b = \sqrt{a^2(1 - e^2)} = \sqrt{ap}$$

Če to zamenjamo v enačbo za obhodni čas dobimo končno obliko III. Keplerjevega zakona:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (4.33a)$$

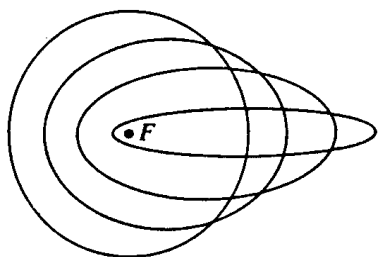
Druga oblika III. Keplerjevega zakona je prek povprečne kotne hitrosti satelita na tirnici n :

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (4.33b)$$

pri čemer je povprečna kotna hitrost n ("mean motion") izražena v enotah [rad/časovna enota]. Enačbi 4.31 nam omogočata hiter izračun velike polosi tirnice prek znanega obhodnega časa oz. povprečne kotne hitrosti satelita:

$$a = \left[\mu \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} \quad (4.34)$$

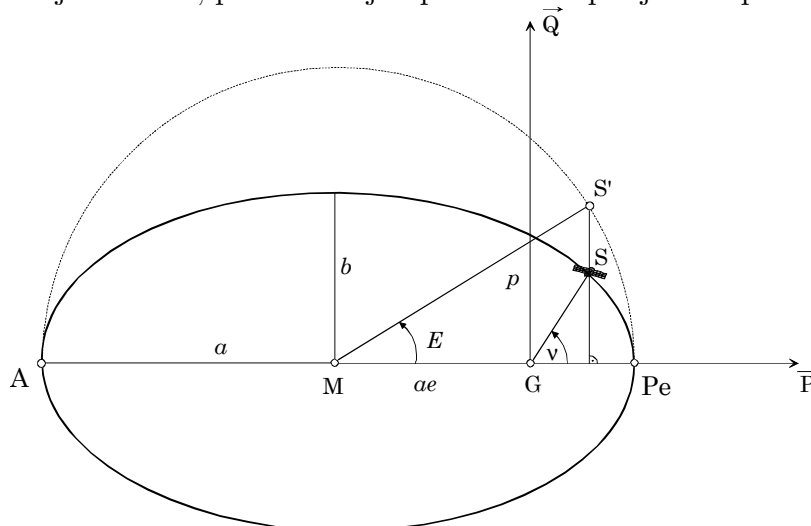
Tretji Keplerjev zakon potrjuje dejstvo, da vsa telesa na tirnicah z enako veliko polosjo imajo enak obhodni čas (slika 4.8), ne glede na njihovo ekscentričnost.



slika 4.9: različne tirnice pri enakih obhodnih časih

4.5 Položaj satelita na tirnici

Geometrija satelitovega tira je določena s osnovnimi parametri elipse (slika 4.10). Pri nemotenem gibanju satelita, pravimo tej elipsi tudi "Keplerjeva elipsa".



slika 4.10: elementi Keplerjeve elipse

Od gorišča elipse G najbolj oddaljena točka se imenuje *apogej* ("apogee"). Gorišču najbližja točka Pe se imenuje *perigej* ("perigee"). Velika os elipse, veznica perigeja in apogeja (Ape) se imenuje apsidna linija ("lines of apsides").

Nad elipso orišimo polkrog s polmerom enakim veliki polosi elipse (a). Trenutni položaj satelita na tirnici (elipsi) označimo s S . S' je projekcija satelita na pomožni krog elipse. Oznake s slike so naslednje:

- r – radij vektor satelita (razdalja GS);
- v – prava anomalija (kot $PeGS$),
- E – ekscentrična anomalija (kot $PeMS'$)

Kotna razdalja satelita od perigeja se imenuje anomalija ("anomaly"). V rabi so tri vrste anomalij. Prava anomalija v ("true anomaly") je kot med apsidno linijo in radij vektorjem do satelita. Računa se v nasprotni smeri urinega kazalca, gledano iz severnega nebesnega pola oz. pozitivne smeri Z -osi geocentričnega ekvatorskega koordinatnega sistema. Ekscentrična anomalija E ("eccentric anomaly") je kot med apsidno linijo in zveznico središče elipse – projekcija satelita S' (slika 4.10). Srednjo anomalijo M bomo spoznali v naslednjem poglavju.

4.6 Kanonične enote in referenčna tirnica

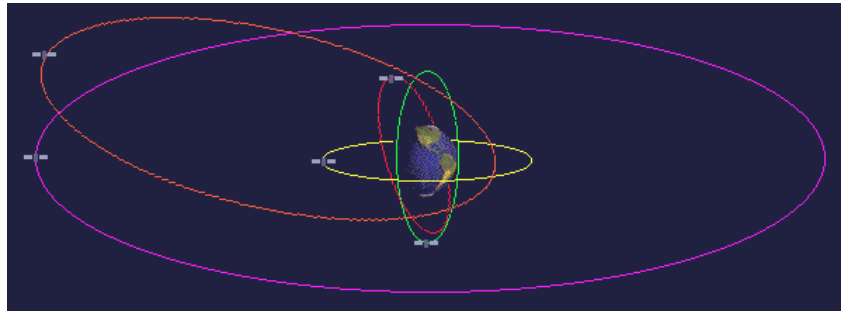
Kanonične enote ("canonical units") so v nebesni mehaniki orodje za reševanje različnih nalog, kljub nepoznavanju pravih numeričnih vrednosti konstant, ki nastopajo v enačbah. Gre za t.i. fundamentalne količine, kot so: srednja razdalja Zemlja – Sonce (astronomska enota), mase Sonca, Lune, planetov itd. Teh količin v absolutnem znesku ne poznamo z zadostno natančnostjo. Zato privzamemo maso Sonca kot enoto ($M_{\odot} = 1$), enako naredimo s srednjo razdaljo Zemlja – Sonce, ta postane enotska razdalja (astronomska enota). Vse mase in razdalje v Osončju se potem lahko izrazijo prek teh dveh enot. Astronomi takšen "normiran" sistem enot imenujejo *kanonične enote*. S ciljem lažjega računanja posameznih nalog, bomo tudi mi prevzeli takšen sistem normiranih enot.

V naših primerih bo referenčna tista krožna tirnica okoli Zemlje, kjer satelit kroži na minimalni višini nad Zemljo. Na slikah 3.6 do 3.8 so podane različne vrste tirnic, pri čemer je osnovna dolžinska enota označena z $ER = \text{"Earth Radius"}$. Dolžinska enota (DE) bo potem polmer takšne krožne tirnice. Časovna enota ($\check{C}E$) bo takšna, da bo hitrost satelita na takšni hipotetični tirnici enaka $1 DE/\check{C}E$. Vrednost geocentrične gravitacijske konstante je potem $\mp = 1 DE^3/\check{C}E^2$.

4.7 Vrste tirnic glede na obhodni čas in višino leta

Obhodni čas zelo pogosto določa vrsto tirnice. Na primer *geosinhrona* tirnica je tista, pri kateri je obhodni čas satelita enak času enega vrteža Zemlje (24 zvezdnih ur). Pri *geostacionarni* tirnici se nahaja satelit vedno nad isto točko na Zemljinem površju. Ti

sateliti imajo tudi 24-urni obhodni čas vendar tirnica mora biti ekvatorialna. *Semi-sinhronne* tirnice imajo obhodni čas 12 zvezdnih ur, kot na primer sateliti GPS. *Super-sinhronne* tirnice imajo obhodni čas večji od 24 zvezdnih ur.



