Geodetski datum (1)

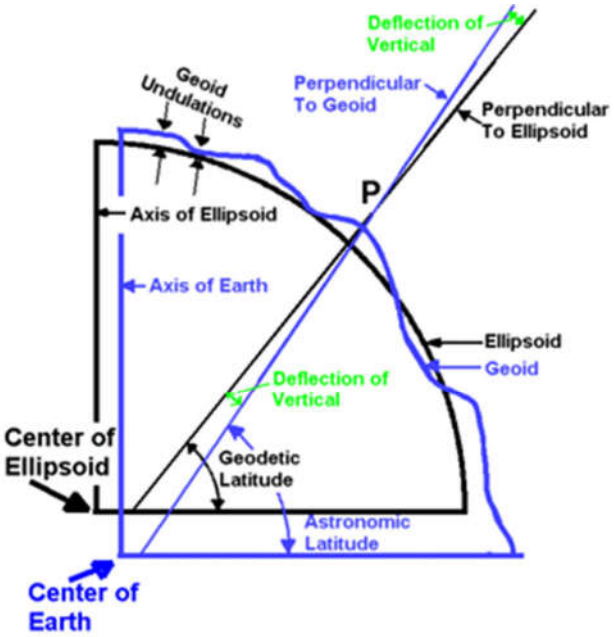
- Geodetski datum je vrsta poljubnih numeričnih ali geometrijskih količin, ki so izhodišče za izračun drugih količin. Več definicij:
  - Geodetski datum najmanjše število parametrov, ki definirajo koordinatni sistem, vključno z njegovim izhodiščem, orientacijo in merilom (C. Jekeli).
  - Geodetski datum določa orientacijo vsakega koordinatnega sistema glede na globalni geocentrični k.s. in s tem tudi glede na telo Zemlje (W. Torge).
  - V geodeziji raje govorimo o referenčnih – koordinatnih ploskvah, ki predstavljajo geodetski datum. Datum je referenčna ploskev določene oblike in velikosti.
- V geodeziji je zgodovina pogojevala ločeno obravnavo med horizontalnimi in višinskimi datumi. Višinski datum predstavlja geoid (ničelna nivojska ploskev), ki ga upodobimo z srednjo morsko gladino.

Geodetski datum (2)

- Horizontalnim datum je referenčna računska ploskev – elipsoid izbrane velikosti in oblike in je izhodišče za izračun koordinat točk na zemeljskem površju.
- Položaj in orientacijo datumske ploskve (referenčnega elipsoida) glede na globalni terestrični koordinatni sistem, pritrjenim na telo Zemlje, določajo trije premiki in trije zasuki osi elipsoida glede na ta koordinatni sistem (op. pri transformaciji nastopa še merilo kot neznanka).

Geodetski datum (3)

- Astrogeodetski datum:
  - Središče referenčnega elipsoida je postavljeno v poljuben položaj glede na težišče Zemlje.
  - Datumska ploskev je bila v časih terestrične geodezije orientirana (umeščena) v telo Zemlje tako, da je na določenem delu zemeljskega površja kar najbolje aproksimirala geoid, ne pa tako, da bi središče elipsoida sovpadalo s težiščem Zemlje.
  - Referenčni elipsoid se je glede na Zemljo orientiral s pomočjo astronomskih in geodetskih opazovanj. Z astronomsko orientacijo se poskušali doseči vzporednost male polosi elipsoida z rotacijsko osjo Zemlje.

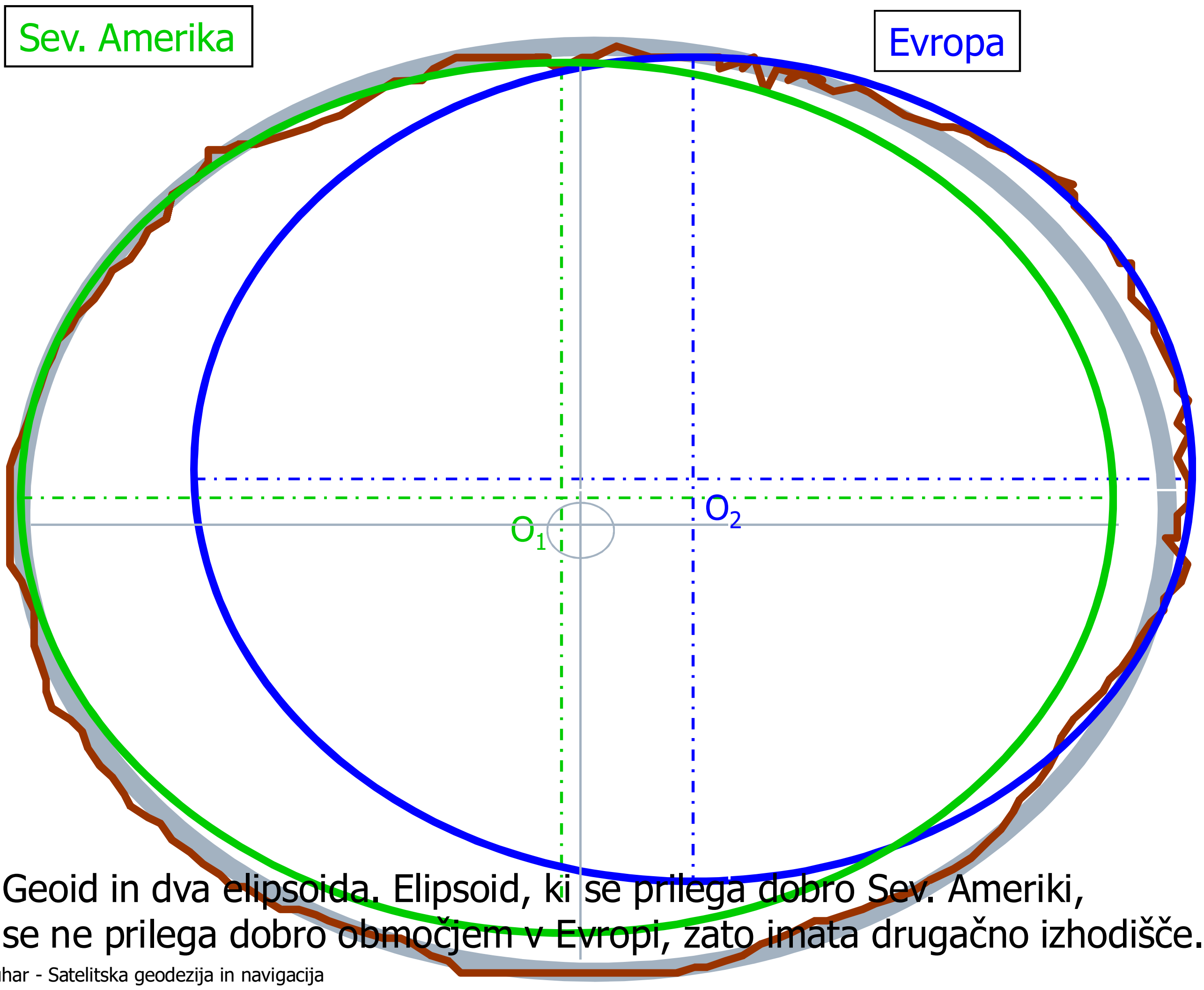


Orientation of Ellipsoid Center With Respect to Earth's Center

Figure 16

Geodetski datum (4)

- Absolutni datum:
  - Središče referenčnega elipsoida je postavljeno v težišče Zemlje. Imenujemo ga tudi geocentrični datum.
  - Določitev geocentričnih datumov je bila možna šele z razvojem satelitske tehnologije.



Geoid in dva elipsoida. Elipsoid, ki se prilega dobro Sev. Ameriki, se ne prilega dobro območjem v Evropi, zato imata drugačno izhodišče.

