# Podobnostna transformacija

To je t.i. izogonalna afina transformacija. Afina transformacija transformira ravne linije v ravne linije in ohranja vzporednost. Afina transformacija je največkrat sestavljena iz rotacije, translacije, spremembe merila in striga. V splošnem pa se spremeni velikost, oblika, položaj in orientacija linij v koordinatnem sistemu. Merilo je odvisno samo od orientacije linije v koordinatnem sistemu, kar pomeni, da so dolžine linij v določeni smeri pomnožene z nekim skalarjem.

Podobnostna transformacija je tista, pri kateri je sprememba merila enaka v vseh smereh. Izogonalna transformacija pomeni da se ohranja velikost kotov, zato jo imenujemo podobnostna (konformna). Koordinatne osi ostajata pravokotni → pogoj ortogonalnosti. Merilo ostaja enako v vseh smereh → pogoj enotnega merila (spremembe merila). Dolžine linij in položaji točk v mreži se lahko spremenijo.

## Podobnostna transformacija v ravnini

Podobnostna transformacija v ravnini je določena s štirimi transformacijskimi parametri:

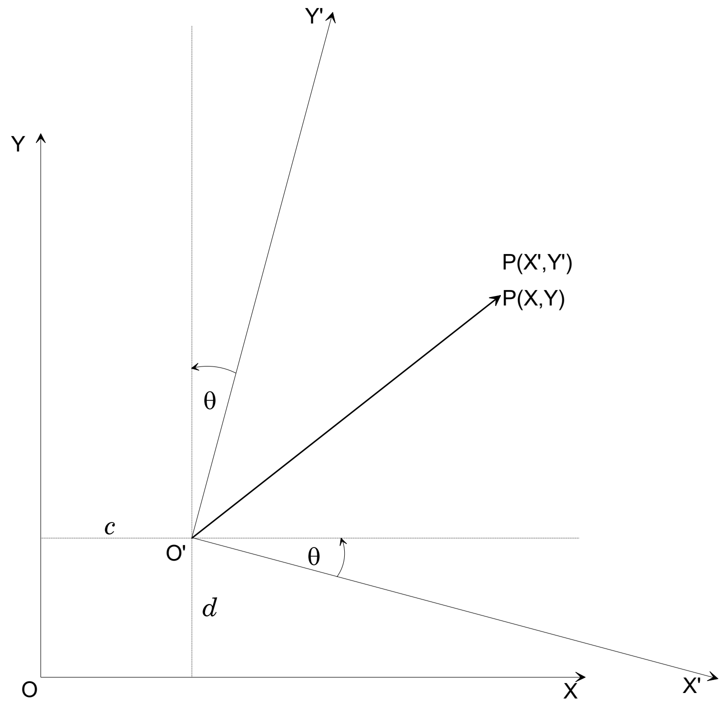
- dve translaciji koordinatnega izhodišča ($c$, $d$),
- kot zasuka koordinatnih osi ($\theta$),
- enotna sresemba merila ($m$).

Kot zasuka je dogovorno privzet pozitiven v levosučni smeri.
Uporaba:

- transformacija koordinat iz lokalnega koordinatnega sistema v nadrejeni (državni) koord. sistem;
- transformacija koordinat iz koordinatnega sistema karte v državni koord. sistem;
- določitev koordinat "prostega stojišča" in določitev koordinat določenih s polarno metodo izmere (enak princip).

Transformacijske parametre izračunamo na osnovi skupnih točk. To so točke, imajo znane koordinate v obeh koordinatnih sistemih. Te točke imenujemo tudi identične* točke. Tako določene transformacijske parametre nato uporabimo za transformacijo novih točk v končni koordinatni sistem.

* V programu SITRA se identične točke imenujejo "vezne" točke.




