Kinematične in dinamične osnove (1)

- Gibanje umetnih Zemljinih satelitov in vesoljskih sond proučuje astrodinamika (orbitalna dinamika).

- Gibanje satelitov je podvrženo določenim zakonitostima:
  - Kopernikov nauk – heliocentrična zgradba Osončja;
  - Keplerjevi zakoni;
  - Newtonovi zakoni klasične mehanike;
  - Galilejevo načelo relativnosti in simetrijska načela;
  - principi teorije relativnosti (izjemen napredek tehnologije merjenja).

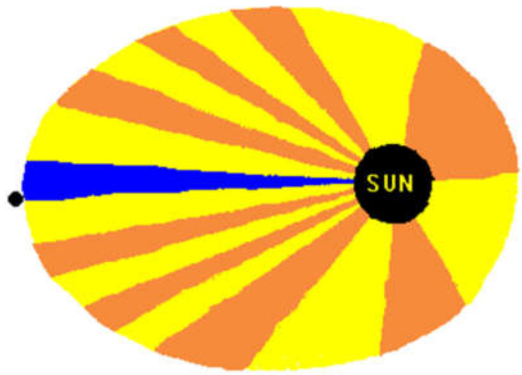
Beseda "satelit" - etimologija*

- In Latin, satelles, satellitis was a bodyguard, soldier, assistant, or accomplice. The origins of the word are obscure. Some claim an Etruscan origin. The word satelite appears in French around 1265 to denote an armed man who carries out the orders of a commander, then in the form satellite, around 1500, to refer to a man depending in some way on another, or accompanying another. It was Kepler, in 1611, who gave it the modern meaning of "satellite" in the Latin term satelles, which he used to refer to the four satellites of Jupiter, recently discovered by Galileo with his refracting telescope. He wrote: De quattuor Jovis satellibus erronibus, that is, "Concerning the four wandering companions of Jupiter". The term "artificial satellite" appeared around 1950.
- In many languages, satellite is expressed by a word coming directly from the Latin term modernised by Kepler, as in the Latin and Anglo-Saxon languages. In others, it is the word for "Moon" which is used, as in Arabic (qamar sanai), meaning "artifical moon". However, certain languages have kept to the first idea of satelles. In modern Greek, the satellite is still a bodyguard, since it is called doryphoros doryphoros, "armed with a spear", built up from "spear" and the suffix , "which carries". In Russian, sputnik is the travel companion (put,"way"). In Chinese, the satellite is called wei xing, "guardian star", a word written with the two ideograms "wei" - guard" and "xing" - star'. The same form is found in Japanese.

*vir: Michel Capderou - Satellites, orbits and missions

Keplerjevi zakoni

- Keplerjevi zakoni:
  1. Središča planetov se gibljejo okrog Sonca po elipsah; v skupnem gorišču teh elips je Sonce.
  2. Zveznica med središčem Sonca in središčem planeta popiše v enakih časovnih presledkih enake ploščine.
  3. Kvadrati obhodnih dob posameznih planetov so v istem razmerju kakor tretje potence velikih polosi njihovih eliptičnih tirov.



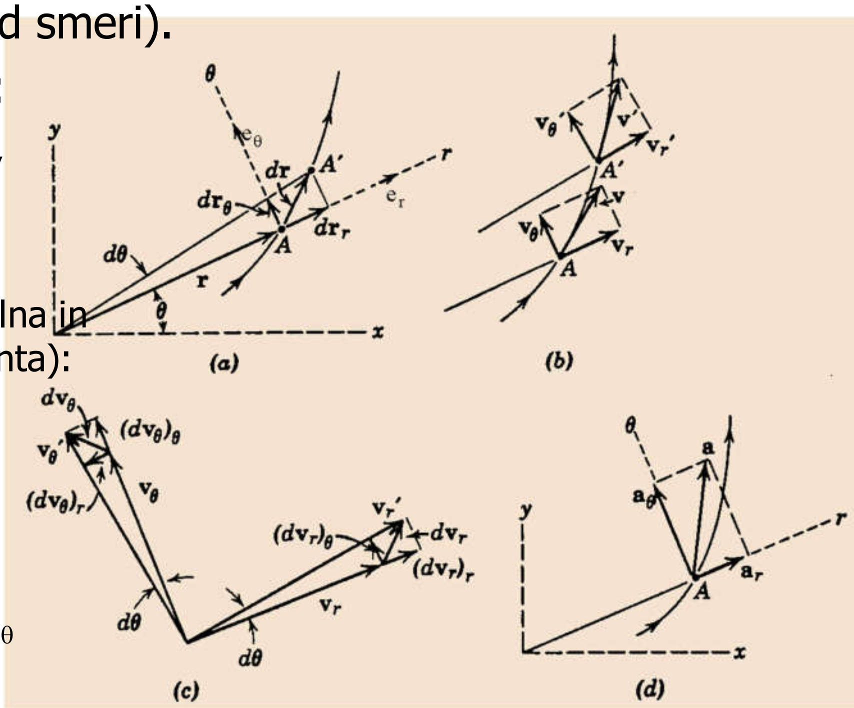
$$\frac{T^2}{a^3} = konst$$

Keplerjevi zakoni (2)

- Keplerjevi zakoni in enačbe razločno in natančno povedo, kako se gibljejo planeti, ne odgovarijo pa na vprašanje, zakaj se tako gibljejo. Tretji Keplerjev zakon je odkril zvezo med gibanji posameznih planetov in vzbujal misel, da morajo imeti ta gibanja skupni vzrok, neko neznano silo, ki sili planete, da se gibljejo. Keplerjevi, empirično izpeljani zakoni, sodijo še v kinematiko, najti skupni vzrok planetnih gibanj pa je naloga dinamike.
- Nalogo je rešil šele Newton v svojih "Načelih" ("Pholosophie naturalis principia mathematica") leta 1687. Postavil je zakone gibanja, s katerimi je opredelil sile in zvezo med silami in pospeški. Zapisal je tudi silo, ki naj bi delovala med poljubnima dvema masama.
  - Newtonov univerzalni gravitacijski zakon: $F = \mathrm{G}\dfrac{m_1 m_2}{l^2}$