Elipsoidi skozi čas

Ime	letnica	*a* (m)	*b* (m)	1/*f*	$e^2 10^{-3}$
Bessel	1841	6 377 397	6 356 079	299,15	6,67431
Clarke	1866	6 378 206	6 356 584	294,98	6,76847
Hayford	1909	6 378 388	6 356 912	297,00	6,72265
(International)	(1924)				
Krassovsky	1940	6 378 245	6 356 863	298,3	6,69343
GRS 1967	1967	6 378 160	6 356 774,51	298,247 167	6,69460
GRS 1980	1980	6 378 137,0	6 356 752,3141	298,257 222 101	6,69438
WGS 84	1984	6 378 137,0	6 356 752,3142	298,257 223 563	6,69438

- Današnji elipsoidi so določeni iz satelitskih opazovanj (GRS 67, WGS 72, GRS 80, WGS 84).

Pretvorba in transformacija koordinat

- Mednarodni standard ISO19111* točno loči med pretvorbo koordinat ("coordinate conversion") in transformacijo koordinat ("coordinate transformation").
- Pretvorba je preračun koordinat iz enega koordinatnega sistema v drugi, v istem datumu.
- Transformacija pomeni preračun koordinat med dvema koordinatnima sistemoma, ki se nanašata na dva različna datuma.

- Transformacija koordinat je lahko linearna ali pa nelinearna, sama transformacija pa je lahko nastopi v 2D prostoru oz. 3D prostoru, lahko pa nastopi transformacija iz 3D prostora v 2D prostor.

*ISO9111: Geographic information – Spatial referencing by coordinates

Pretvorba in transformacija koord. - splošno

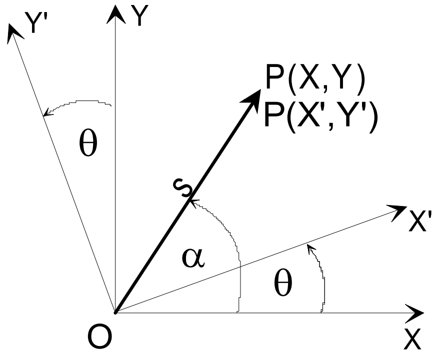
- V splošnem predstavlja pretvorba iz enega v drugi koordinatni sistem linearno transformacijo vektorja $\boldsymbol{x}$ v vektor $\boldsymbol{y}$ v obliki:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}$$

- Vsak element vektorja $\boldsymbol{y}$ je linearna kombinacija elementov vektorja $\boldsymbol{x}$, elementi vektorja $\boldsymbol{t}$ pa predstavljajo vzporedni premik translacijo ("shift") koordinatnih osi. Matrika $\mathbf{M}$ se imenuje transformacijska matrika, ki je v splošnem pravokotna (število vrstic ni enako številu stolpcev). Vektor $\boldsymbol{t}$ se v splošnem imenuje vektor translacije.
- Transformacija med kartezičnimi koordinatnimi sistemi se v splošnem lahko zelo poenostavi z uporabo rotacijskih in refleksijskih (zrcalnih) matrik.

Rotacijske matrike (1)

- Poščimo koordinate vektorja OP po zasuku (rotaciji) koordinatnega sistema x,y za kot θ (dejansko gre za zasuk koordinatnih osi) v novem koordinatnem sistemu $x'y'$.
- Koordinate točke P lahko izrazimo v polarnih koordinatah (radij vektor s in kot α). V izhodiščnem koord. sistemu so pravokotne koordinate točke P:



$$x = s\cos\alpha$$
$$y = s\sin\alpha \qquad (1)$$

V zarotiranem koordinatnem sistemu se koordinate x',y' točke P glasijo:

$$x' = s\cos(\alpha-\theta)$$
$$y' = s\sin(\alpha-\theta) \qquad (2)$$

Zgornji izraz razvijemo v skladu s adicijskim stavkom trigonometrije in dobimo:

$$x' = s\cos\alpha\cos\theta + s\sin\alpha\sin\theta$$
$$y' = s\sin\alpha\cos\theta - s\cos\alpha\sin\theta \qquad (3)$$

Rotacijske matrike (2)

- Če v enačbe (3) vstavimo izraz (1) dobimo:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

- V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Matrika $\boldsymbol{R}$ predstavlja t.i. rotacijsko matriko:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotacije - prikaz s pomočjo baznih vektorjev

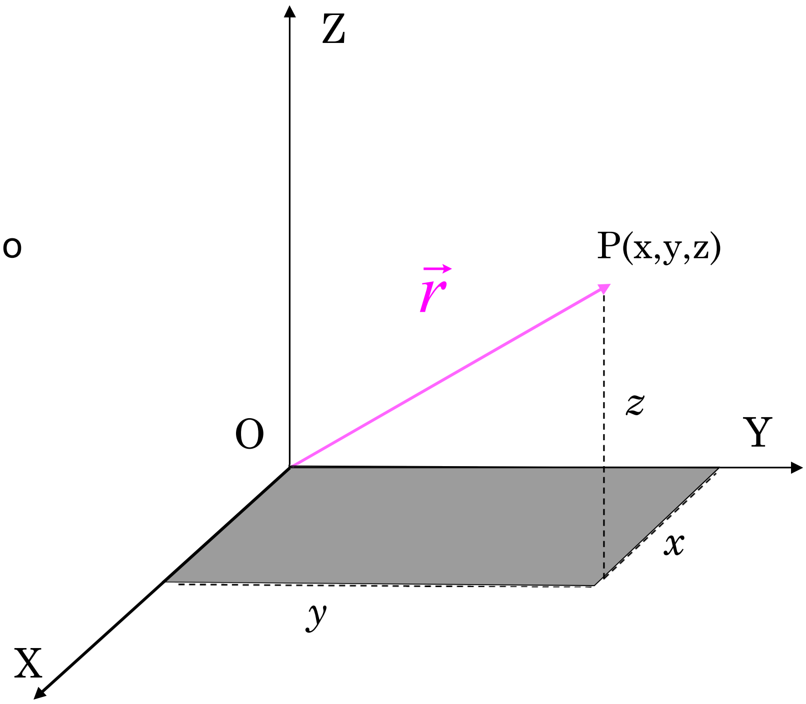
vektor: $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Vsak vektor predstavimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

bazni vektorji (ortonormalni):

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Primer v 2D (1)

$$\boldsymbol{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'}$$

Pomnožimo skalarno levo in desno stran enačbe zaporedoma z ***i, j, i', j'***.

Dobimo:

$$x\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i} = x'\boldsymbol{i'}.\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j'}.\boldsymbol{i}$$
$$x\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i'}.\boldsymbol{j} + y'\boldsymbol{j'}.\boldsymbol{j}$$
$$x\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i'} + y\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i'} = x'\boldsymbol{i'}.\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'}.\boldsymbol{i'}$$
$$x\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j'} + y\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j'} = x'\boldsymbol{i'}.\boldsymbol{j'} + y'\boldsymbol{j'}.\boldsymbol{j'}$$

Skalarni produkt dveh vektorjev je enak produktu njihovih dolžin in kosinusa kota med njima:

$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i'} = \cos\theta$$
$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j'} = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta$$
$$\boldsymbol{j}.\boldsymbol{i'} = \cos(\pi/2 - \theta) = +\sin\theta$$
$$\boldsymbol{j}.\boldsymbol{j'} = \cos\theta$$

Upoštevajoč zgornje produkte in lastnosti ortonormirane baze lahko napišemo enačbe vektorja OP:

Primer v 2D (2)

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$
$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

Predvsem nas zanimajo zadnji dve enačbi! Koordinate točke P po zasuku koordinatnega sistema za kot θ:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

V matrični obliki: $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

oz. $\boldsymbol{x}' = \mathbf{R}\,\boldsymbol{x}$; matrika $\boldsymbol{R}$ je rotacijska matrika $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Lastnosti rotacijskih matrik (1)

- Rotacijske matrike so ortogonalne*:
$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{-1}$$
- Iz tega sledijo lastnosti ortogonalne matrike:
  - skalarni produkt poljubnih dveh različnih stolpcev matrike enak nič;
  - skalarni produkt vsakega od stolpcev samega s seboj je ena, enako velja tudi za vrstice (vsota kvadratov elementov v vrstici je ena);
  - determinanta ortogonalne matrike je: det R = $\pm$ 1
  - produkti ortogonalnih matrik so spet ortogonalni.
- Argument rotacijske matrike iz našega primera je kot zasuka θ. Zaradi ortogonalnosti velja:
$$\boldsymbol{R}^{-1}(\theta) = \boldsymbol{R}(-\theta)$$

***Ortonormirana** matrika bi bil boljši izraz: elementi matrike so smerni kosinusi baznih vektorjev (ti pa so ortonormirani; enotski, medsebojno pravokotni vektoriji).