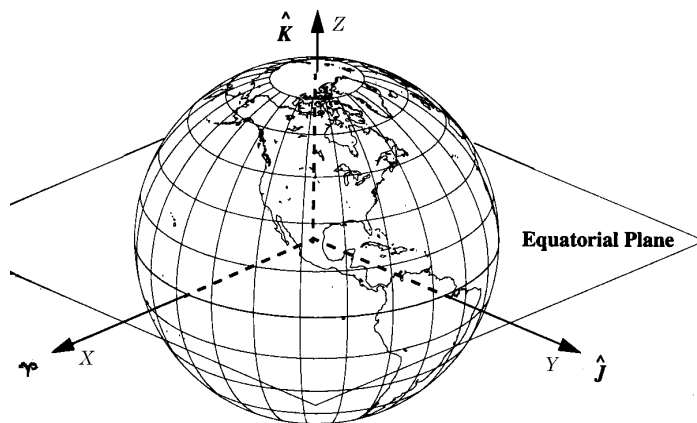
slika 4.10: tipi tirnic

Glede na višino leta lahko razdelimo tirnice oz. satelite na LEO, MEO in GEO tirnice. Ta razdelitev sloni na "motečih silah", ki vplivajo na njihovo gibanje. LEO so t.i. "Low-Earth orbits" oz. nizke tirnice v višina oh od 250 km do okoli 2000 km. Na njihovo gibanje vpliva predvsem sila trenja v atmosferi. MEO so ti. "Mid-Earth orbits" oz. srednje tirnice na višinah od 1000 km do 30 000 km; največji vpliv na MEO tirnice ima pritisk sončeve svetlobe in moteči vpliv tretjega telesa (Luna, Sonce, planeti). GEO so t.i. geosinhronne tirnice na višinah približno 36000 km na katere imajo največji vpliv že omenjene sile pri MEO tirnicah.

Poseben tip tirnic so t.i. HEO tirnice (High Ellpitical Orbits), ki so namenjene komunikacijskim satelitom. Imajo to lastnost, da so perigeji na zelo majhnih višinah, apogeji pa na zelo velikih višinah. ker se satelit v apoegeju giblje z manjšo hitrostjo so lahko vidni nad obzorejm tudi več kot 12 ur, saj GEO sateliti ne pokrivajo zadosti severnih geografskih širin (oz. južnih). En tip HEO tirnic so t.i. Molnija tirnice, ki jih uporabljajo v Rusiji: naklon znaša $63,4^\circ$ perioda pa približno 12 ur (slika 4.10).

5 Tirnica v prostoru

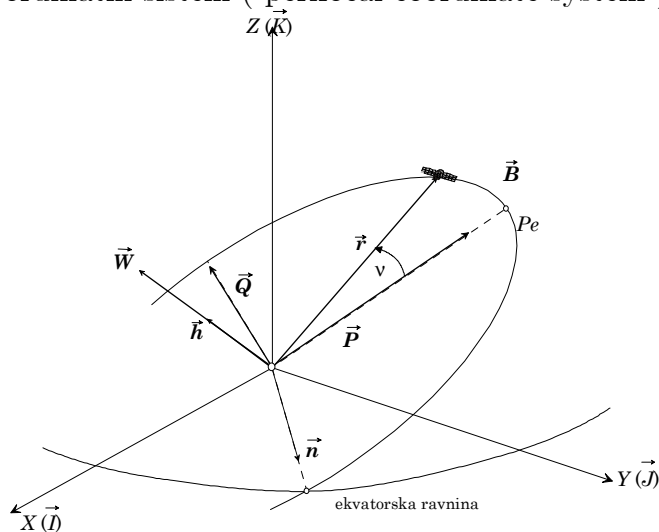
Za upodobitev tirnic v prostoru potrebujemo inercialni referenčni sistem. Tirnice medplanetarnih vesoljskih sond se določajo v heliocentričnem ekliptičnem koordinatnem sistemu. Za določitev tirnic umetnih Zemljinih satelitov v prostoru delovanja Zemljine privlačne sile uporabljamo nebesni geocentrični ekvatorski koordinatni sistem. Os Z sovpada z rotacijsko osjo Zemlje, os X je usmerjena proti pomladišču, os Y dopolnjuje koordinatni sistem v desnega (slika 5.1).



slika 5.1: geocentrični ekvatorski k.s.

Enotski vektorji I , J in K so usmerjeni vzdolž koordinatnih osi X , Y , Z . Povdarimo, da koordinatni sistem ni trdno vezan na Zemljo, saj ne rotira skupaj z njo in je fiksni glede na zvezde (sem za dolgoročni vpliv precesije). Ta koordinatni sistem sodi med t.i. *ECI* ("Earth Centered Inertial") koordinatne sisteme, in je upodobitev kvazi-inercialnega koordinatnega sistema.

Za določitev položaja satelita na tirnici se uporablja t.i. koordinatni sistem gorišča ali *PQW* koordinatni sistem ("perifocal coordinate system"), slika 5.2.



slika 5.2: *PQW* koordinatni sistem gorišča

Osnovna ravnina je ravnina tirnice, Os Z je pravokotna na njo in sovpada z vektorjem vrtilne količine (\mathbf{h}). Os X je usmerjena proti perigeju, Os Y dopolnjuje sistem v desnega (tudi ta os leži v ravnini tirnice). Enotski vektorji vzdolž koordinatnih osi so označeni s \mathbf{P} , \mathbf{Q} in \mathbf{W} . Slika 5.2 nam ponazarja tudi položaj vektorjev treh osnovnih vektorjev satelitovega gibanja \mathbf{h} , $\mathbf{B}(\mathbf{e})$ in \mathbf{n} , ki jih bomo potrebovali pri izračunu elementov tirnice.

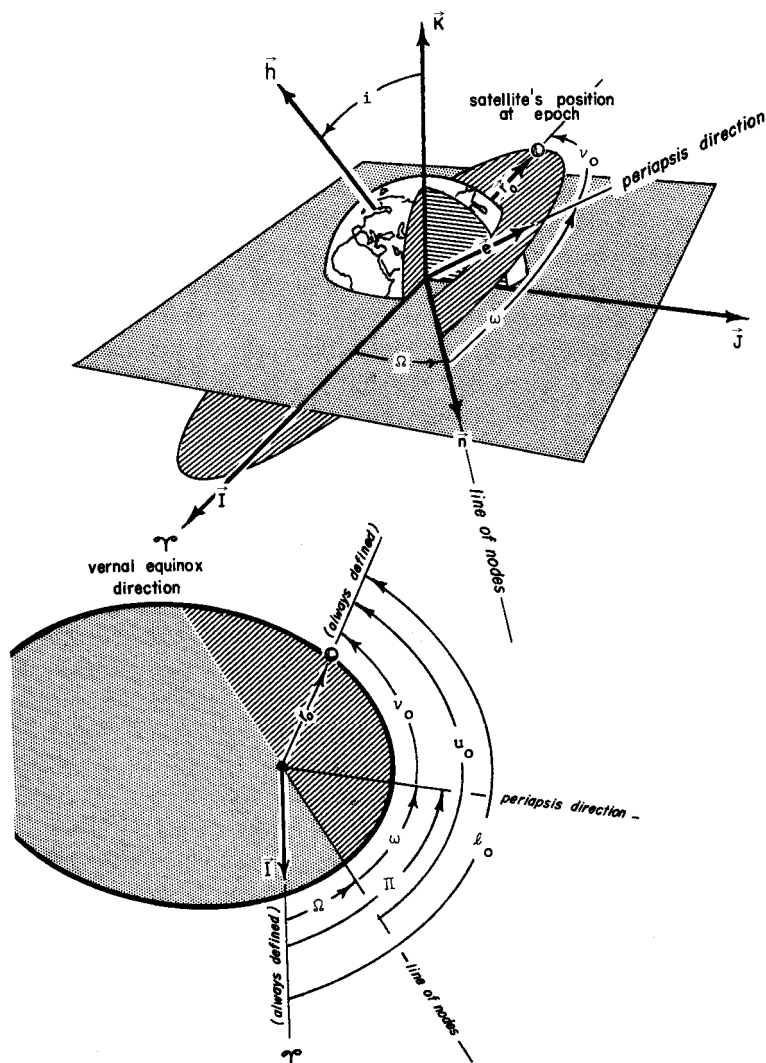
5.1 Klasični Keplerjevi elementi

Rešitev diferencialne enačbe gibanja satelita glede na Zemljo bi nam točno podala položaj tega v izbranem koordinatnem sistemu. Enačba 4.9 je vektorska diferencialna enačba drugega reda. Za rešitev sistema šestih enačb je potrebno poznati 6 integracijskih konstant, ki določajo gibanje satelita okoli Zemlje. Z drugimi besedami, potrebno je poznati položaj in hitrost satelita v nekem poljubnem (začetnem) časovnem trenutku. Teh 6 količin se lahko poda v obliki vektorjev položaja in hitrosti t.i. "state vector", ali v obliki skalarnih količin znanih kod *Keplerjevi elementi* (slika 5.3).