Kinematika masne točke

- Sateliti krožijo okoli Zemlje v polju gravitacijske sile $\rightarrow$ centralna sila (njena velikost odvisna samo od oddaljenosti masne točke od središča delovanja in ne od smeri).
- Gibanje točkastega telesa:
  - gibanje točke v prostoru,
  - gibanje točke v ravnini:
    - pravokotne,
    - in polarne koord. (radialna in transverzalna komponenta):



- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

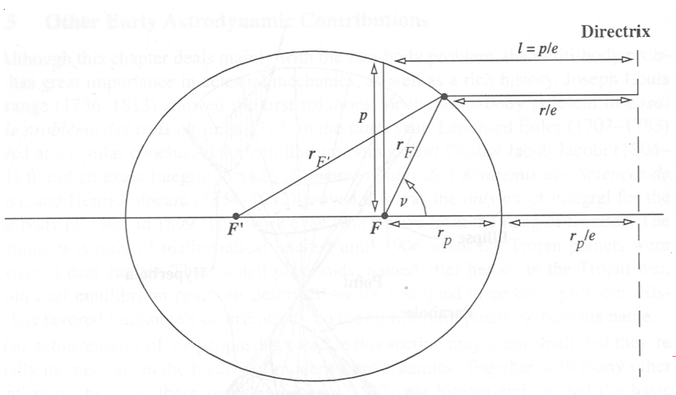
Gibanje masne točke v polju centralne sile

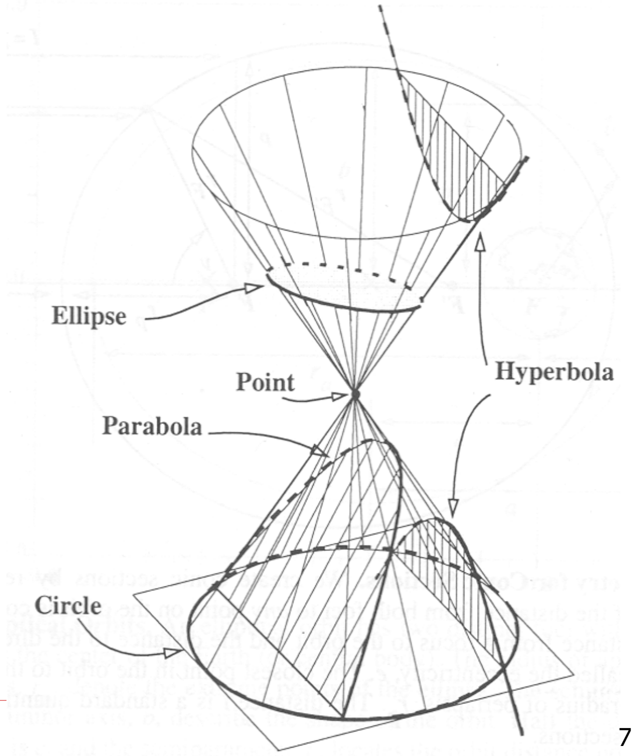
- Gibanje teles v nebesni mehaniki je posledica medsebojnega učinkovanja gravitacijske sile med njima. Zemlja vpliva na gibanje satelita (enako Sonce vpliva na gibanje planetov) tako, kot da bi bila njena snov zbrana v središču, torej učinkuje gravitacijska sila iz središča Zemlje.
- Gravitacijska sile $\rightarrow$ centralna sila.
- Polje centralnih sil je konservativno in sferno simetrično t.j. velikost centralne sile je odvisna samo od oddaljenosti (r) masne točke od središča delovanja sile in ne od smeri.
- Gibanje v polju centralnih sil poteka v obliki stožnic.

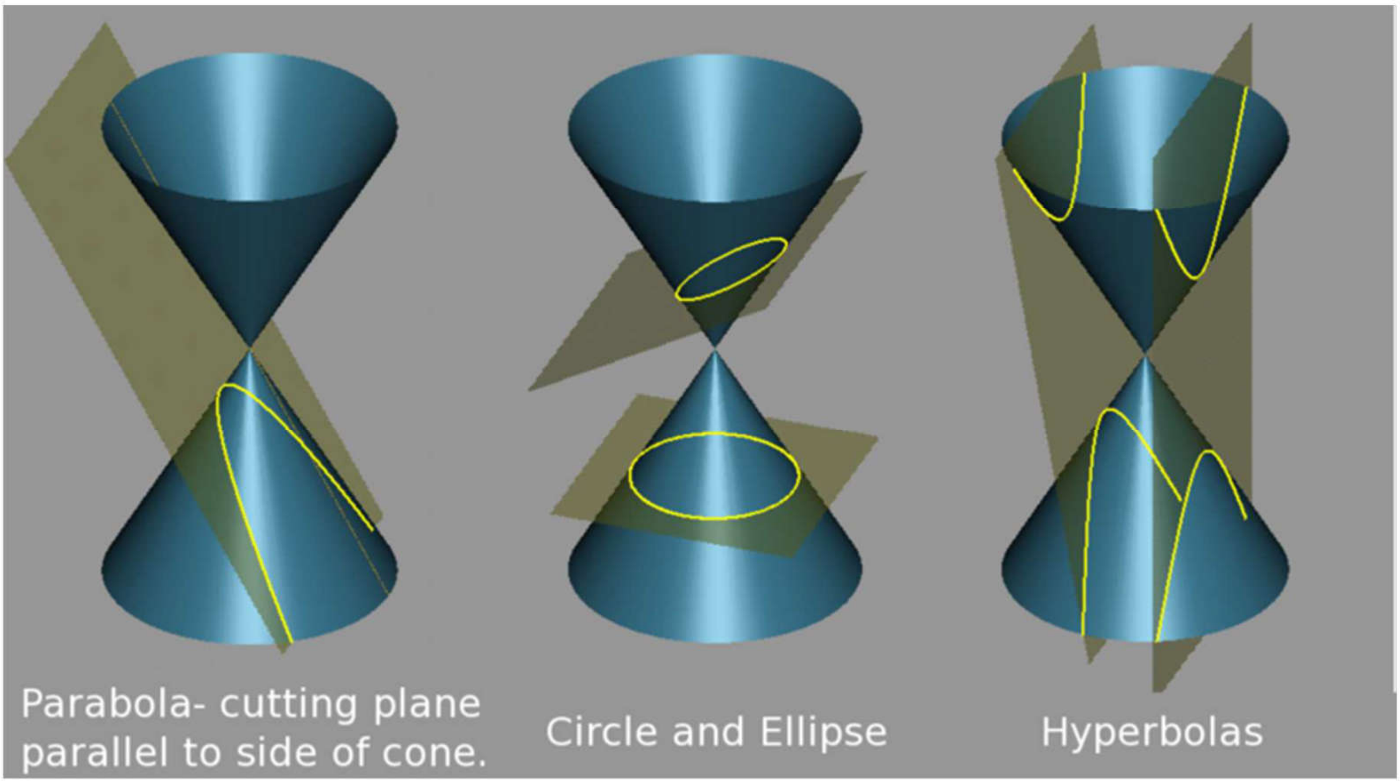
Stožnice (1)