Lastnosti rotacijskih matrik (2)

- Zgled:
- Matrika **A** ni ortogonalna, saj ne zadošča pogojem ortogonalnosti:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}69 \\ 0{,}19 & 0{,}27 \end{bmatrix}$$

$0{,}36^2 + 0{,}19^2 = 0{,}1657$

- Matrika B je ortogonalna:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}6234 & -0{,}7819 \\ 0{,}7819 & 0{,}6234 \end{bmatrix}$$

$(0{,}6234)^2 + (0{,}7819)^2 = 0{,}9999952$

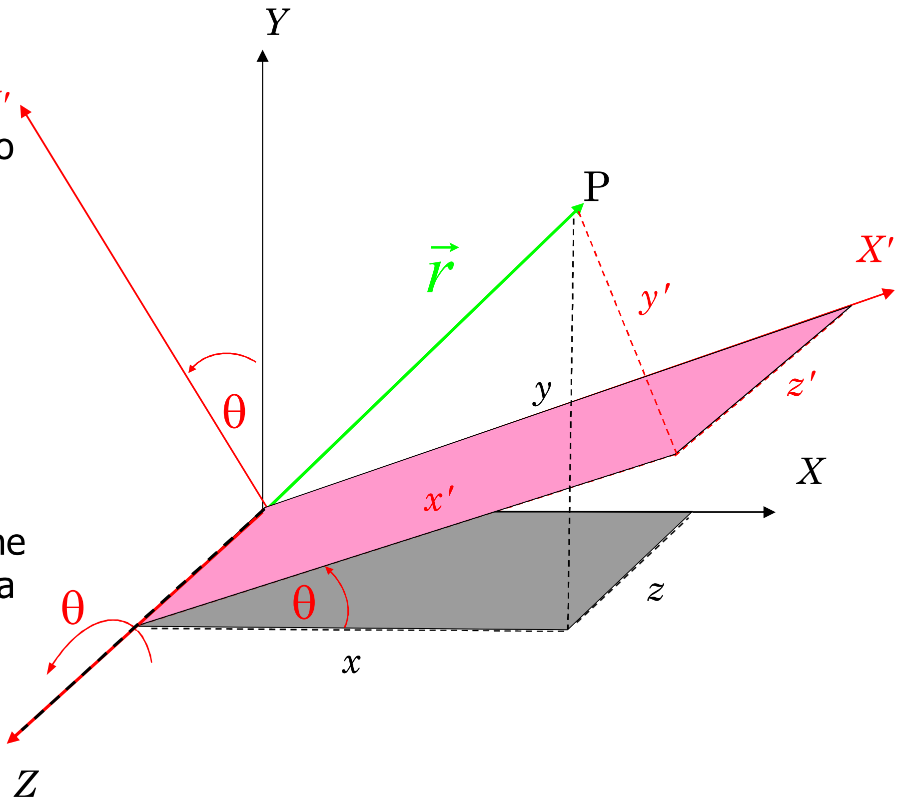
$0{,}6234 \cdot (-0{,}7819) + 0{,}7819 \cdot 0{,}6234 = 0$

Rotacija v 3D prostoru (1)

- Brez zadržkov lahko zadevo razširimo na 3D prostor in napišemo enačbe za rotacijo okoli treh osi kartezičnega k.s.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Enačba zgoraj se lahko predstavi kot rotacija ravnine (x,y) okoli osi pravokotne na to ravnino.



Rotacija v 3D prostoru (2)

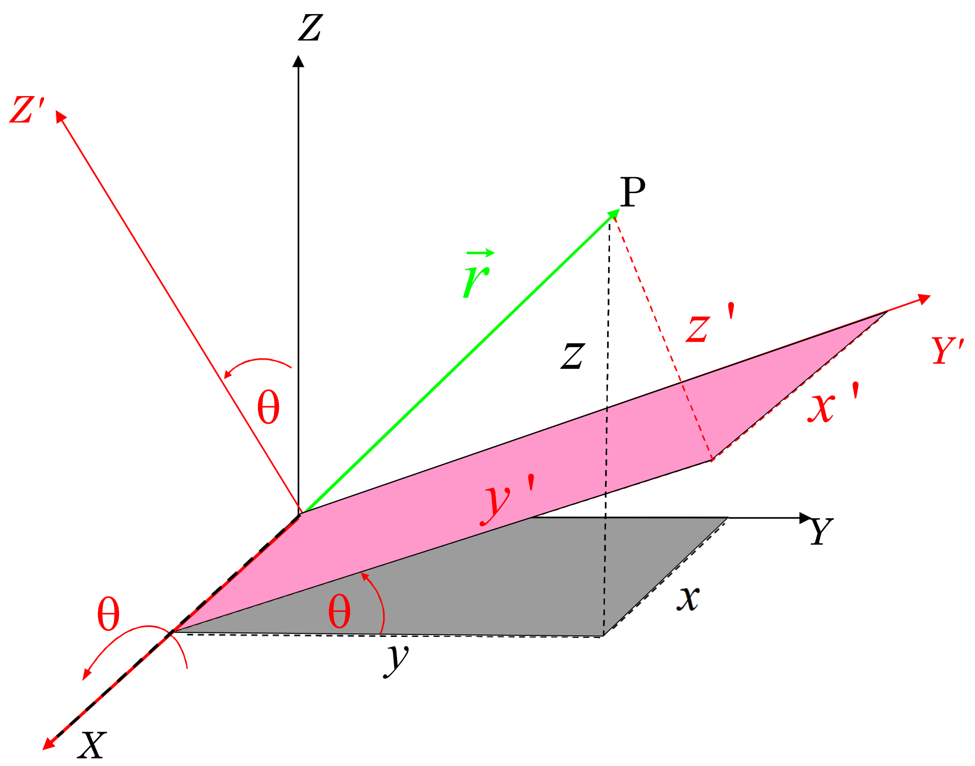
- Koordinate točk vzdolž osi rotacije (Z) ostanejo nespremenjene ($z = z'$), torej velja:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Matrika 3×3 je rotacijska matrika R_3, ki opisuje rotacijo koordinatnega sistema okoli Z-osi za kot θ:

$$\boldsymbol{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija okoli X-osi



Rotacija v 3D prostoru (3)