Tirnica satelita navadno prebada ekvatorialno ravnino v dveh točkah. Točko, v kateri pride satelit iz južnega polprostor v severni polprostor, imenujemo *dvižni voz* ("ascending node"). Na nasprotni strani tirnice je *upadni voz* ("descending node"). Presečišče ekvatorialne ravnine in ravnine elipse imenujemo linija vozlov (nožiščnica, "lines of nodes". Vzdolž linije vozlov leži vektor $\mathbf{n} \rightarrow$ nožiščni vektor (slika 5.2). Položaj dvižnega vozla v prostoru določa *rektascenzija dvižnega vozla* Ω ("right ascension of ascending node"), to je kot v ekvatorski ravnini med pomladiščem in dvižnim vozlem. Štejemo jo v obratni smeri urinega kazalca, gledano iz severne strani osnovne ravnine (tirnice).

Ravnina satelitove tirnice na splošno ne sovpada z ekvatorialno ravnino. Nagnjenost ravnine tirnice glede na ekvatorsko ravnino določa *inklinacija* i – *naklon* tirnice ("inclination"). Naklon tirnice je lahko v mejah od 0° do 180° . Pri naklonih tirnice kjer je $i < 90^\circ$ govorimo o direktnem gibanju (na vzhod), pri naklonih $90^\circ < i < 180^\circ$ pa govorimo o retrogradnem (vzvratnem) gibanju (satelit se giblje v nasprotni smeri vrtenja Zemlje).

Rektascenzija dvižnega vozla in naklon tirnice določata položaj ravnine satelitovega tira v prostoru. Ker je lega velike polosi v ravnini tirnice poljubna, potrebujemo še dodatno količino, ki bo določala lego velike polosi. To je *argument perigeja* ω ("argument of perigee"). Argument perigeja je kot, ki ga merimo od dvižnega vozla do perigeja v smeri satelitovega premikanja po tirnici. Če je argument perigeja manjši od 180° , je perigej nad severno poloblo, če je ta večji od 180° , je perigej nad južno zemeljsko poloblo.



slika 5.3: Keplerjevi elementi in drugi parametri tirnice

Gibanje satelita v funkciji časa je določeno s trenutkom prehoda satelita skozi perigej (t_0). Ta trenutek je lahko podan z vrednostjo ene od anomalij.

Anomalije smo spoznali že v poglavju 4.2. Ponovimo: *prava anomalija* v ("true anomaly") je kot med apsidno linijo in radij vektorjem do satelita. Računa se v nasprotni smeri urinega kazalca, gledano iz severnega nebesnega pola oz. pozitivne smeri Z -osi geocentričnega ekvatorskega koordinatnega sistema. *Ekscentrična anomalija* E ("eccentric anomaly") je kot med apsidno linijo in zveznico središče elipse – projekcija satelita S' . Niti prava niti ekscentrična anomalija ne naraščata enakomerno s časom. Zato so uvedli t.i. *srednjo anomalijo* M ("mean anomaly"):

$$M = n (t - t_0) \quad (5.1)$$

Pri tem je n že znana povprečna kotna hitrost satelita na tirnici:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (5.2)$$

T je čas enega obhoda (perioda). Povprečno kotno hitrost satelita imenujemo tudi krožna frekvenca tirnice. Srednja anomalija M narašča premo sorazmerno s časom in se izraža v kotnih enotah, vendar pa geometrijsko ne predstavlja ničesar. Srednja anomalija ni nič drugega kot merilo za čas, normiran v kotnih enotah.

Položaj satelita v prostoru in na tirnici je popolnoma določen z šestimi Keplerjevimi elementi:

$$\text{Keplerjevi elementi } \{ i, \Omega, \omega, a, e, M \}$$

Keplerjevi elementi predstavljajo popolnoma naraven opis periodične eliptične tirnice satelita. Vsi razen anomalije so neodvisni od časa. Velika polos (a), in numerična ekscentriciteta (e) natančno opisujeta obliko tirnice. Njen položaj v prostoru je določen z naklonom tirnice i in rektascenzijo dvižnega vozla (Ω). Argument perigeja (ω) določa orientacijo apsidne linije (velike polosi) v ravnini tirnice. Srednja anomalija določa položaj satelita na tirnici za neko določeno epoho (začetni časovni trenutek).

Namesto srednje anomalije se lahko uporabi tudi neka druga anomalija, vendar ima slednja to lastnost, da se lahko linearno interpolira s časom.

5.2 Dodatni elementi satelitovega tira

Šest Keplerjevih elementov $\{ i, \Omega, \omega, a, e, M \}$ v popolnosti določajo obliko, velikost in orientacijo tirnice, kot tudi položaj satelita na njej. Zgoraj omenjeni elementi niso vedno v uporabi. Namesto e in a je lahko podan goriščni parameter p . Namesto argumenta perigeja se uporablja dolžina perigeja Π (slika 5.3):

$$\Pi = \Omega + \omega \tag{5.3}$$

Če je tirnica krožna, ne obstaja perigej ter sta argument perigeja in dolžina dvižnega vozla nedoločena. Za določitev trenutka prehoda satelita čez perigej se lahko uporabijo naslednje količine:

- v_0 – prava anomalija v trenutku t_0 . To je kot v ravnini tirnice med apsidno linijo in radij vektorjem satelita v trenutku t_0 (trenutek t_0 imenujemo *epoha*).
- u_0 – argument širine v trenutku t_0 , je kot v ravnini tirnice med linijo vozlov (dvižnim vozlom) in krajevnim vektorjem satelita v trenutku t_0 .

$$u_0 = \omega + v_0 \tag{5.4}$$

V primeru ekvatorialne tirnice ne obstaja dvižni vozle in sta ω in u_0 nedoločeni.

- l_0 – prava dolžina v trenutku t_0 . To je kot v ravnini tirnice med osjo X in krajevnim vektorjem satelita v trenutku t_0 . Veljajo naslednje zveze:

$$l_0 = \Omega + \omega + v_0 = \Pi + v_0 = \Omega + u_0 \tag{5.5}$$

5.2.1 Keplerjeva enačba

Vse tri anomalije – prava (ν), ekscentrična (E) in srednja (M) sovpadajo le v dveh točkah tirnice - perigeju in apogeju, sicer pa se te količine med seboj razlikujejo. Srednja in ekscentrična anomalija sta povezani prek t.i. *Keplerjeve enačbe*:

$$M = E - e \sin E \quad \text{oz.} \quad n(t - t_0) = E - e \sin E \quad (5.6)$$

Keplerjeva enačba je transcendentna enačba: čas sicer lahko neposredno izračunamo iz ekscentrične anomalije, v nasprotni smeri pa moramo enačbo rešiti numerično.

Zvezo med pravo in ekscentrično anomalijo dobimo s pomočjo slike 4.9 (poglavje 4). Očitno je:

$$\cos E = \frac{ae + r \cos \nu}{a}$$

ker je $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$, se zgornja enačba poenostavi v obliko:

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (5.7)$$

5.3 Določitev tirnice

Položaj množice satelitov, ki se nahajajo v tirnicah okoli Zemlje, določamo iz različnih opazovanj. Radarske in optične meritve se uporabljajo že od samega začetka, danes ima večina satelitov na krovu tudi sprejemnike GPS ter različne vrste merilcev pospeškov. Na ta način je možno iz različnih podatkov priti do položaja satelita na tirnici. Poznamo dve vrsti nalog:

- določitev Keplerjevih elementov tirnice iz znanih krajevnega vektorja \mathbf{r} in vektorja hitrosti \mathbf{v} ;
- določitev vektorjev položaja in hitrosti iz znanih Keplerjevih elementov tirnice – izračun *efemerid*.

5.3.1 Keplerjevi elementi tirnice iz \mathbf{r} in \mathbf{v}

Za izračun Keplerjevih elementov moramo prvo izračunati vrednosti treh osnovnih vektorjev gibanja satelita: \mathbf{h} , \mathbf{n} , in \mathbf{e} . Vektor vrtilne količine je že znan:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

Torej:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ r_I & r_J & r_K \\ v_I & v_J & v_K \end{bmatrix} = h_I \mathbf{I} + h_J \mathbf{J} + h_K \mathbf{K} \quad (5.8)$$

Ne pozabimo, da je vektor vrtilne količine pravokoten na ravnino tirnice.