- Po prvem Keplerjevem zakonu je tirnica planeta pri gibanju okoli Sonca elipsa. Elipsa sodi med t.i. stožnice, krivulje 2. reda, ki jih dobimo kot presečišče ravnine in pokončnega stožca.
- Geometrija stožnic:

numerična ekscentriciteta (e)	Vrsta stožnice
$0 < e < 1$	elipsa
$e = 0$	krog
$e > 1$	hiperbola
$e = 1$	parabola



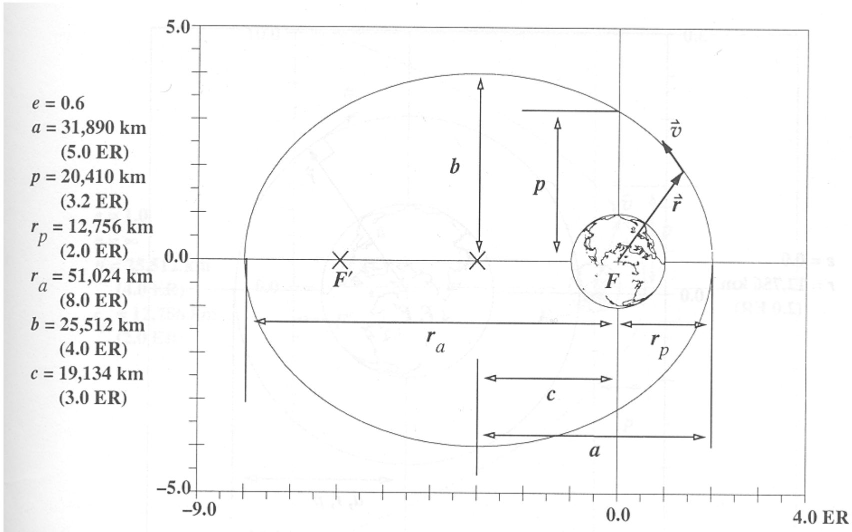




$e=1$ $e=0$ $0<e<1$ $e>1$

Elipsa

- Elementi elipse:
  - num. ekscentriciteta: $e = \dfrac{c}{a}$
  - sploščenost: $f = \dfrac{a-b}{a}$
  - goriščni parameter elipse: p, "semi latus rectum";*
  - Ekstremni točki na elipsi:
    - apocenter (Apogej),
    - pericenter (Perigej)
- Polarna enačba stožnice:

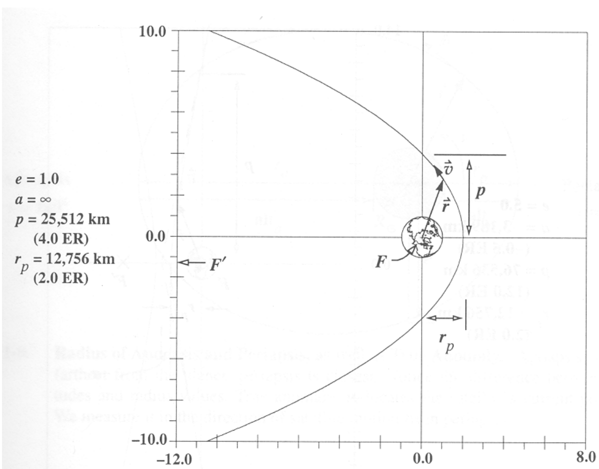


$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}$$

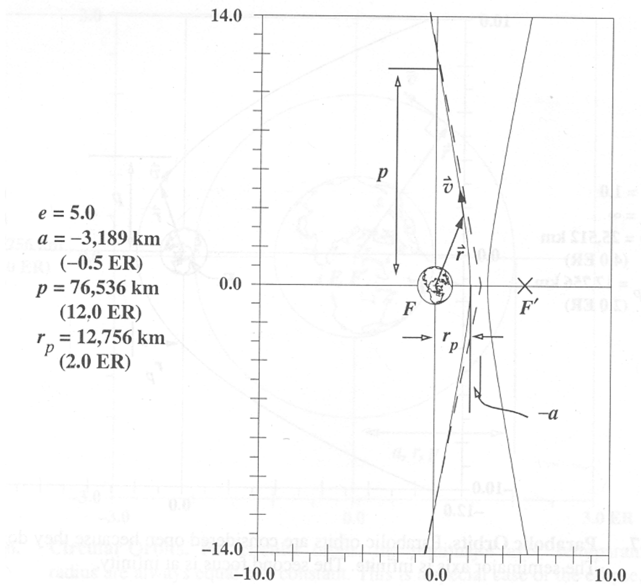
$$p = a(1-e^2) \qquad e = \frac{r_A - r_{Pe}}{r_A + r_{Pe}} \qquad a = \frac{r_{Pe} + r_A}{2}$$

- *"Latus rectum" is a compound of the Latin *latus*, meaning "side," and *rectum*, meaning "straight."