Slika 1: podobnostna tansformacija v ravnini

Transformacija je določena z enačbami:

$$x = \quad mx'\cos\theta + my'\sin\theta + c$$
$$y = -mx'\sin\theta + my'\cos\theta + d$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Zgornja oblika transformacije je geometrijska, pri čemer sistem žal ni linearen. Z uvedbo okrajšav:

$$a = m\cos\theta$$
$$b = m\sin\theta$$

dobijo enačbe za transformacijo linearno obliko:

$$x = \quad ax' + by' + c$$
$$y = -bx' + ay' + d$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Enačbe lahko pišemo tudi v obliki (lažje za reševanje sistema linearnih enačb):

$$x = ax' + by' + c$$
$$y = ay' - bx' + d$$

Ko rešimo neznana parametra $a$ in $b$, izračunamo merilo in rotacijo:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad\qquad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Za izračun štirih transformacijskih parametrov je potrebno imeti dve skupni točki (štiri enačbe s štirimi neznankami).

Primer: dano $P_1\ (x_1,y_1)$, $P_1\ (x'_1,y'_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_2\ (x'_2,y'_2)$
Neznano: $c$, $d$, $\theta$, $m$;

Sistem enačb ima obliko:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & -x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & -x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$$

Če upeljemo odstopanja (popravke) na skupnih točkah:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & -x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & -x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

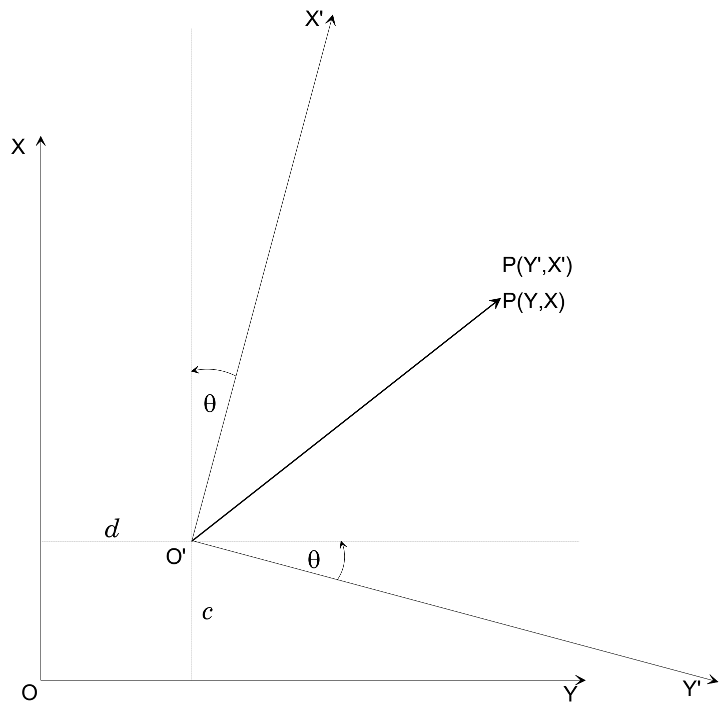
$$\mathbf{v} + \mathbf{f} = \mathbf{B}\Delta$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}; \qquad \mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$$

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\Delta - \mathbf{f}$$

## Geodetski koordinatni sistem XY (usmerjenost koord. osi)




Slika 2

$$x = mx'\cos\theta - my'\sin\theta + c$$
$$y = mx'\sin\theta + my'\cos\theta + d$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

oz. v linearni obliki:

$$x = ax' - by' + c$$
$$y = bx' + ay' + d$$

$$x = ax' - by' + c$$
$$y = ay' + bx' + d$$

Sistem enačb za dve skupni točki:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & -y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & -y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$$

## Podobnostna transformacija z večjim številom skupnih točk - Helmertova transformacija

V primeru, da obstaja več skupnih (identičnih) točk imamo predločeno rešitev. Tudi v tem primeru lahko napišemo enačbe tarnsformacije kot sistem linearnih enačb $\mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$, vendar je sistem protisloven. Ne obstaja tansformacija, ki bi v primeru večjega števila skupnih točk $k$ ($k \geq 2$), te ekzaktno transformirala. Za vsako izbiro transformacijskih parametrov ($a$, $b$, $c$, $d$) lahko nastopi primer:

$$\mathbf{B\Delta} \neq \mathbf{f} \qquad\qquad \mathbf{B}(i,j)\ (i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...n \qquad m \geq n)$$