Nožiščni vektor \mathbf{n} je definiran kot:

$$\mathbf{n} = \mathbf{K} \times \mathbf{h}$$

Torej:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_I & h_J & h_K \end{bmatrix} = n_I \mathbf{I} + n_J \mathbf{J} + n_K \mathbf{K} = -h_J \mathbf{I} + h_I \mathbf{J} \quad (5.9)$$

Iz definicije vektorskega produkta, mora biti \mathbf{n} pravokoten na \mathbf{K} in na \mathbf{h} . Da bi \mathbf{n} bil pravokoten na vektor \mathbf{K} (os Z) mora ležati v ekvatorski ravnini. Da bi bil pravokoten na \mathbf{h} mora \mathbf{n} ležati v ravnini tirnice. Torej vektor \mathbf{n} leži v obeh ravninah: ekvatorski in ravnini tirnice, oz. se nahaja v presečišču teh dveh ravnin \rightarrow liniji vozlov oz. nožiščnici. Vektor \mathbf{n} kaže v smeri dviznega vozla; njegova velikost nima pomena za gibanje satelita, pomembna je samo njegova smer.

Vektor ekscentricitete \mathbf{e} dobimo s pomočjo Laplaceovega vektorja \mathbf{B} (slika 4.6), iz že znane enačbe 4.21:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (5.10)$$

oz. iz izraza za Laplaceov vektor (enačba 4.22):

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Torej je vektor \mathbf{e} enak:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Iz zgornje enačbe odpravimo vektor \mathbf{h} , kot $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$:

$$\mu \mathbf{e} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Z rešitvijo trojnega vektorskega produkta imamo:

$$\mu \mathbf{e} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Ker je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$, dobimo:

$$\mu \mathbf{e} = \left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

Kar nam končno da vektor ekscentricitete:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] \quad (5.11)$$

Velikost vektorja \mathbf{e} je točno enaka ekscentriciteti satelitove tirnice.

Sedaj ko so nam znani vsi trije fundamentalni vektorji, lahko nadaljujemo z izračunom Keplerjevih elementov. Goriščni parameter p in ekscentriciteta e sledita neposredno iz vektorjev \mathbf{h} in \mathbf{e} . Vsi ostali elementi so koti med znanimi vektorji. Iz vektorske analize je znano, da lahko kot med dvema vektorjema izračunamo s pomočjo njihovega skalarnega produkta. Spomnimo se:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha$$

Kot med vektorjema \mathbf{A} in \mathbf{B} je potem:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}$$

S tem nismo še popolnoma ugotovili velikost kota, saj ima ta lahko vrednosti med 0° in 360° . Da bi ugotovili v katerem kvadrantu se nahaja kot, uporabimo še druge znane informacije o kotu in zveze z drugimi elementi.

Vrstni red določitve Keplerjevih elementov je naslednji:

- I. izračunamo p iz: $p = h^2 / \mu$.
- II. Ekscentriciteta eliptične tirnice je enaka: $e = |\mathbf{e}|$.
- III. Naklon tirnice i je kot med vektorjema \mathbf{K} in \mathbf{h} :

$$\cos i = \frac{h_K}{h}$$

Inklinacija je vedno manjša od 180° .

- IV. Rektascenzija dvižnega vozla je kot med vektorjema \mathbf{I} in \mathbf{n} :

$$\cos \Omega = \frac{n_I}{n}$$

Če je $n_I > 0$, je potem Ω manjši od 180° .

- V. Argument perigeja ω je kot med vektorjema \mathbf{n} in \mathbf{e} :

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{ne}$$

Če je $e_K > 0$, je potem ω manjši od 180° .

VI. Prava anomalija v_0 je kot med vektorjema e in r :

$$\cos v_0 = \frac{e \cdot r}{er}$$

Če je $r \cdot v > 0$, je potem v_0 manjši od 180° . Predznak skalarnega produkta $r \cdot v$ je skladen s predznakom kota letenja ϕ_{FPA} ; ta je pozitiven če se satelit nahaja med perigejem in apogejem, $0^\circ < v < 180^\circ$; v nasprotnem primeru je negativen, $180^\circ < v < 360^\circ$ (slika 4.5). Kontrola kvadranta pri izračunu prave anomalije v_0 pomeni določitev dela tirnice, na katerem se nahaja satelit. Če se ta nahaja med perigejem in apogejem je kot letenja vedno pozitiven; če pa se satelit nahaja med apogejem in perigejem, je kot letenja vedno negativen.

VII. Argument dolžine v trenutku $t_0 - u_0$ je kot med vektorjema n in r :

$$\cos u_0 = \frac{n \cdot r}{nr}$$

Če je $r_K > 0$, je potem u_0 manjši od 180° .

VIII. Prava dolžina v trenutku $t_0 - l_0$:

$$l_0 = \Omega + \omega + v_0 = \Pi + v_0 = \Omega + u_0$$

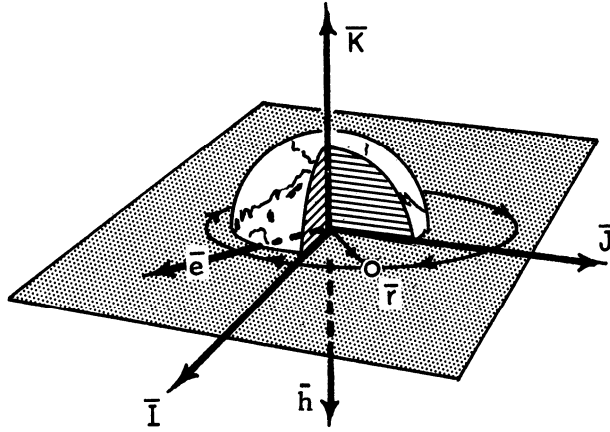
IX. V primeru ekvatorskih tirnic nista določena argument perigeja in rektascenzija dvižnega vozla. Takrat se uporabi dolžina (longituda) perigeja Π . To je kot med vektorjem I in vektorjem ekscentricitete e :

$$\cos \pi = \frac{e \cdot I}{e}$$

Poglejmo primere treh različnih tirnic:

Tirnica 1: ekvatorialna retrogradna

$p = 1,5 \text{ DE}$	$\Pi = 45^\circ$
$e = 0,2$	$v_0 = 270^\circ$
$i = 180^\circ$	$u_0 = \text{nedefiniran}$
$\Omega = \text{nedefiniran}$	$l_0 = 315^\circ$