Stožnice (3)



parabola



hiperbola

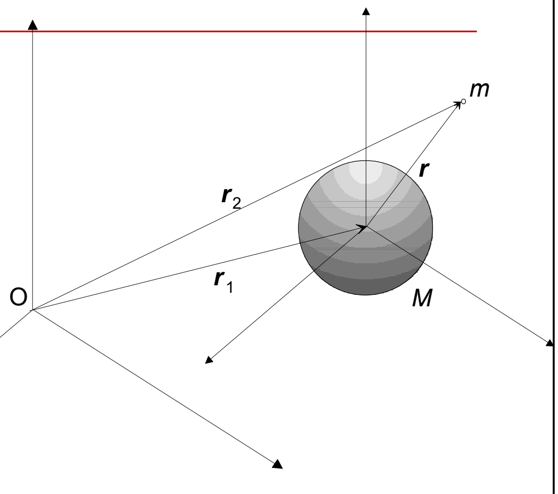
Problem dveh teles (1)

- Gibanje satelitov v gravitacijskem polju Zemlje je podvrženo določenim zakonitostima. Z uvedbo različnih predpostavk lahko oblike in enačbe gibanja satelitov pojasnimo empirično z Keplerjevimi zakoni, vendar tudi analitično s pomočjo Newtonovih zakonov klasične mehanike.
- Gibanje umetnih zemljinih satelitov v gravitacijskem polju Zemlje določamo najlažje z reševanjem t.i. problema dveh teles.
- Problem dveh teles je gibanje dveh nebesnih teles, ki se medsebojno privlačita po gravitacijskem zakonu. V primeru umetnih zemljinih satelitov je ta zanemarljivo majhne mase glede na Zemljo.
- Splošna oblika problema dveh teles:
- "V dveh časovnih trenutkih sta podani položaj in hitrost dveh teles, ki se gibljeta v polju medsebojnega privlačenja. Mase teh teles sta znani. Izračunati je potrebno položaj in hitrost v poljubnem časovnem trenutku."

Problem dveh teles (2)

- Gibanje satelitov obravnavamo kot nemoteno oz. Keplerjevo gibanje. Pri tem smo uvedli naslednje predpostavke:
  - Zemlja je krogla, sestavljena iz homogenih, koncentričnih lupin (to pomeni, da je njeno gravitacijsko polje radialno simetrično); enako je, če Zemljo obravnavamo kot masno točko;
  - masa satelita je zanemarljivo majhna glede mase Zemlje;
  - Zemlja nima atmosfere;
  - pri gibanju satelitov ne upoštevamo privlačnega učinka Lune in Sonca, oz. dodatnih vplivov okolice.
- Na ta način se gibanje satelite spremeni v obravnavo gibanja točke v polju centralne sile $\rightarrow$ "problem enega telesa".

Enačba gibanja satelita (1)



- Zemlja (M, $\boldsymbol{r}_1$) in Satelit (m, $\boldsymbol{r}_2$);
  $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$; $\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$
- Uporabimo II. Newtonov zakon za satelit:
  $$-\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}_2$$
- Za Zemljo hkrati II. in III. N. zakon:
  $$\boldsymbol{F} = M\ddot{\boldsymbol{r}}_1$$
- Enačbo gibanja dobimo, če enačbi odštejemo:
  $$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{1}{M}\boldsymbol{F} - \frac{1}{m}\boldsymbol{F} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\boldsymbol{F}$$ "reducirana masa": $\frac{1}{M} + \frac{1}{m} = \frac{M+m}{Mm}$
- Za satelit in Zemljo hkrati velja gravitacijski zakon: $\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{M+m}{Mm}G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$,
  $$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -G\frac{M+m}{r^3}\boldsymbol{r}$$
- velja $m << M$ (m izpustimo), sledi:

Enačba gibanja satelita (2)

- Enačba gibanja satelita: $\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}$
- To je vektorska diferencialna enačba drugega reda. Za rešitev sistema šestih enačb je potrebno poznati 6 integracijskih konstant, ki določajo gibanje satelita okoli Zemlje. Gibanje satelita ima "6 prostostnih stopenj" $\rightarrow$ 6 elementov satelitovega tira oz. Keplerjeve elipse.
- (μ = $GM_\oplus$ "geocentrična gravitacijska konstanta ")

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Konstante gibanja – ohranitveni zakoni (1)

- Gravitacijsko polje Zemlje kot polje centralne sile je konservativno, torej gibajoči se satelit ne izgublja in ne pridobiva mehanske energije. Prihaja samo do spreminjanja oblik energije, kinetične v potencialno in obratno.

- Pri rotacijskem gibanju nekega telesa spremembo vrtilne količine povzroča tangentna komponenta sile. Gravitacijska sila, je kot centralna sila usmerjena proti središču privlačenja, torej je za pričakovati, da se pri gibanju satelita ohranja tudi vrtilna količina satelita.

Konstante gibanja – ohranitveni zakoni (2)

- Ohranitveni zakoni mehanske energije in vrtilne količine satelita sledijo neposredno iz simetrijskih načel.

- V primeru planetnega oz. satelitskega gibanja gre za izoliran sistem – neodvisen od okolice. Na sistem ne deluje nobena zunanja sila. Na gibanje satelita deluje le polje konservativne gravitacijske sile.