V tem primeru optimalne transformacijske parametre določamo v postopku izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Govorimo o izravnavi transformacije. V primeru izravnave transformacije obravnavamo koordinate točk kot opazovanja (običajno koordinate točk v končnem koordinatnem sistemu).

$$\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f} \qquad (\mathbf{v} + \mathbf{f} = \mathbf{B\Delta})$$

Določitev transformacijskih parametrov z izravnavo transformacije omogoča kontrolo in oceno pogreškov. Popravki (odstopanja) na skupnih točkah bi naj bili znotraj naprej sprejetih mej. Če so ta večja od sprejetih (dopustnih) mej na posameznih točkah, jih lahko odstranimo iz seznama skupnih točk in jih obravnavamo kot nove točke.

Do rešitve lahko pridemo na dva načina. S klasičnim postopkom izravnave, prek tvorjenja matrike normalnih enačb itd, ali neposredno prek obrazcev, kot jih je predlagal že Helmert*. Dejansko gre pri Helmertovi rešitvi za enak postopek izravnave, vendar tukaj tvorimo samo posamezne člene matrike normalnih enačb in do parametrov pridemo s pomočjo danih obrazcev. Nekoč so za reševanje teh nalog v praksi uporabljali trigonometrični obrazec št. 24.

# Podobnostna transformacija v 3D prostoru

Podobnostna (Helmertova) transformacija v prostoru se uporablja za preračun koordinat iz enega v drugi koordinatni sistem, ki se nanašata na dva različna geodetska datuma. Pogosto se v geodetski literaturi imenuje tudi datumska transformacija. Z uvedbo GNSS-meritev se transformacija pogosto uporablja za preračun koordinat iz regionalnih (državnih) koordinatnih sistemov, ki se nanašajao na astrogeodetske datume v novejše globalne, geocentrične koordinatne sisteme. Primer je prehod iz novega državnega koordinatnega sistema D96 v stari državni koordinatni sistem D48 (ali obratno).

Parametri, ki določajo medsebojni prostorski odnos dveh koordinatnih sistemov, so:

- 3 premiki (translacije) med izhodišči koordinatnih sistemov ($\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$),

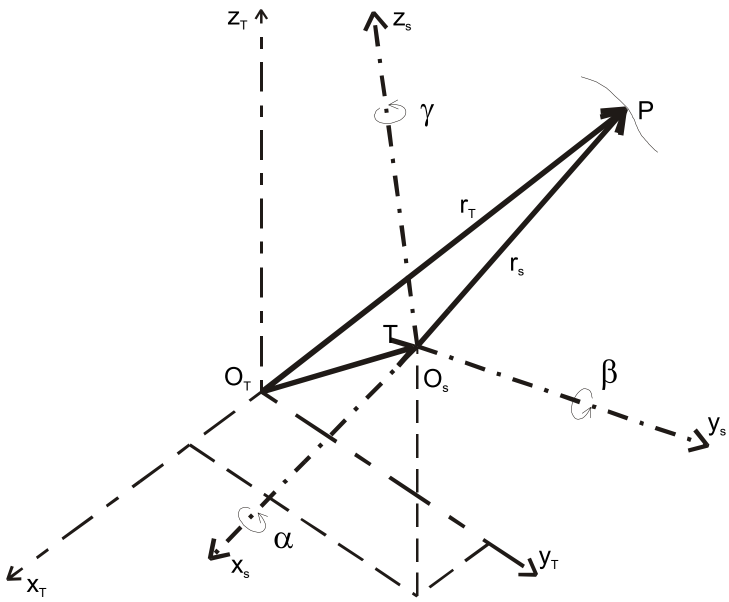
* Friedrich Robert Helmert (1843 - 1917), nemški geodet in matematik

- 3 zasuki enega koord. sistema glede na drugega (zasuki okrog posameznih koordinatnih osi) - ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) in
- sprememba merila pri prehodu iz enega v drug koordinatni sistem ($m$).

V matrični obliki se transformacija glasi:

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = m\boldsymbol{R}\begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

pri čemer so $[X_T, Y_T, Z_T]^T$ koordinate točk v končnem ("target") koordinatnem sistemu, $[X_S, Y_S, Z_S]^T$ pa koordinate točk v izhodiščnem ("source")koordinatnem sistemu.