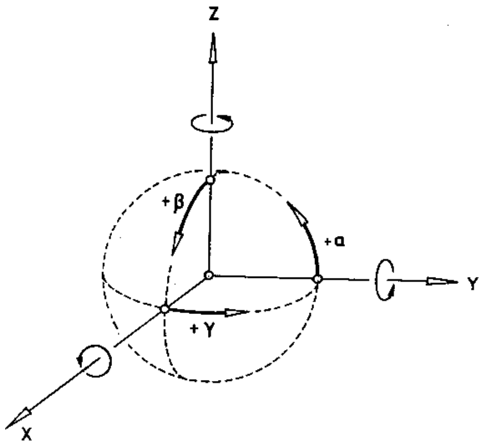
- Podobno lahko predstavimo rotacijo koordinatnega sistema okoli X-osi za kot θ z matriko $R_1(\theta)$:

$$\boldsymbol{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

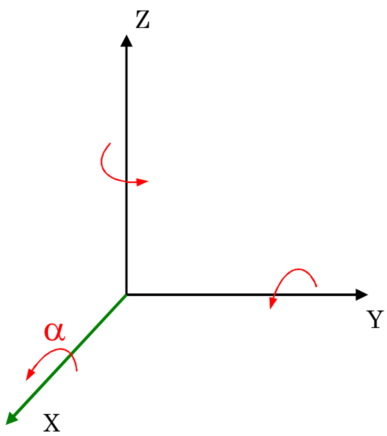
- Na koncu napišimo še rotacijo koordinatnega sistema okoli Y-osi za kot θ z matriko $R_2(\theta)$:

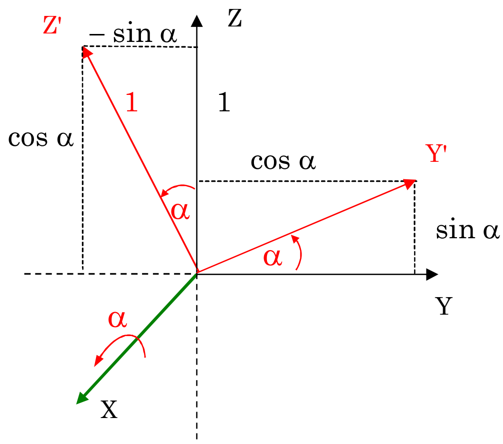
$$\boldsymbol{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Kot zasuka θ je skladno z dogovorom pozitiven v protiurni smeri, gledano od pozitivnega kraka koordinatne osi proti koordinatnemu izhodišču desnega koordinatnega sistema.



Rotacije baznih vektorjev (X-os)





enotski vektorji pred zasukom:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

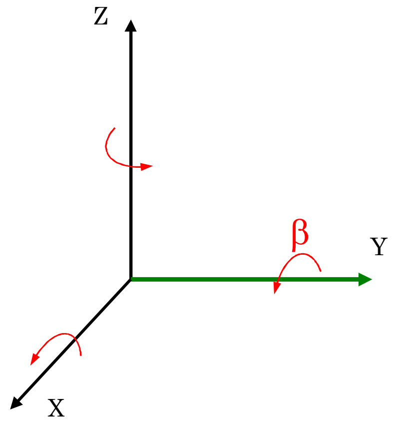
enotski vektorji po zasuku:

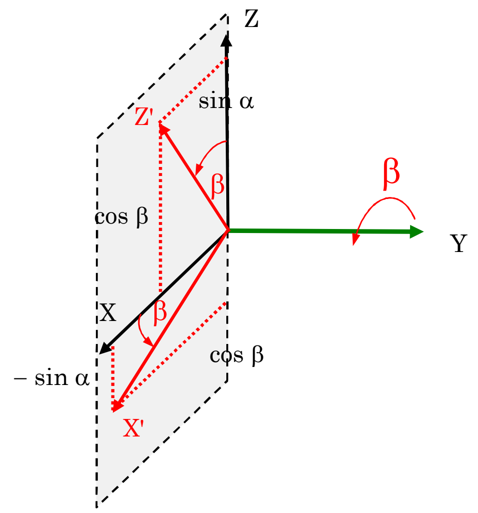
$$\vec{i}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{j}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \ \vec{k}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

zveza z rotacijsko matriko:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Rotacije baznih vektorjev (Y-os)





enotski vektorji po zasuku:

$$\vec{i}\,' = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ -\sin\beta \end{pmatrix},\ \vec{j}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{k}\,' = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix}$$

zveza z rotacijsko matriko:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \\ \vec{k}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Elementi rotacijske matrike kot smerni kosinusi (1)

- Elementi rotacijske matrike v 2D prostoru so smerni kosinusi baznih vektorjev. Tudi v 3D prostoru ni nič drugače. Smerni kosinusi med baznim vektorjem $\boldsymbol{i}'$ osi x', zasukanega koordinatnega sistema in baznimi vektorji izhodiščnih koordinatnih osi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ so:
- $\alpha_1 = \cos\,(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}$
  $\alpha_2 = \cos\,(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}$
  $\alpha_3 = \cos\,(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k}$
- Vektor $\boldsymbol{i}'$ se lahko izrazi prek baznih vektorjev $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:
  $$\boldsymbol{i}' = (\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$$
  $$\boldsymbol{i}' = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{k}$$
- Podobno velja tudi za ostala dva bazna vektorja $\boldsymbol{j}'$ in $\boldsymbol{k}'$ (smerni kosinusi so $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, oz. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$):

$$\boldsymbol{j}' = \beta_1\boldsymbol{i} + \beta_2\boldsymbol{j} + \beta_3\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{k}' = \gamma_1\boldsymbol{i} + \gamma_2\boldsymbol{j} + \gamma_3\boldsymbol{k}$$

Elementi rotacijske matrike kot smerni kosinusi (2)

- S pomočjo smernih kosinusov lahko izrazimo tudi zvezo med koordinatami krajevnega vektorja $\boldsymbol{r}$ v obeh koordinatnih sistemih. Koordinate se lahko predstavijo:

$$x' = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}') = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$
$$y' = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}') = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$$
$$z' = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}') = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z$$

oz. v matrični obliki:

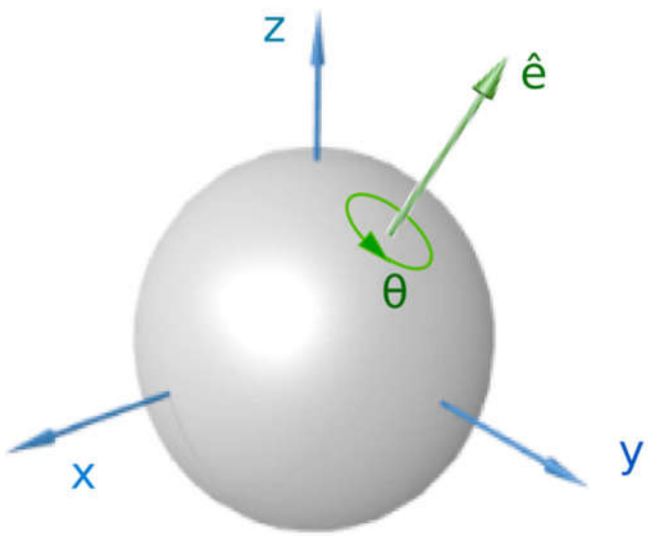
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Matrika v sredini je rotacijska matrika, ki vsebuje 9 elementov (smernih kosinusev). Zaradi ortonormiranosti baznih vektorjev obstajajo med njimi naslednje zveze:
  - $\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = 0, \quad l,m=1,2,3;\ l \neq m$
  - $\alpha_l^2 + \beta_l^2 + \gamma_l^2 = 1 \quad , \ l = 1,2,3$

- Skupno obstaja 9 zvez med elementi rotacijske matrike, vendar zaradi šest zgornjih zvez so samo trije elementi neodvisni: to pa so trije rotacijski koti.

Eulerjev rotacijski teorem

- Eulerjev rotacijski teorem pravi, da lahko poljubno rotacijo v prostoru izrazimo s pomočjo treh parametrov. Skladno s tem, se rotacija koordinatnega sistema lahko predstavi s tremi parametri – koti zasuka okoli posameznih koordinatnih osi. Ti hkrati določajo medsebojno orientacijo dveh koordinatnih sistemov s skupnim izhodiščem.