Ohranitev mehanske energije

- Specifična mehanska energija sistema E_M*: $$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E_M$$

- Specifična mehanska energija sistema je vsota kinetične energije satelita in potencialne energije sistema. E_M je konstantna v vseh točkah satelitove tirnice (termin "specifična" se uporablja, ker govorimo o enotski masi).

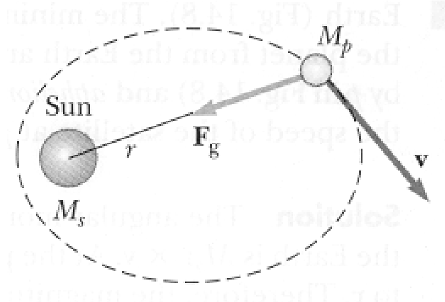
- *Izraz za energijo sistema se dejansko glasi: $$\frac{v^2}{2} + \left(c - \frac{\mu}{r}\right) = E_M$$

- Specifična mehanska energija satelita (oz. telesa) v polju centralne sile je v odvisnosti od hitrosti tega lahko pozitivna, negativna ali pa celo nič. Energijski ohranitveni zakon nam pomaga dokazati prvi Keplerjev zakon, ki pravi, da so tirnice planetov elipse.

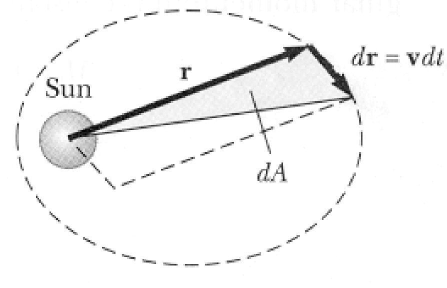
Ohranitev vrtilne količine (L)

- Satelit, ki kroži okoli Zemlje na razdalji krajevnega vektorja $\boldsymbol{r}$ ima vrtilno količino $\boldsymbol{L}$ ("angular momentum"):
  $$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$
- V obravnavi gibanja satelitov se uporablja t.i. specifična vrtilna količina satelita (h):
  $$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{h}$$
- Navor gravitacijske sile $\boldsymbol{M}$ ("torque"):
- Navor gravitacijske sile pri gibanju satelita je nič (smer njenega delovanja je vzporedna krajevnemu vektorju $\boldsymbol{r}$ → vrtilna količina je konstantna!

- Ker se vrtilna količina tekom gibanja ohranja, pomeni, da je satelitova tirnica omejena na ravnino, določeno z vektorjima $\boldsymbol{r}$ in $\boldsymbol{v}$.



(a)



(b)

- $\boldsymbol{L}$ konst. → pri gibanju satelita se ohranja ravnina v kateri leži tirnica.

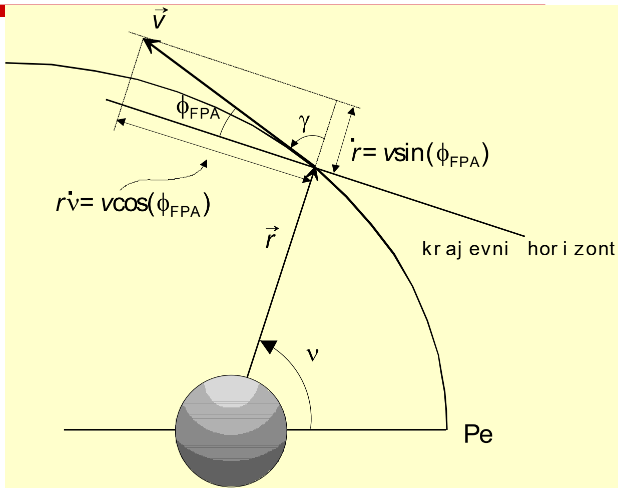
Velikost vektorja vrtilne količine

- Vektor $\boldsymbol{h}$ dobimo iz definicije vektorskega produkta:

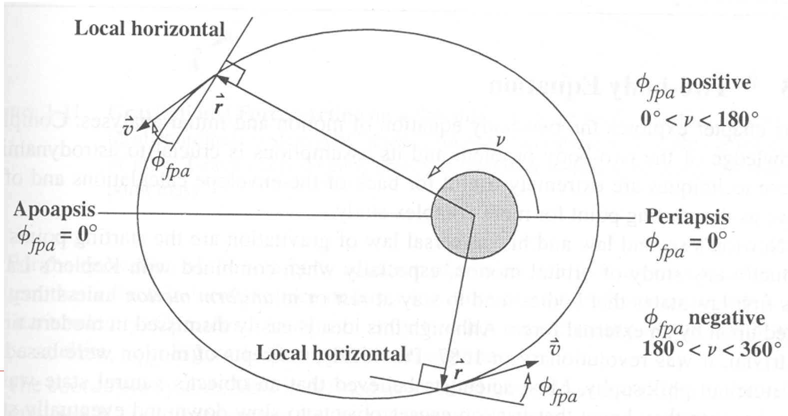
$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = rv \sin\gamma$$

- "Flight path angle" (FPA).

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = rv \cos\phi_{FPA}$$



- Geometrijo kota letenja podaja slika spodaj:



Oblika tirnice – prvi Keplerjev zakon

- Čeprav je diferencialna enačba gibanja relativno enostavna, žal njene rešitve niso.
- Enačbo gibanja pomnožimo vektorski z vektorjem vrtilne količine:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h} = -\frac{\mu}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{h}) \quad \text{oz.} \quad \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h} = \frac{\mu}{r^3}(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{r})$$

....

- Na koncu dobimo skalarno enačbo oblike: $h^2 = \mu r + rB\cos\nu$

kjer sta: $\boldsymbol{B}$ Laplaceov vektor, ν kot med vektorjem $\boldsymbol{B}$ in krajevnim vektorjem $\boldsymbol{r}$.