Slika 5.4: tirnica 1

Tirnica 2: polarna

$$p = 1,5 \text{ DE}$$

$$e = 0,2$$

$$i = 90^\circ$$

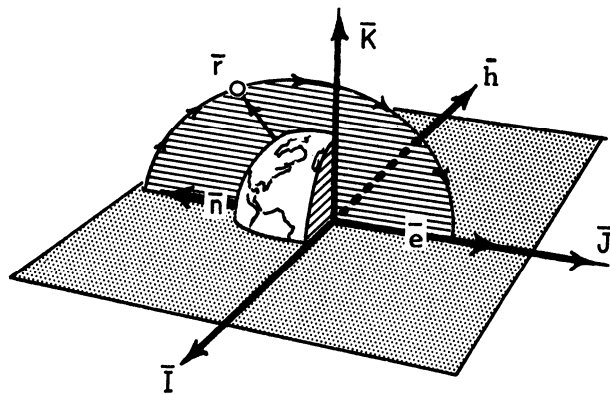
$$\Omega = 270^\circ$$

$$\omega = 180^\circ$$

$$v_0 = 225^\circ$$

$$u_0 = 45^\circ$$

$$l_0 = 315^\circ$$



Slika 5.5: tirnica 2

Tirnica 3: direktna krožna

$$p = 1,5 \text{ DE}$$

$$e = 0$$

$$i = 60^\circ$$

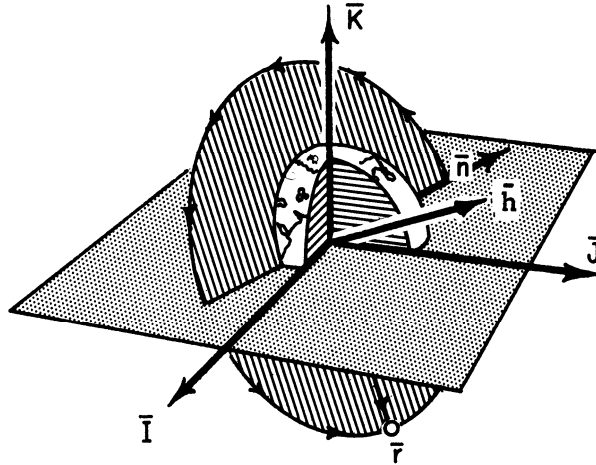
$$\Omega = 150^\circ$$

$$\omega = \text{nedefiniran}$$

$$v_0 = \text{nedefiniran}$$

$$u_0 = 270^\circ$$

$$l_0 = 420^\circ$$



Slika 5.6: tirnica 3

5.3.2 Vektorja r in v iz Keplerjevih elementov tirnice

Ta naloga je izračun efemerid satelita, saj moramo predvideti njegovo tirnico v bodočnosti. Osnovna ideja je prvo določitev vektorjev v koordinatnem sistemu gorišča PQW , in potem rotacija teh v geocentrični, ekvatorski koordinatni sistem. Če računamo s klasičnimi Keplerjevimi elementi lahko nastopijo težave v primeru posebnih tirnic, kot na primer: pri paraboli je velika polos neskončna, zato vedno raje uporabljajmo goriščni parameter p . Pri krožni tirnici je sta perigej in apogej nedeoločena, pri ekvatorskih tirnicah pa ni določena linija vozlov.

5.4 Vektorja hitrosti in položaja v koord. sistemu gorišča (PQW)

Krajevni vektor r v sistemu PQW sledi neposredno iz slike 5.2:

$$\mathbf{r} = r \cos \nu \mathbf{P} + r \sin \nu \mathbf{Q} \quad (5.12a)$$

Velikost vektorja r lahko izračunamo iz polarne enačbe stožnice (3.18):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (5.12b)$$

Vektor hitrosti lahko napišemo v nam bolj znani obliki:

$$\mathbf{r}_{PQW} = \begin{bmatrix} \frac{p \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \\ \frac{p \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13a)$$

Zgornja enačba se piše tudi v obliki:

$$\mathbf{r}_{PQW} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \nu} \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13b)$$

Vektor hitrosti dobimo z odvajanjem enačbe 5.12, pri tem upoštevamo dejstvo, da je koordinatni sistem PQW inercialni, t.j. $\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{Q}} = 0$. Torej:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r} \cos \nu - r \dot{\nu} \sin \nu) \mathbf{P} + (\dot{r} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu) \mathbf{Q} \quad (5.14)$$

Zgornji izraz lahko poenostavimo če uporabimo že znane enačbe: $h = r^2 \dot{\nu}$, $p = h^2 / \mu$.

Odvajajmo izraz 5.12b (polarno enačbo elipse) po času:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu \quad \text{in} \quad r \dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu)$$

Z zamenjavo zgornjih izrazov v izraz za vektor hitrosti (5.14) dobimo:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [-\sin \nu \mathbf{P} + (e + \cos \nu) \mathbf{Q}] \quad (5.15)$$

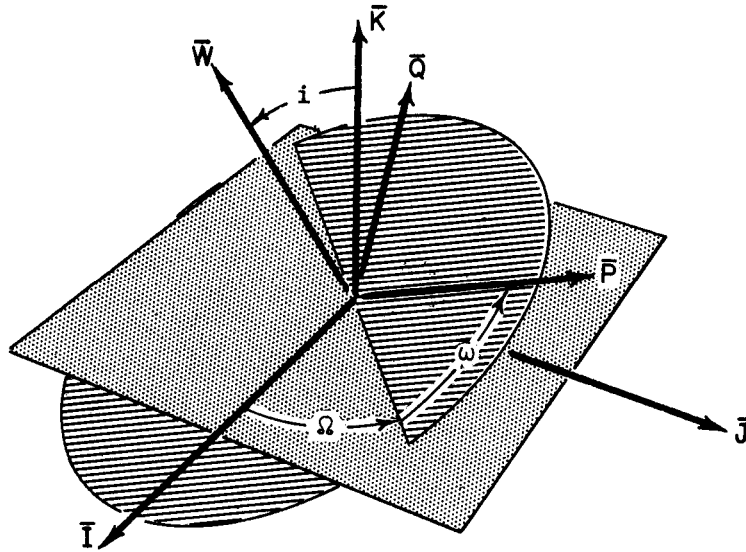
oz. kot smo vajeni:

$$\mathbf{v}_{PQW} = \frac{\mu}{h} \begin{bmatrix} -\sin \nu \\ e + \cos \nu \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{bmatrix} -\sin \nu \\ e + \cos \nu \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4.1 Transformacija iz koord. sistema gorišča v geocentrični ekvatorski koord. sistem

Kordinatni sistem gorišča PQW in geocentrični ekvatorski koordinatni sistem I, J, K^* sta povezani prek Keplerjevih elementov Ω , i in ω (slika 5.7).

* Pogosto se za IJK koordinatni sistem uporablja naziv ECI k.s. ("Earth Centered Inertial").



Slika 5.7: transformacija iz PQW v I,J,K

S tremi postopnimi rotacijami prevedemo koordinatni sistem gorišča v geocentrični ekvatorski k.s. Vrstni red rotacij je naslednji: prvo rotiramo okoli osi W za kot ω ; zatem rotiramo okoli osi P za kot i in na koncu rotiramo okoli že rotirane osi W za kot Ω :

$$\mathbf{r}_{IJK} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\mathbf{r}_{PQW} \quad (5.16)$$

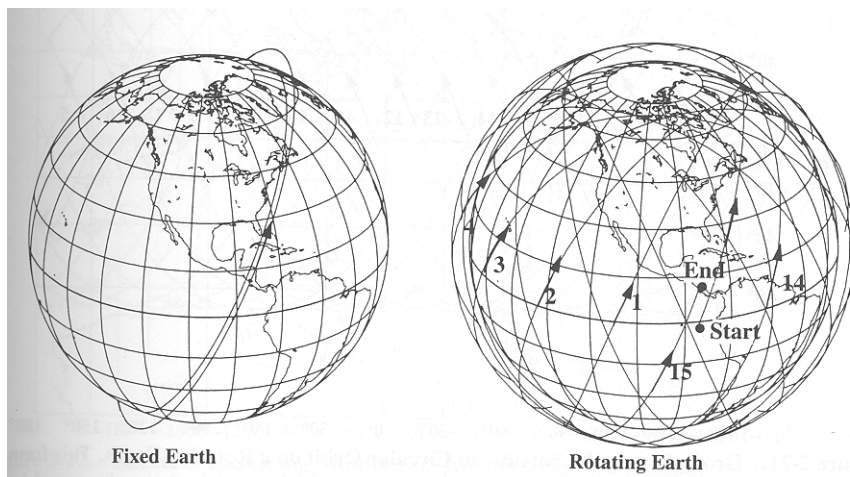
$$\mathbf{v}_{IJK} = R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\mathbf{v}_{PQW} \quad (5.17)$$

Ker gre za desne koordinatne sisteme in je predznak vseh rotacij negativen, pomeni da so rotacije v smeri urinega kazalca.

5.5 Projekcija tirnice na Zemljinem površju

Da bi satelit izpolnil predvidene naloge je potrebno poznati projekcijo tirnice na Zemljinem površju (v angleščini temu pravijo "groundtrack of a satellite orbit"). Iz te lahko predvidimo koliki del površja "pokriva" satelitski signal (primer satelitov za daljinsko zaznavanje), oz. v kolikem času satelit preleti del površja, ali koliko časa je satelit nad obzorjem (primer satelitov GPS) itd.