Kardanske in Eulerjeve rotacije

- V astronomiji in geodeziji sta se uveljavila dva pristopa obravnave zasukov okoli koordinatnih osi:
  - Kardanske rotacije [Gerolamo Cardano (1501-1576)]
  - Eulerjeve rotacije [Leonhard Euler (1707-1783)].
- V obeh primerih se relativna orientacija med dvema koordinatnoma sistemoma vzpostavi s tremi "elementarnimi" postopnimi zasuki okoli posameznih koordinatnih osi. Razlika je v vrstnem redu koordinatnih osi okoli katerih se opravi posamezen zasuk.

Kardanske rotacije

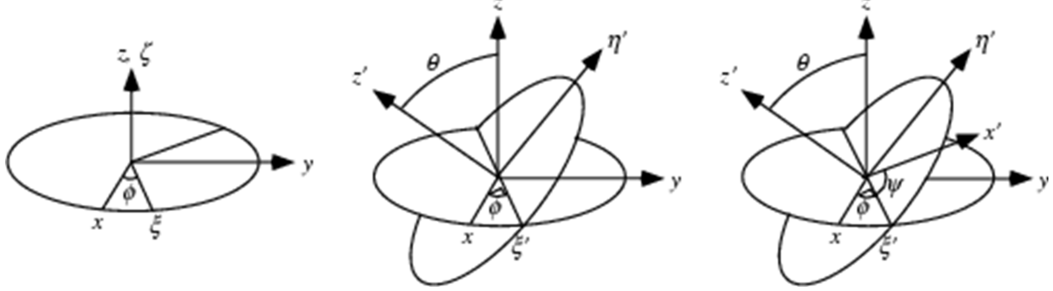
- V primeru kardanskih rotacij se postopni zasuki opravijo okoli prve, druge in tretje koordinatne osi:
- $\boldsymbol{R}_{\mathrm{K}} = \boldsymbol{R}_3(\gamma)\, \boldsymbol{R}_2(\beta)\, \boldsymbol{R}_1(\alpha)$
- Vrstni red rotacij je lahko poljuben, pomembno je samo to, da se rotira okoli vseh koordinatnih osi tj. dve zaporedni rotaciji ne smeta biti okoli iste koordinatne osi.

Primeri

- Kardanska sklopka ("gimbal", "Kardanische Aufhängung"). Osnova za konstrukcijo žiroskopa.

Eulerjeve rotacije (1)

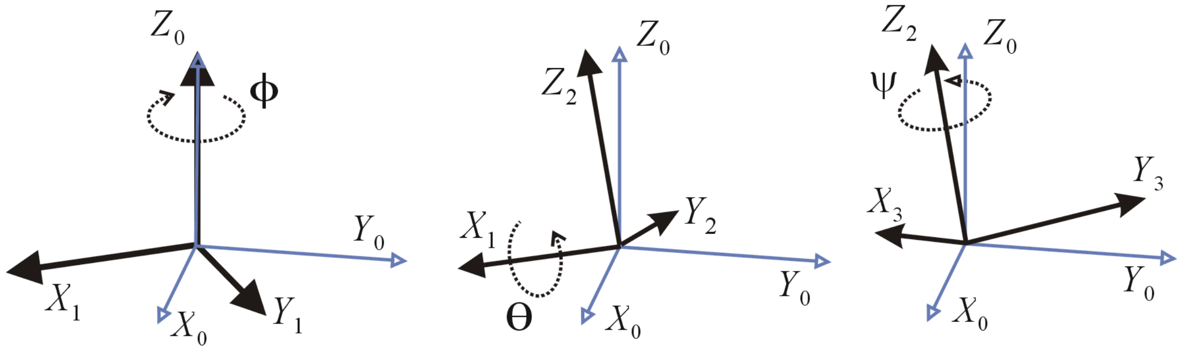
- V primeru Eulerjevih rotacij se postopni zasuki opravijo: prvi zasuk okoli ene osi, drugi zasuk okoli ene izmed dveh preostalih, tretji zasuk pa sledi okoli ene izmed prvih dveh:
- $\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{R}_3(\psi)\, \boldsymbol{R}_1(\theta)\, \boldsymbol{R}_3(\phi)$
- Eulerjeve rotacije so bolj znane z imenom Eulerjevi koti:



- Vrstni red rotacij je v tem primeru naslednji:
  - rotacija okoli z-osi za kot ϕ,
  - rotacija okoli (nove) x-osi za kot θ,
  - rotacija okoli nove z-osi za kot ψ.

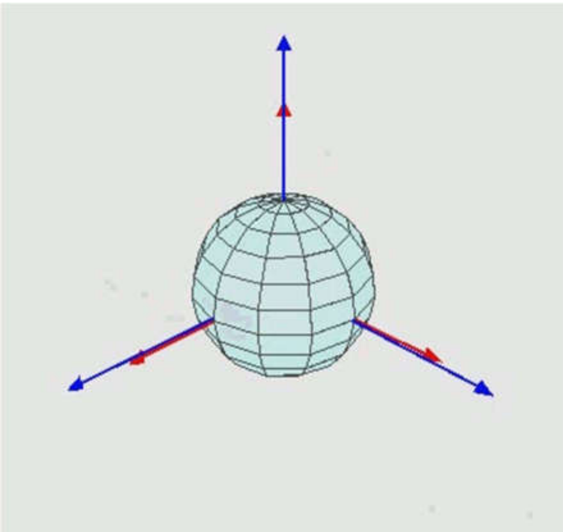
Eulerjeve rotacije (2)

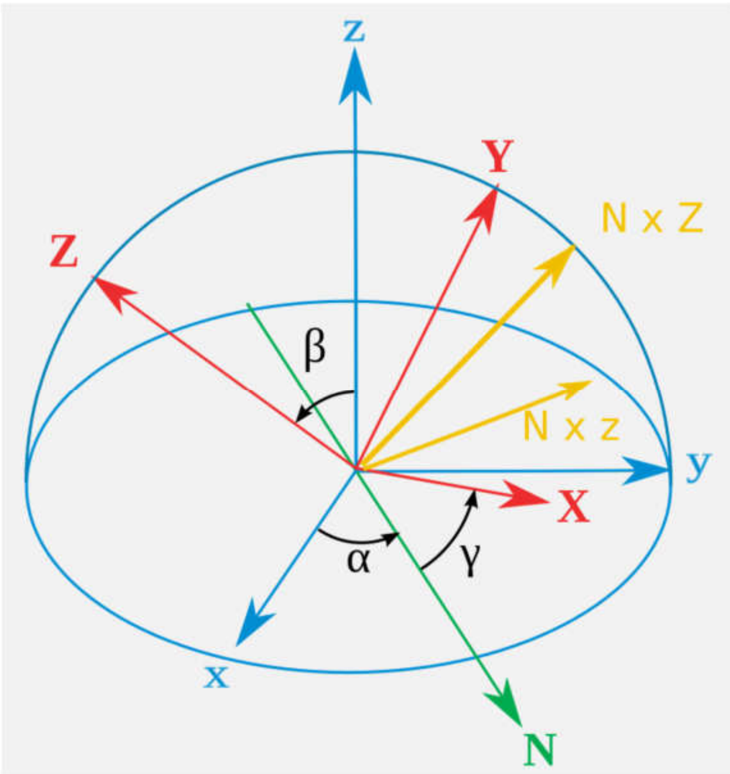
- Pri Eulerjevih rotacijah se pogostokrat srečamo s t.i. x-konvencijo in y-konvencijo. Ime konvencije določa vrstni red druge rotacije, torej pri x-konvenciji po prvi rotaciji okoli z-osi rotiramo drugič okoli (nove - začasne) x-osi, pri y-konvenciji pa je druga rotacija okoli (nove - začasne) y-osi.