Slika 3

**R** je skupna rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{R}_3(\gamma)\ \boldsymbol{R}_2(\beta)\ \boldsymbol{R}_1(\alpha)$:

$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

Ta je nastala kot produkt treh posameznih rotacij okoli posameznih koord. osi. Skupna rotacijska matrika je odvisna od vrstnega reda posameznih rotacij.

V primeru majhnih kotov (do 10") lahko vpeljemo znane aproksimacije, ki veljajo pri razvoju kotnih funkcij v Maclaurionovo vrsto: $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$ ..., tako da skupna rotacijska matrika ima obliko:

$$R_s = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Vrstni red rotacij v tem primeru ni pomemben (produkt je komutativen). Vrednosti kotov so v matriki podani v radianih.

Koti zasuka so odvisni od relativnega položaja točk v mreži (odvisni so od baznih vektorjev GNSS opazovanj), ne pa od absolutnega položaja točk. Ocenjene rotacije bodo enake, ne glede na položaj izhodišča. Teoretična predpostavka za mali kot v zgornji enačbi so 3". Vendar, če v transformaciji nastopajo "kratki" bazni vektorji (do 500 km), so "majhne" rotacije lahko tudi 10": na primer rotacija baznega vektorja dolžine 500 km bo povzročila spremembo koordinat 1 mm.

Na vrednost faktorja merila vplivajo spremembe položajev med točkami po transformaciji in oddaljenost točke od koordinatnega izhodišča. Faktor merila lahko določimo na osnovi tridimenzionalnih koordinat točk ali iz razmerja dolžin med točkami v oba koordinatna sistema.

Sprememba merila se odraža v elipsoidnih koordinatah, pri čemer je vpliv na geodetsko dolžino zanemarljiv, na elipsoidno širino je večji, veliko pa vpliva na elipsoidne višine. Na primer sprememba merila 1 ppm vpliva na spremembo geod. širine okrog 0,0007" (pribl. 2 cm), na spremembo v višini pa 6,4 m

Rezultat izravnave transformacije sta dva niza koordinat, ki se razlikujeta za vrednosti transformacijskih parametrov. Merilo, orientacija in rotacija posameznega koordinatnega sistema ostanejo po transformaciji nespremenjeni. Spremenijo pa se posamezne koordinate, dolžine in koti v posameznem koordinatnem sistemu. Premiki točk v mreži so običajno majhni in ne spreminjajo narave celotne mreže. To dejstvo je primerno za uporabo v geodeziji, ker bi naj se koordinate točk mreže ne spremenile, tudi če imamo opravka z velikimi vrednostmi transformacijskih parametrov.

Za določitev $k$ transformacijskih parametrov je najmanjše možno število koordinat, danih v obeh sistemih, $k$. Ta pogoj naj bi bil v splošnem izpolnjen z dvema skupnima točkama, ki imata znane po tri koordinate v vsakem koordinatnem sistemu in tretjo točko, ki ima znano eno koordinato v obeh koordinatnih sistemih. Vendar se je v praksi pokazalo kot potrebno uporabiti najmanj 4 skupne točke, ker na ta način pridobimo dovolj nadštevilnih opazovanj za ustrezno oceno transformacijskih parametrov.

## Transformacija med globalnimi in lokalnimi datumi

Zaradi narave tehnologije GNSS, s katero določamo 3D položaj, opravljamo transformacijo v treh dimenzijah. V praksi nas dejansko zanima samo horizontalna komponenta, saj je višina tukaj samo "nujno zlo".

Če primerjamo koordinate dveh "globalnih" geodetskih datumov, lahko pričakujemo male vrednosti kotov zasuka in merila. Za določitev transformacijskih parametrov uporabimo transformacijo po postopku *Burša-Wolf*. Postopek določa transformacijske parametre tako kot je opisano. Rezultati so dobri, če skupne točke zajemajo čim večje območje (na primer kontinent, velika država).