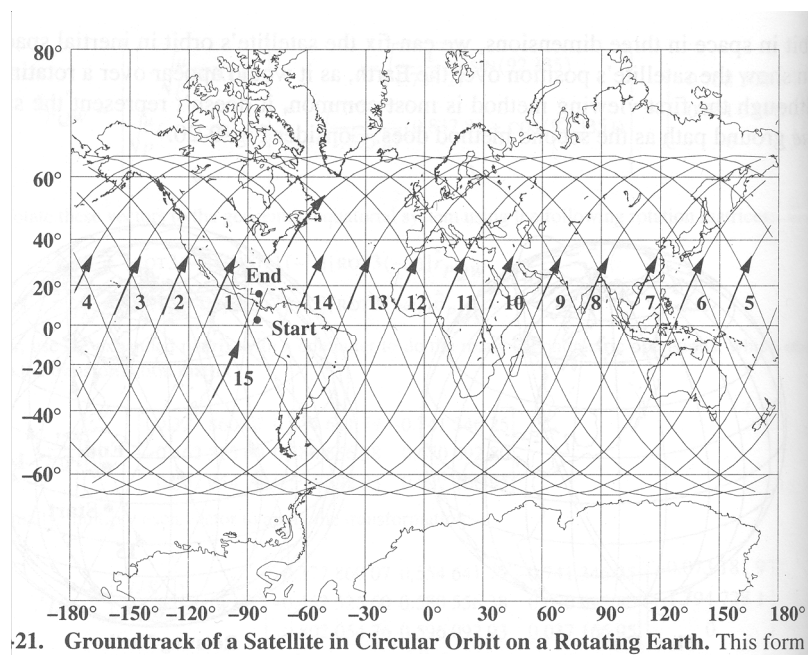
Tirnica satelita vedno leži v ravnini, ki seka Zemljo skozi njeno središče. Projekcija tirnice na mirujoči Zemlji-krogli je veliki krog (slika 5.9a).



slika 5.9: veliki krog kot projekcija satelitove tirnice

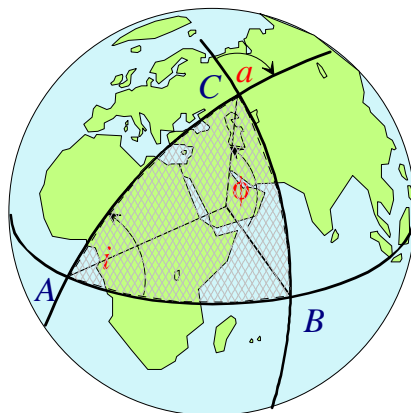
Če Zemlja ne bi rotirala, bi projekcija satelitove tirnice bila vedno enaka. Na sliki 5.10 vidimo, kako izgleda projekcija tirnice v Mercatorjevi projekciji. Iz slike je očitno, da sta maksimalna severna in južna geografska širina, ki jih projekcija doseže enaki inklinaciji tirnice i . Pri retrogradni tirnici sta ekstremni geografski širini na projekciji $180 - i$.

Ravnina tirnice ostaja fiksna v prostoru, med tem ko Zemlja rotira. Zaradi Zemljine rotacije bo projekcija pri vsakem preletu satelita zamaknjena v zahodni smeri. Stopnja zamaknjenosti je odvisna od tega, koliko se Zemlja zavrti v času ene revolucije satelita (slika 5.10).



slika 5.10: projekcija satelitove tirnice v Mercatorjevi projekciji

Slika 5.11 nam ponazarja vpliv geografske širine izstrelišča na inklinacijo tirnice. Predpostavimo, da je satelit izstreljen iz kraja z geografskimi koordinatami γ in ℓ in da je azimut izstrelitve a . Projekcija tirnice seka ekvator v točki A in to pod kotom enakim inklinaciji tirnice.



slika 5.11: vpliv geografske širine izstrelišča na inklinacijo tirnice,

Lok CB , ki tvori tretjo stranico pravokotnega sfernega trikotnika ACB je meridijski krog izstrelišča. Ker poznamo dva elementa v trikotniku lahko rešimo neznan kot i . Rešitev se glasi:

$$\cos i = \sin a \sin(90^\circ - \phi) = \sin a \cos \phi$$

Iz zgornje enačbe lahko izluščimo neverjetno veliko informacij. Za direktne tirnice ($0^\circ < i < 90^\circ$) mora biti $\cos i$ pozitiven. Ker se izstrelišče lahko nahaja med 0° in 90° geografske širine (na severni polobli) oz. med 0° in -90° (na južni polobli), mora biti tudi $\cos \gamma$ vedno pozitiven. Direktna tirnica terja vzhodne azimute med 0° in 180° .

Vprašajmo se sedaj: "kolika je minimalna inklinacija tirnice z izstrelitvijo satelita na geografski širini γ ? Če je i minimalno, mora biti $\cos i$ maksimalno, iz česar sledi, da mora biti azimut izstrelitve enak 90° . Torej, minimalni naklon tirnice je enak geografski širini izstrelišča.

Posledica tega je dejstvo, da ne moremo spraviti satelit v ekvatorialno tirnico ($i = 0^\circ$) s kraja, ki se ne nahaja na ekvatorju. Zato se večina izstrelitvenih krajev nahaja v minimalnih geografskih širinah (ZDA \rightarrow Florida, ESA \rightarrow Francoska Gvajana).

6 Moteno gibanje satelita

Vse do sedaj smo obravnavali Keplerjevo gibanje satelita okoli Zemlje: satelit je masna točka, ki se giblje v privlačnem polju točkaste Zemlje (oz. Zemljo obravnavamo kot kroglo, sestavljeno iz homogenih, koncentričnih lupin). V resnici, Keplerjevo idealno gibanje satelita ni enako pravem gibanju. Razloga sta predvsem naslednja:

- Zemlja ni idealna krogla, in razporeditev njenih mas ni sferno simetrična,
- na satelit vplivajo še druge sile, ki smo jih pri idealnem Keplerjevem gibanju zanemarili.

6.1 Moteče sile

Satelit kroži okoli Zemlje pod vplivom Zemljine privlačne sile (centralne sile). Rezultat delovanja te centralne sile je idealizirano gibanje satelita po t.i. Keplerjevi elipsi. Poleg Zemljine privlačne sile, so pri gibanju satelita prisotne še druge sile, vendar so te mnogo manjše. Zato jih obravnavamo kot motnje, saj povzročajo, da tirnica odstopa od idealne elipse.

Vse moteče sile lahko razvrstimo v dve skupini: konzervativne in nekonzervativne sile:

1. konzervativne sile lahko izpeljemo iz potencialne funkcije, na primer gravitacijskega potenciala bodisi Zemlje bodisi drugih nebesnih teles.
2. Nekonkonzervativnih sil ne moremo izpeljati iz potencialne funkcije; med te sodijo na primer sila trenja atmosfere in sile, ki so rezultat delovanja pritiska sončeve svetlobe.

Pomembno je poznati velikostni razred posameznih motečih sil. Vzemimo na primer satelit LEO na višini 800 km v skoraj krožni tirnici: če vzamemo gravitacijsko, centralno silo kot enoto, imajo motnje naslednji velikostni razred:

- 10^{-3} motnje zaradi sploščenosti Zemlje,
- 10^{-6} motnje zaradi drugih nepravilnosti Zemljinega težnostnega polja,
- 10^{-7} motnje zaradi privlačnega vpliva Lune,
- 10^{-8} motnje zaradi privlačnega vpliva Sonca.

Vse ostale moteče sile (konzervativne in nekonzervativne) v splošnem ne presegajo velikosti 10^{-8} .

Vse moteče sile se ne obravnavajo skupaj, vendar vsaka po cebej, kot količine, ki ostajajo majhne v primerjavi s centralno gravitacijsko silo. Zaradi prisotnosti motečih sil, se enačba gibanja satelita potem glasi:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_m \quad (6.1)$$

kjer je \mathbf{a}_m je skupni pospešek, ki ga povzročajo moteče sile.

Vse sile, ki jih občuti satelit na tirnici podajamo v razpredelnici 6.1. Ta vsebuje tudi največjo silo, t.i. centralni del zemljine privlačne sile.