na sliki je x- konvencija

Primer, rotacije Z - X - Z



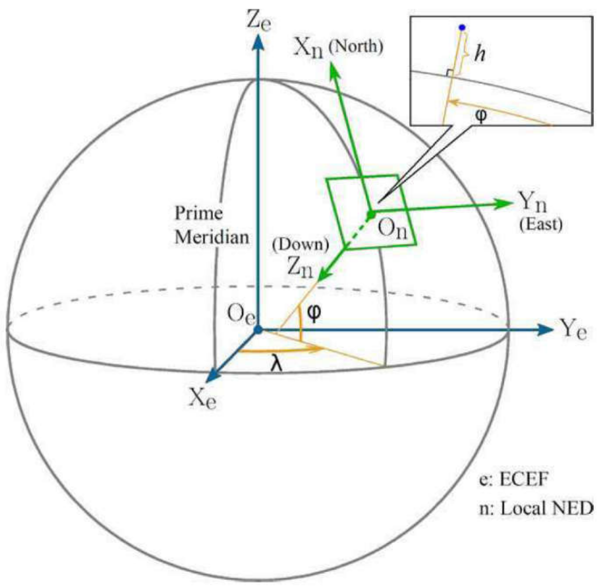


Dodatno o rotacijah

- Skupaj obstaja 12 kombinacij zaporednih rotacij: šest Kardanskih in šest Eulerjevih. Možne kombinacije so:
  - Kardanske rotacije:
    - 1-2-3, 2-3-1, 3-1-2, 1-3-2, 3-2-1, 2-1-3.
  - Eulerjeve rotacije:
    - 1-2-1, 2-3-2, 3-1-3, 1-3-1, 3-2-3, 2-1-2.
- Pri klasičnih geodetskih nalogah transformacije koordinat se uporabljajo Kardanske rotacije z vrstnim redom (največkrat) 3-2-1. V satelitski geodeziji in astrodinamiki se tudi pogosteje uporabljajo Kardanske rotacije.

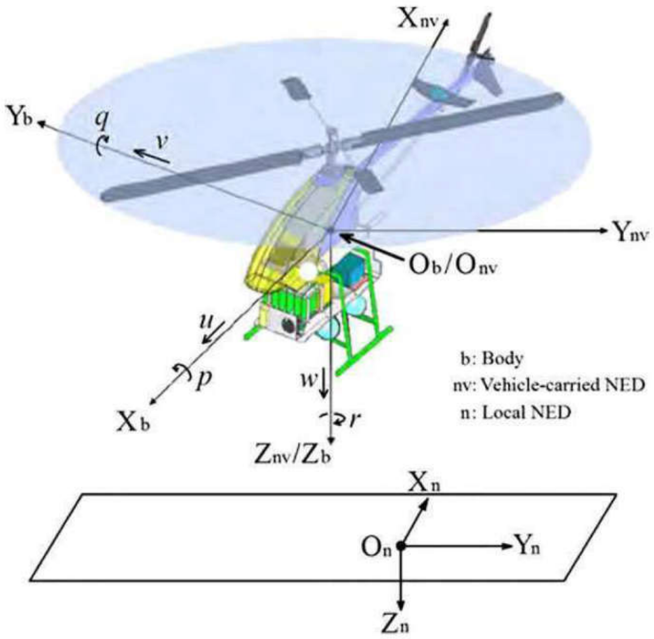
Lokalni NED (LG) koordinatni sistem

- Lokalni NED koord. sistem: North, East, Down k.s.
- zelo podoben LG-sistemu (os Z obrnjena navzdol). Srečamo ga tudi z imenom "Tangent Plane" k.s.
- Navigacija malih brezpilotnih letalnikov se izvaja v tem koord. sistemu.



Vehicle-carried NED koordinatni sistem

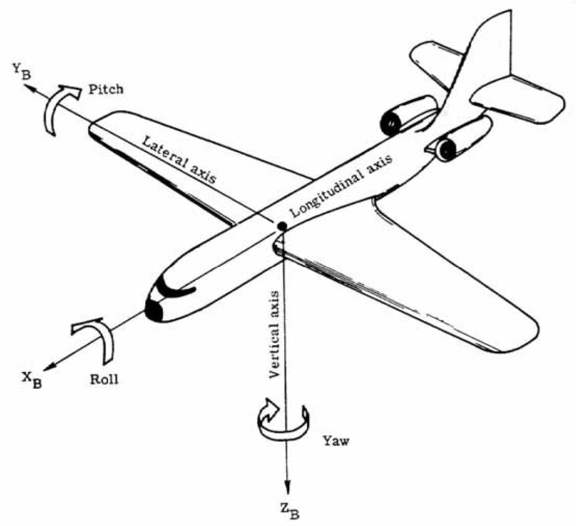
- Vehicle-carried NED koord. sistem
  - izhodišče v težišču zrakopolova,
  - os Z kaže navzdol v smeri normale na elipsoid,
  - os X proti geodetskemu severu,
  - os Y dopolnjuje sistem v desnega (smer vzhoda).
- Strogo gledano lokalni NED sistem in sistem NED zrakopolova ne sovpadata povsem, vendar glede na velikost območja letenja, so razlike zanemarljive.

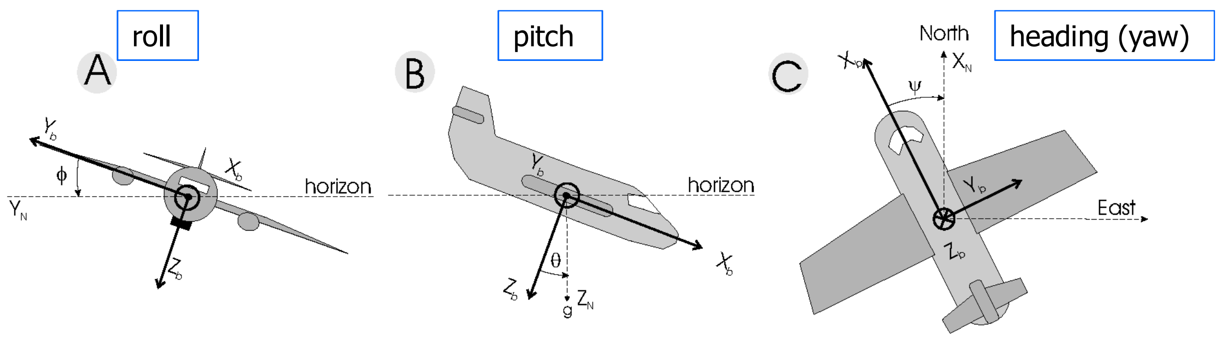


Primer določitve lege ("attitude") plovila

- Pri določitvi lege ("attitude") zrakoplova (letalnika) se uporabljajo naklonski koti:
  - ϕ "roll" (prečni naklonski kot, nagib),
  - θ "pitch" (inklinacija, ali vzdolžni naklonski kot),
  - ψ "heading" ("yaw", ali "azimuth").
- (Roll, pitch, yaw $\Rightarrow$ kotaljenje, naklon, odklon).
- V terminološkem slovarju robotike: nagib, naklon, odklon.