Rešitev enačbe po r nam da: $$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \frac{B}{\mu}\cos\nu} \Rightarrow p = \frac{h^2}{\mu} \qquad oz. \qquad h = \sqrt{\mu p}$$

- To je enačba tirnice (stožnice) v polarnih koordinatah, kjer sta polarni koordinati krajevni vektor r in polarni kot ν (prava anomalija).

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}$$

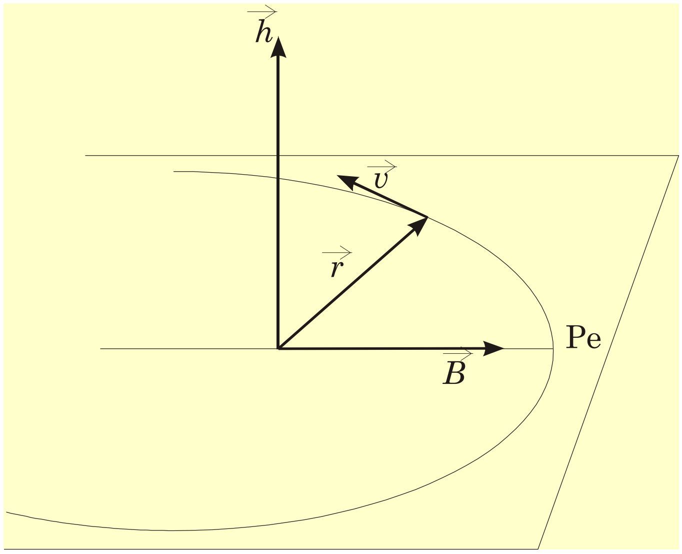
Značilni vektorji na tirnici

- Laplace-Runge-Lenz vektor $\boldsymbol{B}$. Vektor je pravokoten na vektor vrtilne količine, leži v ravnini tirnice (sovpada z apsidno linijo) in je usmerjen proti pericentru:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{h} - \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- Vektor ekscentricitete $\boldsymbol{e}$: $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$

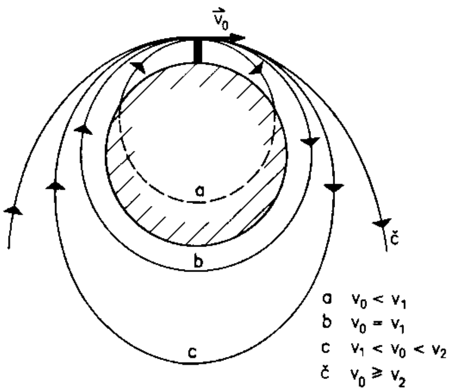
- Vektor $\boldsymbol{e}$ igra pomembno vlogo pri določitvi elementov tirnice satelita.



Zveza med energijo in obliko tirnice (1)

- Kako prirastek v vrtilni količini satelita vpliva na spremembo oblike tirnice?
- Newtonov top
- Vpliv začetne hitrosti na tirnico
- Hitrost, ki je potrebna da bi telo krožilo okoli Zemlje na razdalji r, dobimo iz enačb za vrtilno količino, če vemo, da je za krog: $a = = r = p$.

$$h^2 = p\mu \qquad p = r \qquad r^2 v^2 = r\mu$$



- $v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ za vrednost $r = R_z$ dobimo prvo kozmično (ubežno) hitrost: $v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R_\oplus}}$
- Prva kozmična hitrost (v_1 = 7,909 km/s) je tista najmanjša vodoravna hitrost, ki jo mora imeti telo (satelit) na nadmorski višini h = 0, da ne pade na Zemljo, ampak stalno kroži okoli nje.

Zveza med energijo in obliko tirnice (2)

- Zveza med velikostjo vrtilne količine, goriščnega parametra in celotne mehanske energije sistema Zemlja – satelit?
- Zveza nam poda drugo obliko energijskega izreka: $E_M = -\dfrac{\mu}{2a}$
- Vidimo, da je odvisna samo od mase centralnega telesa in velike polosi!
- Velika polos tirnice a je odvisna samo od celotne mehanske energije sistema. Tudi obratno velja, energija satelita je določena z veliko polosjo njegove tirnice.
- Za eliptično tirnico je energija negativna, ker je a pozitivna količina. Za parabolično tirnico ($a = \propto$, $1/a = 0$) je energija enaka nič; za hiperbolične tirnice ($a < 0$, $1/a < 0$) je energija pozitivna. To pomeni, da v teh primerih lahko satelit doseže neskončno razdaljo od Zemlje.

Zveza med energijo in obliko tirnice (3)

- Vrtilna količina (h) sama določa goriščni parameter (p), energija (E) sama določa polos (a), obe količini skupaj pa določata numerično ekscentriciteto oz. obliko stožnice (e). $e = \sqrt{1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu^2}}$

tirnica elipsa	$e < 1$	E je negativna
tirnica parabola	$e = 1$	$E = 0$
tirnica hiperbola	$e > 1$	E je pozitivna

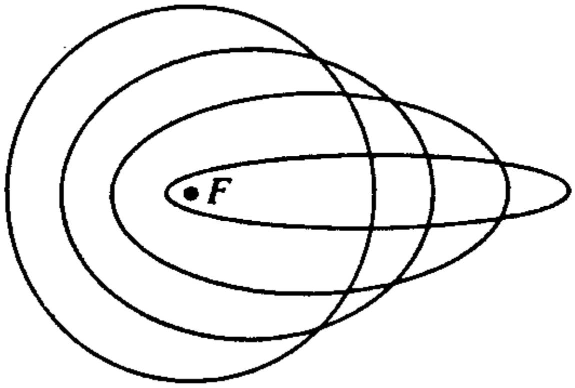
- Specifična mehanska energija sistema (satelita) v polju centralne sile je (v odvisnosti od hitrosti satelita) lahko pozitivna, negativna ali pa celo nič.
- "Vis-viva" enačba za eliptične tirnice: $v^2 = \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)$
- Če začetno hitrost povečamo na $v_2 = \sqrt{2}v_1$, gre po integralu vis–viva, polos $a \to \propto$. Z večanjem hitrosti se veča, napihuje in oddaljuje od Zemlje tudi eliptična tirnica in pri v_2 se zaključena eliptična tirnica pretrga in odpre. Elipsa, po kateri kroži telo, se razpotegne v neskončnost oz. se razpotegne v parabolo.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{R_\oplus}} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