Tabela 6.1: sile, ki učinkujejo na satelit

Oznaka	Sila
Konzervativne sile	
C	• privlačna sila Zemlje
CC	• centralni del $\mu = GM$
NC	• necentralni del
L	• privlačna sila Lune
S	• privlačna sila Sonca
P	• privlačna sila planetov
Pl	• plimovanje čvrste Zemlje in oceanov
Re	• relativistični vpliv
Nekonzervativne sile	
T	• sila trenja atmosfere
P	• sila pritiska sončeve svetlobe
A	• albedo učinek

Vse sile iz tabele 6.1 lahko napišemo v tudi v obliki pospeškov:

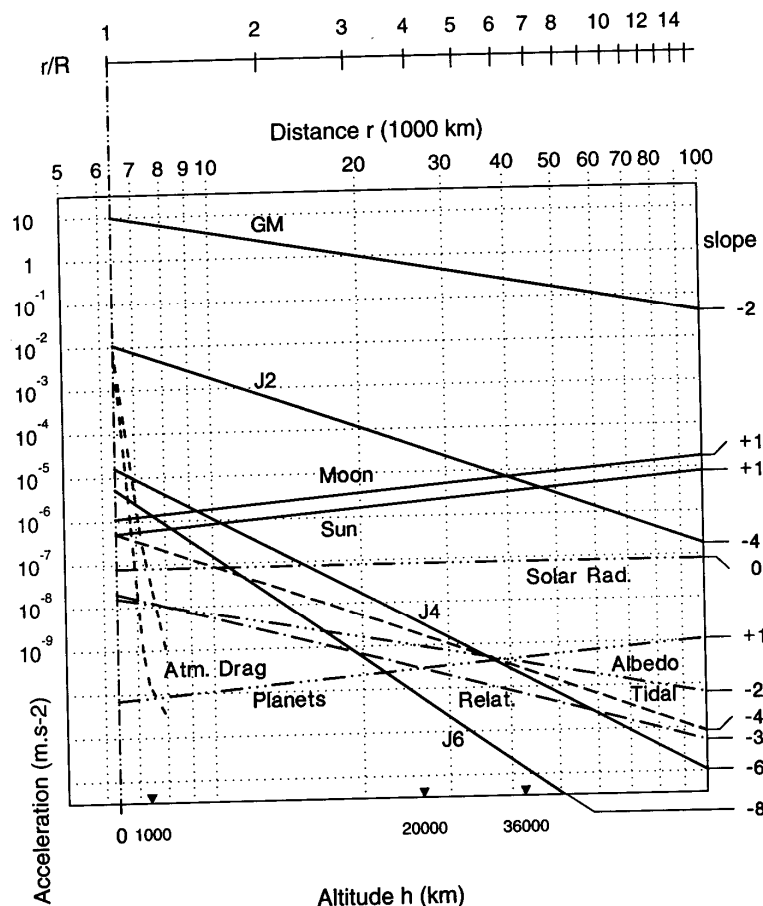
$$\ddot{r} = \ddot{r}_{CC} + \ddot{r}_{NC} + \ddot{r}_L + \ddot{r}_S + \ddot{r}_P + \ddot{r}_{Pl} + \ddot{r}_{Re} + \ddot{r}_T + \ddot{r}_P + \ddot{r}_A \quad (6.2)$$

Vodilni člen v enačbi 6.2 je centralni del Zemljine gravitacijske sile. V primerjavi z njim, so vsi ostali pospeški zelo majhni. S zgornjimi oznakami se enačba 6.1 lahko napiše v obliki:

$$\ddot{r}_{CC} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (6.3)$$

6.1.1 Motnje in višina satelita

Graf na sliki 6.1 podaja vrednost pospeška satelita \ddot{r} v funkciji krajevnega vektorja r , oz. višine leta. Graf je v t.i. log – log merilu (in abscisa in ordinata sta v logaritemskem merilu).



slika 6.1 Centralni pospešek in moteči pospeški v funkciji krajevnega vektorja satelita

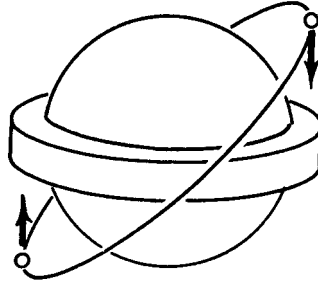
V območju prikazanim na sliki se krivulje lahko obravnavajo kot premice z navedenimi gradienti. (ti so podani na desni strani grafa, "slope"). Višine tri tipa satelitov (LEO, MEO in HEO) so tudi navedene na sliki.

Večina motečih sil ni zanimiva za geodezijo in jih je potrebno odstraniti iz opazovanj. Gravitacijska sila in njene motnje so pomembni za fizikalno geodezijo in teorijo plimovanja, vendar tudi njih moramo odstraniti pri satelitski navigaciji (določanju natančnega položaja).

Vsaka moteča sila deluje različno na posamezne Keplerjeve elemente. Glede na časovno periodo moteče sile, lahko njihov vpliv razdelimo v tri skupine: sekularne motnje (ki se počasi linearno povečujejo), kratkoperiodične in dolgoperiodične. Vse posamezne motnje lahko medsebojno seštevamo.

6.2 Vplivi posameznih motečih sil

Necentralni del Zemljine privlačne sile tvorita odstopanje njene oblike od krogle (sploščenost na polih) in neenakomerna razporeditev mas, predvsem prisotnost ekvatorskih izboklin. Celoten vpliv je dvojen.



slika 6.2: moteči navor, kot posledica ekvatorskih izboklin

Zamislimo Zemljo kot kroglo in okoli ekvatorja dodajmo pas viška mas, ki ponazarja Zemljine ekvatorske izbokline. Pas ustvarja dodaten navor, ki deluje na tirnico satelita ter jo pozkuša položiti v ekvatorsko ravnino. Rezultat je gibanje, podobno precesijskemu gibanju zemljine rotacijske osi: vektor vrtilne količine precesira okoli glavne vztrajnostne osi Zemlje, tj. ravnina tirnice in linija vozlov se gibljeta v zahodni smeri pri direktnih tirnicah, oz. se gibljeta v vzhodni smeri pri retrogradnih tirnicah. Prvi pojav je znan kot *precesija dvižnega vozla* (najdemo tudi izraz *regresija linije vozlov*). Celoten pojav je odvisen od inklinacije tirnice in to v funkciji $\cos i$. Pri nizkih tirnicah in majhnih inklinacijah lahko doseže precesija dvižnega vozla 9° na dan.

Rotacija ravnine tirnice se kaže v rotaciji apsidne linije v ravnini tirnice, pojav je znan kot *precesija perigeja*. Tudi ta je odvisen od naklona tirnice, v funkciji $(1 - 5\cos^2 i)$. Precesija perigeja pomeni, da se elipsa v ravnini tirnice počasi obrača in zato zaporedni perigeji ne sovpadajo več. Posledica je težavno definiranje periode tirnice. Seveda je rotacija apsidne linije prisotna samo pri ekscentričnih tirnicah.

V nasprotju z motnjami gravitacijskega polja Zemlje, so motnje zaradi vpliva privlačnih sil Lune in Sonca toliko večje, kolikor bolj je satelit oddaljen od Zemlje. Ko je velika polos tirnice večja od petih premerov Zemlje, postane tirnica povsem nestabilna zaradi privlačnega vpliva Lune in Sonca. Na srečo so takšne tirnice za praktično uporabo nezanimive. V splošnem se motnje zaradi privlačnega vpliva Luna in Sonca kažejo v precesiji ravnine tirnice.

Plimovanje čvrste Zemlje in morij spreminjata gravitacijski potencial Zemlje in povzročata dodatne pospeške satelita, ki se lahko obravnavajo kot *indirektni gravitacijski učinek Lune in Sonca*. V splošnem je učinek plimovanja čvrste Zemlje desetkrat večji od plimovanja morij. Za tirnico tik nad zemljo ($r = R$) znaša moteči pospešek $\ddot{r}_p \approx 5 \times 10^{-7} \text{ms}^{-2}$.

Privlačni vpliv planetov je zelo majhen. Maksimalni moteči pospešek, ki ga povzročata samo Venera in Jupiter znašata: $\ddot{r}_p \approx 10^{-9} \text{ms}^{-2}$, oz. $\ddot{r}_p \approx 10^{-11} \text{ms}^{-2}$.

Hitrost satelita redkokdaj preseže vrednosti nekaj kilometrov na sekundo. To je zelo malo v primerjavi s hitrostjo svetlobe in relativistična obravnava je pogostokrat nepotrebna. Vendar v vseh novejših satelitskih misijah se upoštevajo tudi relativistični vpivi v obliki t.i. relativističnega pospeška. Glavna posledica relativističnega pospeška je sekularni učinek na argument perigeja: perigej tirnice se premika hitreje kot bi lahko sklepali na osnovi izračunov, prihaja do dodatne

precesije perigeja. Ta fenomen je prvi pojasnil A. Einstein pri pojasnitvi precesije perihelija Merkurja.