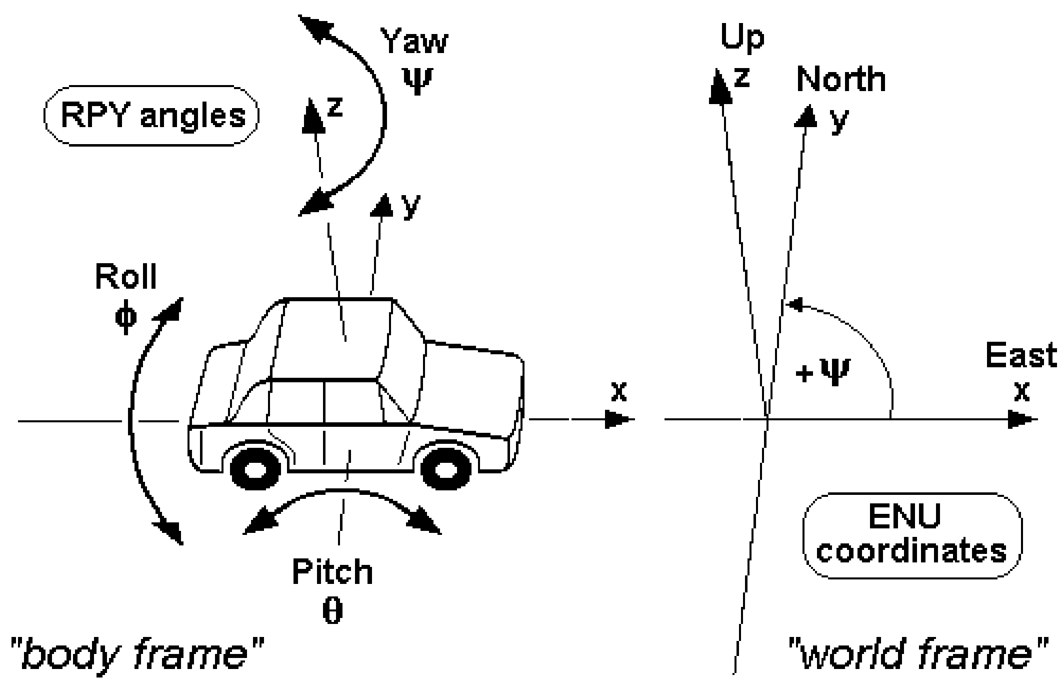
"Roll", "pitch" in "yaw" (heading)



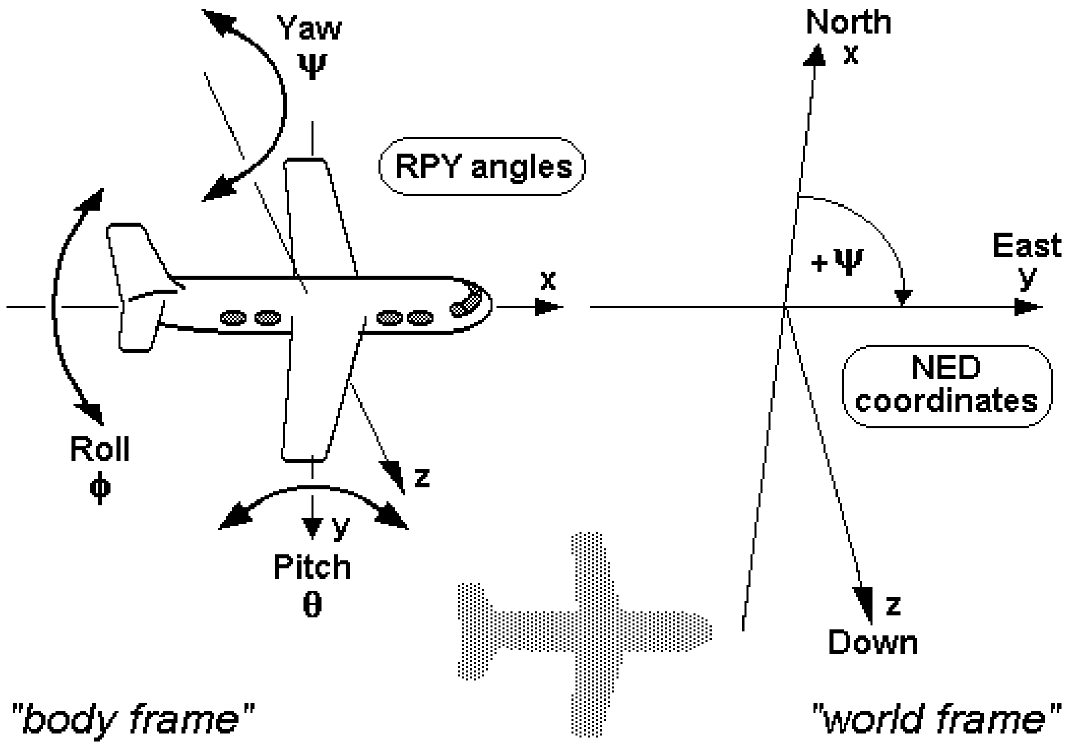


(Roll, pitch, yaw ⇒ (nagib, naklon, odklon)

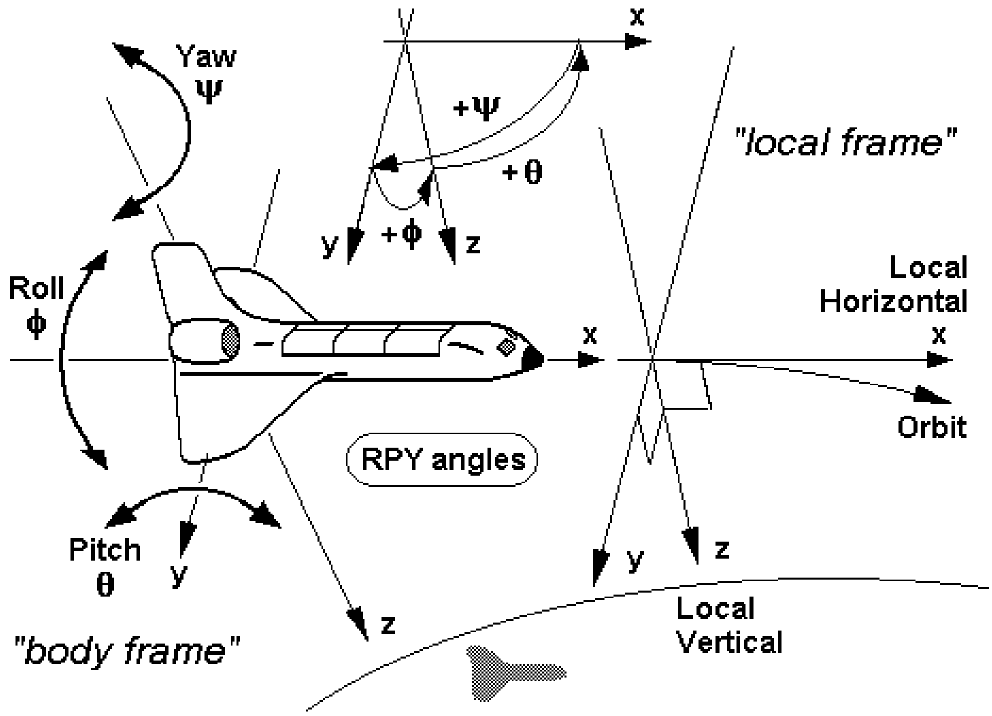
Koti zasuka (r, p, y) za različne primere (1)



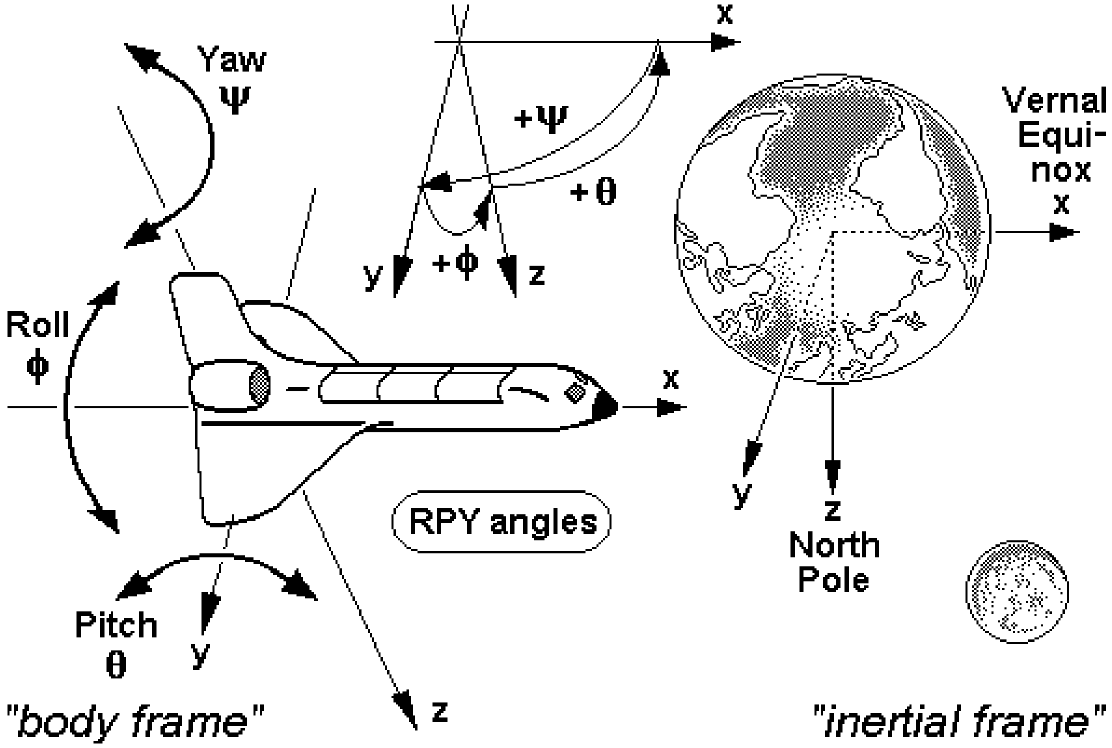
Koti zasuka (r, p, y) za različne primere (2)