Obhodna doba satelitov

- Tretji Keplerjev zakon: $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
- Druga oblika: $n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

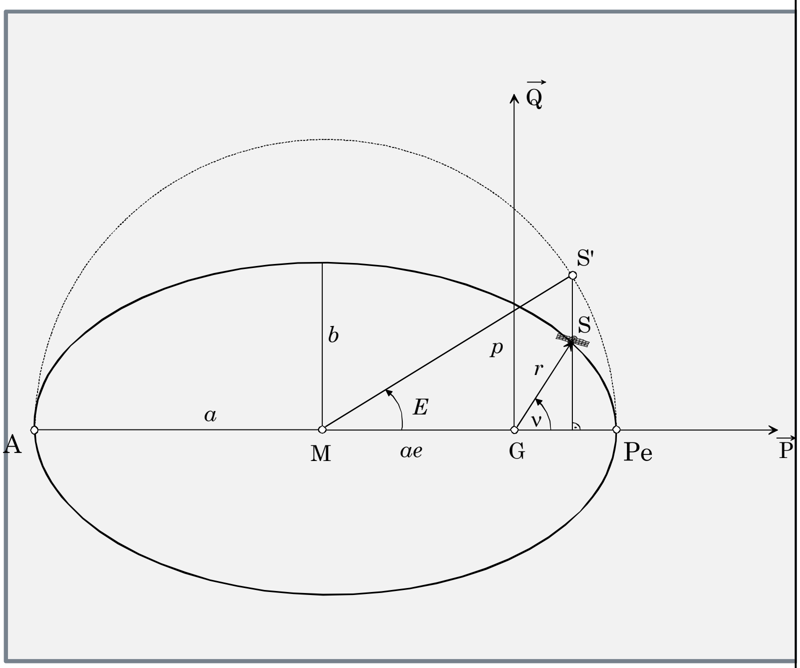
  n je povprečna kotna hitrost (krožna frekvenca tirnice) "mean motion". Izražena je v enotah [rad/čas].
- Tretji Keplerjev zakon potrjuje dejstvo, da vsa telesa na tirnicah z enako veliko polosjo imajo enak obhodni čas.



- Obhodni čas je odvisen od mase centralnega telesa: $M\uparrow \Rightarrow T\downarrow$.

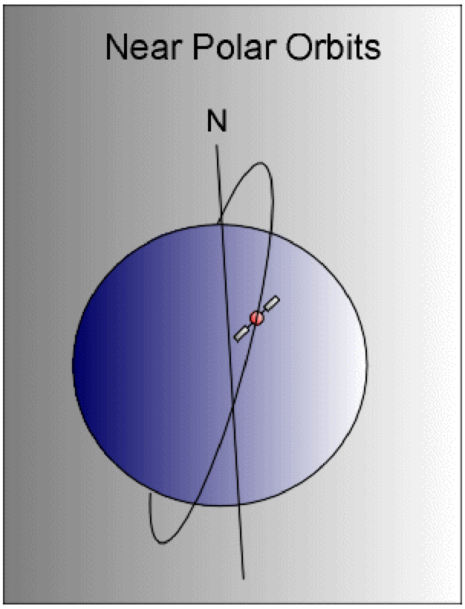
Geometrija satelitovega tira

- Geometrija satelitovega tira je določena z osnovnimi parametri elipse:
- Od gorišča elipse G najbolj oddaljena točka se imenuje apogej ("apogee).
- Gorišču najbližja točka Pe se imenuje perigej ("perigee").
- Velika os elipse, veznica perigeja in apogeja (APe) se imenuje apsidna linija ("lines of apsides").
- r – radij vektor satelita (razdalja GS);
- ν – prava anomalija (kot PeGS),
- E – ekscentrična anomalija (kot PeMS')

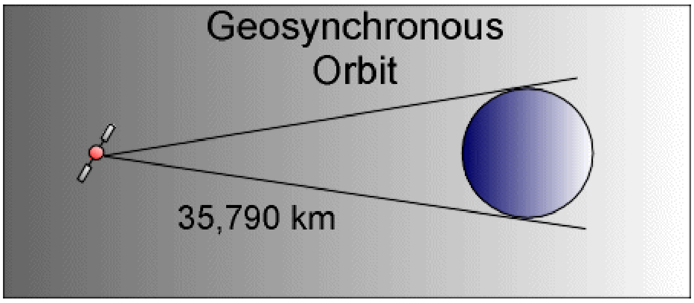


Vrste tirnic (1)

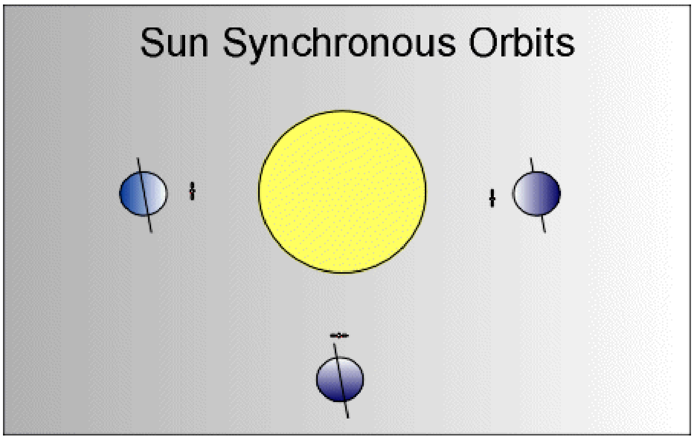
- Glede na lastnosti tirnice:



Molniya (Tundra) tirnice



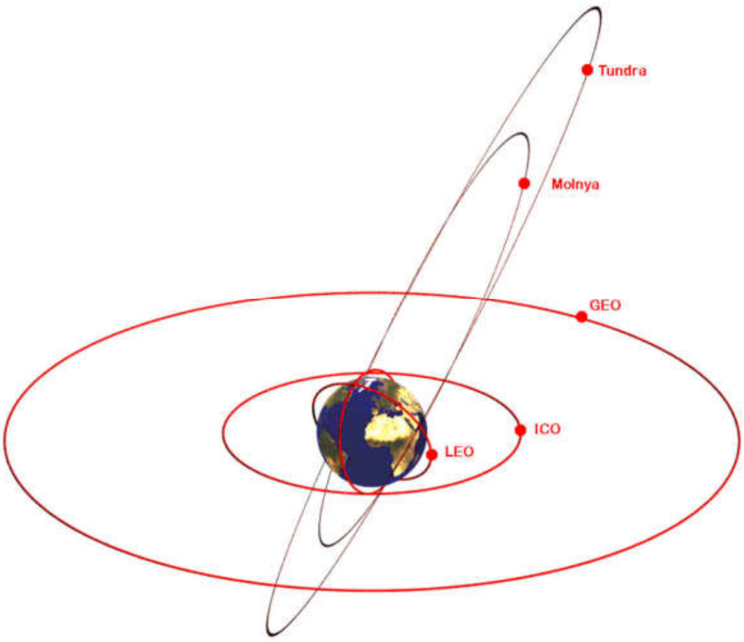
geostacionarni satelit



heliosinhrona tirnica

Vrste tirnic (2)

- Glede na višino letenja:
  - LEO ("Low Earth Orbit")
    h < 1500 km
  - MEO ("Medium Earth Orbit")
    h ~ 20 000 km
  - GEO ("Geostationary Earth Orl
    h = 36 000 km
  - HEO ("High Eccentric Orbit") –
    Molniya (12 ur perioda),
    Tundra tirnice (24 ur perioda).



Tirnice LEO

- Kakšna je približna hitrost v tirnici LEO?

$$v \approx \sqrt{\frac{\mu}{R_\oplus}} = 7{,}909\,\mathrm{km/s} = 28475\ \mathrm{km/h}$$

$$\mathrm{T} \approx 2\pi\sqrt{\frac{R_\oplus^3}{\mu}} = 5060\,\mathrm{s} = 84{,}3\,\mathrm{min}$$

- To sta največja možna krožna hitrost in najkrajši možni obhodni čas okoli Zemlje.

Prevoz satelita v tirnico

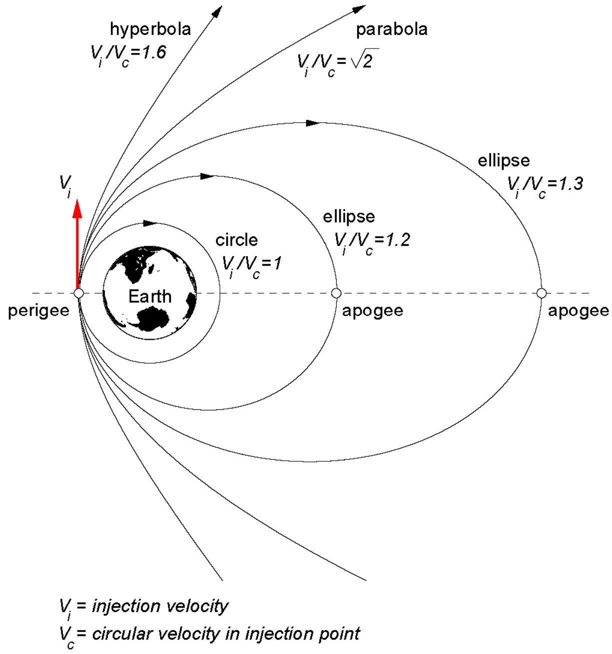
- Ko satelit izstrelimo, je dosežena tirnica odvisna od razmerja med izstrelitveno hitrostjo v_i ("injection velocity") in krožno hitrostjo v_c ("circular velocity").

$$\frac{v_i}{v_c} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{krog}$$

$$1 < \frac{v_i}{v_c} < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{elipsa}$$

$$\frac{v_i}{v_c} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{parabola}$$

$$\frac{v_i}{v_c} > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{hiperbola}$$



Kanonične enote in referenčna tirnica

- Kanonične enote ("canonical units") so v nebesni mehaniki orodje za reševanje različnih nalog, kljub nepoznavanja pravih numeričnih vrednosti konstant, ki nastopajo v enačbah. Gre za t.i. fundamentalne količine, kot so: srednja razdalja Zemlja – Sonce (astronomska enota), mase Sonca, Lune, planetov itd. Teh količin v absolutnem znesku ne poznamo z zadostno natančnostjo.
- Zato privzamemo maso Sonca kot enoto ($M_{\odot}$= 1), enako naredimo s srednjo razdaljo Zemlja – Sonce (astronomska enota), ta postane enotska razdalja. Vse mase in razdalje v Osončju se potem lahko izrazijo prek teh dveh enot. Astronomi takšen "normiran" sistem enot imenujejo kanonične enote.
- V Osončju je torej referenčna tirnica krožna tirnica okoli Sonca s polmerom ene astronomske enote.

Referenčna tirnica pri um. Zemljinih satelitih

- V primeru Zemlje kot centralnega telesa, je referenčna tirnica tista, kjer satelit kroži na minimalni višini nad Zemljo.
- Dolžinska enota (DE) je potem polmer takšne krožne tirnice.
- Časovna enota (ČE) bo takšna, da bo hitrost satelita na takšni hipotetični tirnici enaka 1 DE/ČE.
- Vrednost geocentrične gravitacijske konstante bo potem μ = 1 $DE^3/ČE^2$.
- Primer: DE = ER ("Earth Radius").