Za nizkoleteče satelita, je poleg nepravilnosti težnostnega polja Zemlje, velika motnja tudi trenje, ki nastaja pri gibanju skozi Zemljino atmosfero (pravimo mu tudi upor ozračja; v angl. "atmospheric drag"). To je odvisno od oblike in mase satelita, njegove hitrosti in seveda fizikalnih lastnosti atmosfere v danem trenutku (na primer: gostota, temperatura, stanje magnetnega polja Zemlje itd.). Trenje v atmosferi znižuje hitrost satelita v perigeju, zato se zaporedni apogeji nižajo, položaj in višina perigeja pa ostajata nsepremenjena. V prvem delu naredi trenje iz poljubno ekscentrične tirnice krožnico, ki poteka v celoti skozi plasti atmosfere. V drugem delu se višina krožne tirnice počasi niža. Kljub izgubi vrtilne količine se zaradi manjšajoče višine povečuje hitrost satelita. Tirnica se začne hitro nižati na višinah pod 200 km, na višini 100 km pa satelit zgori v zemeljskem ozračju in ostanki padejo na Zemljo.

Fotoni sončeve svetlobe imajo dvojen učinek na satelit. Tisti, ki se odbijejo od površja satelita ustvarjajo dodatni moteči pospešek satelita zaradi pritiska sončeve svetlobe. Svetloba, ki se odbije od površja Zemlje tudi ima vpliv na satelit. Temu učinku pravimo *albedo*. Pospešek zaradi pritiska sončeve svetlobe je odvisen od mase in velikosti satelita (velikosti površja). Poglavitina posledica sile pritiska sončeve svetlobe je navor, ki deluje na samo strukturo satelita. Navor na strukturo pomeni, da satelit nabira vrtilno količino, ki jo je potrebno občasno sprostiti. V nizkih tirnicah se se nabrana vrtilna količina sprošča z navorom v zemljinem magnetnem polju s pomočjo elektromagnetov na krovu satelita. V visoki tirnicah (10 000 km) pa zato potrebujemo neobnovljivo raketno gorivo. Vsi sateliti na visokih tirnicah imajo zato simetrično konstrukcijo, predvsem povsem simetrična krila s sončnimi celicami. Posredni učinek pritiska sončeve svetlobe - albedo učinek znaša približno 10% neposrednega.

6.2.1 Primeri učinka motečih sil na Keplerjeve elemente

Iz tabele 6.1 je razvidno koliko približno znaša učinek posamezne moteče sile v absolutnem znesku (v enotah pospeška). Pri izračunu efemerid je potrebno poznati učinek motečih sil na posamezne Keplerjeve elemente.

Učinki motečih sil seveda naraščajo z dolžino loka tirnice, torej čim daljši je čas obravnave tem večji je vpliv na posamezen element.

Tabela 6.2 podaja učinek motečih sil na Keplerjeve elemente tirnic satelitov GPS, in to na 3-urno in 3-dnevno tirnico.

Tabela 6.2 učinek motenj na tirnice satelitov GPS

Motnja	\ddot{r} [ms ⁻²]	3-urna tirnica	3-dnevna tirnica
$[\mu/r]$	(0,56)	–	
J_{20}	$5 \cdot 10^{-5}$	2 km	14 km
koef. više stopnje	$3 \cdot 10^{-7}$	50 – 80 m	100 – 1500 m
Sonce in Luna	$5 \cdot 10^{-6}$	5 – 150 m	1000 – 3000 m

Plimovanje čvrste Zemlje	10^{-9}	–	0,5 - 1 m
Plimovanje	10^{-9}	–	0,0 - 2,0
Pritisk sonč. svetlobe	10^{-7}	5 – 10 m	100 - 800 m
Albedo	10^{-9}	-	1 – 1,5 m

Poglejmo sedaj učinek posameznih motečih sil na Keplerjeve elemente. Tabela 6.3 podaja učinek ekvatorskih izboklin (hkrati tudi sploščenosti Zemlje, gre za koeficient J_{20}) oz. koeficiente višje stopnje razvoja potenciala v vrsto po sfernih funkcijah. Vpliv je izračunan glede na 4-urno tirnico satelita GPS.

Tabela 6.3 učinek ekvatorskih izboklin in koef. višje stopnje na tirnice satelitov GPS

Element	učinek ekvatorskih izboklin [m]	učinek koef. višje stopnje [m]
a	2600	20
e	1600	5
i	800	5
Ω	4800	3
$\omega + M$	1200	40

Tabela 6.4 podaja učinek gravitacijske sile Lune na 4-urno tirnico satelita GPS. Vpliv privlačne sile Sonca znaša približno tretjino Luninega vpliva.

Tabela 6.4 učinek privlačne sile Lune na tirnice satelitov GPS (4 ure)

Element	Učinek privlačne sile Lune [m]
a	220
e	140
i	80
Ω	80
$\omega + M$	500

Naslednja tabela 6.5 podaja učinek pritiska sončeve svetlobe na 4-urno tirnico satelita GPS.

Tabela 6.5 učinek pritiska sončeve svetlobe na tirnice satelitov GPS (4 ure)

Element	Učinek pritiska sončeve svetlobe [m]
a	5
e	5
i	2
Ω	5
$\omega + M$	10

Literatura

- Bate R., Mueller D., White J. (1971) Fundamentals of astrodynamics, Dover publications, New York.
- Bond V., Allman M. (1996) Modern astrodynamics, fundamentals and perturbations methods. Princeton University Press, Princeton.
- Borre K. (1995) GPS i landmålingen, Aalborg.
- Bucerius H. (1966) Himmelsmechanik I. Bibliographisches Institut, Manheim.
- Capderou M. (2005) Satellites, Orbits and missions, Springer France, Pariz.
- Curtis D. H. (2005) Orbital mechanics for engineering students, Elsevier - Butterworth Heineman, Amsterdam.
- Čadež A. (1996) Gibanje vesoljskih sond in fizikalne osnove astronavtike, v: D. Matko (ur.) Uporaba vesoljskih tehnologij. Didakta, Radovljica, str. 1-30.
- French A.P., Eibison M.G. (1986) Introduction to classical mechanics. Chapman & Hall, London.
- Goldstein H. (1980) Classical Mechanics. Addison-Wesley, Reading.
- Kladnik R. (1985) Visokošolska fizika, 1. del. DZS, Ljubljana.
- Leick A. (1990) GPS satellite surveying. John Wiley & Sons, New York.
- Meriam J.L. (1975) Dynamics. John Wiley & Sons, New York.
- Milanković M. (1984) Kratka zgodovina astronomije, 1. in 2. del, (prevod Č. Župančič). Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana.
- Montenbruck O., Gill E. (2000) Satellite Orbits. Springer Berlin.
- Müller I. (1989) Reference coordinate systems: an update. v: Sanso, Rummel (ur.) Theory of satellite geodesy and gravity field determination. Lecture notes in earth sciences 25, Springer Berlin, str. 153–196.
- Pavlovčič-Prešeren P. (2003) Metode izračuna tirnic GPS-satelitov za potrebe geodezije, doktorska disertacija, UL FGG, OGeo, Ljubljana.
- Seeber G. (1989) Satellitengeodäsie. Walter de Gruyter, Berlin.
- Serway R.A. (1996) Physics for scientist & engineers with modern physics. 4. izdaja, Saunders college publishing, Philadelphia.
- Sjöberg L.E. (2005) Theory of satellite geodesy, skripta z Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm.
- Strnad J. (1986) Posebna teorija relativnosti. Društvo matematikov, fizikov in astronomov, Ljubljana.
- Šolinc H. (1992) Skozi fiziko z rešenimi nalogami (dinamika – energija). DZS, Ljubljana.
- Thomson T. W. (1961) Introduction to space dynamics. Dover publications, New York.
- Stopar B., Pavlovčič-Prešeren P. (2003) GPS v praksi, študijski pripomoček, UL FGG, OGeo, Ljubljana.
- Vallado D.A. (2001) Fundamentals of Astrodynamics and applications, Microcosm Press, 2. izdaja, El Segundo, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- Vaniček P., Krakiwsky E. (1986) Geodesy: the Concept, 2.izdaja, Elsevier, Amsterdam.
- Vidmar M. (1996) Tirnice umetnih satelitov, v: D. Matko (ur.) Uporaba vesoljskih tehnologij. Didakta, Radovljica, str.31-52.
- Wertz J.R. (ur.) (1978) Spacecraft attitude determination and control. D. Reidel publishing company, Dordrecht.