Koti zasuka (r, p, y) za različne primere (3)



Koti zasuka (r, p, y) za različne primere (4)



Skupna rotacijska matrika (1)

- Dva koordinatna sistema s skupnim izhodiščem dovedemo do preklopa s tremi rotacijami okoli posameznih koordinatnih osi.
- Rezultat transformacije je odvisen od vrstnega reda rotacij, saj produkt matrik ni komutativen. V primeru:

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{R}_3(\gamma)\,\boldsymbol{R}_2(\beta)\,\boldsymbol{R}_1(\alpha)$$

  množimo z desne strani, prvo rotiramo okoli prve osi, potem okoli druge osi in na koncu okoli tretje osi.
- Skupna rotacijska ($\boldsymbol{R}_{\mathrm{S}}$) matrika nastane kot produkt treh posameznih rotacijskih matrik.
- Skupna rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_{\mathrm{S}}$ je spet ortogonalna, saj je nastala kot produkt treh ortogonalnih matrik:

$$[\boldsymbol{R}_3(\gamma)\,\boldsymbol{R}_2(\beta)\,\boldsymbol{R}_1(\alpha)]^{-1} = [\boldsymbol{R}_3(\gamma)\,\boldsymbol{R}_2(\beta)\,\boldsymbol{R}_1(\alpha)]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{R}_1(-\alpha)\,\boldsymbol{R}_2(-\beta)\,\boldsymbol{R}_3(-\gamma)]$$

Skupna rotacijska matrika (2)

- Skupna rotacijska matrika (kardanska):

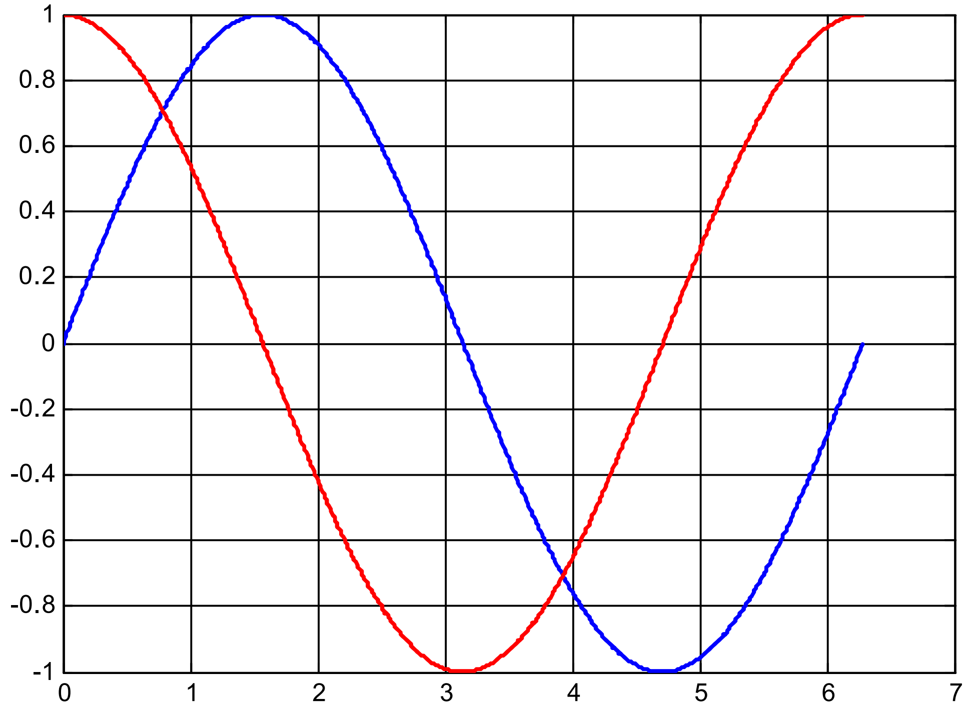
$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

- Skupna rotacijska matrika Eulerjeva:

$$R_{Euler} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta & \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\theta & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Skupna rotacijska matrika - mali koti (1)

- V primeru malih kotov velja: $\cos\theta \approx 1$ in $\sin\theta \approx \theta$



Skupna rotacijska matrika - mali koti (2)

- V primeru majhnih kotov (do 10") lahko vpeljemo aproksimacije.

$$R_s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

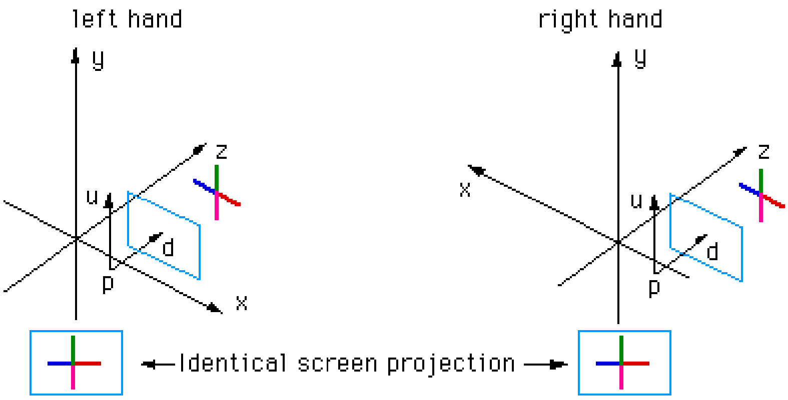
- Vrstni red rotacij v tem primeru ni pomemben.

- Eulerjeve rotacije (mali koti):

$$R_{Euler} = \begin{pmatrix} 1 & \phi+\psi & 0 \\ -(\phi+\psi) & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

Refleksijske (zrcalne) matrike

- Prehod iz desnega v levi koord. sistem je možen s pomočjo refleksije (zrcaljenja) posamezni koordinatnih osi.
Množenje z refleksijsko matriko spremeni predznak posamezne koordinatne osi.



- Refleksijske matrike za posamezne koord. osi se glasijo:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Produkti zrcalnih in rotacijskih matrik

- Produkt samo zrcalnih matrik je komutativen, kot tudi produkt zrcalnih matrik z rotacijsko matriko, če so indeksi obeh matrik enaki (zrcaljenje in rotacija okoli iste osi):

$$\boldsymbol{P}_2\,\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_3\,\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i}\,\boldsymbol{R}_\mathrm{i}(\theta) = \boldsymbol{R}_\mathrm{i}(\theta)\,\boldsymbol{P}_\mathrm{i}\,, \qquad i=1,2,3$$

- Rotacije okoli ene osi so aditivne: $\mathrm{R_i}(\theta)\mathrm{R_i}(\psi) = \mathrm{R_i}(\theta+\psi)$.