Vendar, če po tem postopku določamo parametre transformacije med lokalnim in globalnim datumom in je območje skupnih točk majhno (kar je v praksi najbolj pogosto; velja tudi za območje celotne države) ne bomo dobili objektivnih rezultatov. V postopku Burša-Wolf so transformacijski paramatri medsebojno zelo korelirani. Če je območje skupnih točk majhno, je težko ugotoviti vzrok odstopanj na skupnih točkah: ali so ti posledica translacij med koordinatnimi izhodišči ali so posledica kotov zasuka. V tem primeru je najprimerneje izbrati podobnostno transformacijo po postopku *Molodenski- Badekas*. Postopek določa transformacijske parametre translacije in zasuka glede na težiščno točko mreže (skupnih točk). Pri tem se odpravi koreliranost med translacijo in rotacijo. Postopek Molodenski-Badekas da enake vrednosti kotov zasuka in spremembe merila kot postopek Bursa-Wolf, razlika je samo v vrednostih translacije. Ti imajo tudi mnogo večjo a-posteriori natančnost.

## Problem natančnosti prostorske Helmertove transformacije

Matematična formulacija podobnostne transformacije predstavlja zvezno funkcijo. In zamenjava zvezne funkcije s končnim številom točk lahko vodi do napak. Natančnost v postopku izravnave transformacije ocenjenih transformacijskih parametrov je odvisna tudi od prostorske razporeditve točk. Za zanesljivo rešitev je pomembno, da so točke prostorsko pravilno razporejene. V primeru mreže z neenakomerno razporejenimi točkami bomo dobili rešitev, ki bo značilna za področje z večjo gostoto točk.

V osnovni transformacijski model lahko vključimo tudi neznanke, ki predstavljajo sistematične pogreške. Veliko neznank pomeni, da se bo model bolje prilegal podatkom, kar pomeni, da bodo popravki manjši, kot v primeru z manj neznankami. Toda ocenjene vrednosti neznank v tem primeru ne bodo zanesljive, kajti prisotnost večjega števila neznank v modelu daje v splošnem manjše popravke, ne pa tudi točnejših rezultatov.

Pri ocenjevanju faktorja merila bi bilo potrebno ugotoviti:

- ali je faktor merila, določen iz posamezne dolžine, skladen s skupnim faktorjem merila; pri tem bi lahko uporabili običajne teste za ugotavljanje prisotnosti grobih pogreškov,
- ali so stranice enega dela mreže skladne z drugim delom mreže,
- ali so stranice v določeni smeri skladne z ostalimi stranicami,
- če imamo dovolj podatkov, mrežo lahko razdelimo na posamezna področja in ugotavljamo skladnost lokalnega merila s skupnim merilom.

Ko ocenimo vrednosti transformacijskih parametrov, naj bi jih testirali. Smisel statističnega testiranja je v tem primeru ugotavljanje, ali so ocenjene vrednosti transformacijskih parametrov značilno različne od 0. Če so vrednosti transformacijskih parametrov neznačilno različne od 0, privzamemo za vrednosti transformacijskih parametrov vrednosti, enake 0.

Naslednji test naj bi dal odgovor, ali so popravki koordinat točk normalno porazdeljeni. Če popravki niso normalno porazdeljeni, so rezultati lahko napačni zaradi sistematičnih pogreškov koordinat. Po opravljeni izravnavi naj bi s testom ugotavljali prisotnost grobih pogreškov pri vsaki koordinati, kar lahko opravimo s primerjanjem popravkov koordinate z njeno standardno deviacijo.

Omenili smo, da lahko mrežo v primeru, ko imamo v obeh mrežah dovolj skupnih točk, razdelimo na več območij. Vsako območje uporabimo za izračun transformacijskih parametrov enega območja. Posamezne nize transformacijskih parametrov nato testiramo, da ugotovimo, ali so med seboj statistično različni.

Koordinate točk, ki jih izračunamo s pomočjo geodetskih opazovanj so vedno obremenjene s napakami. Napake so različne glede velikosti in vira. Cilj je doseči najboljšo možno natančnost koordinat z ozirom na stroške in ostale zahteve. Geodezija, kot stroka zagotavlja geoinformacisjko infrastrukturo države, zato mora ponuditi metode in produkte (koordinate), ki bodo zadoščali zahtevam vseh naročnikov. Ni razloga, da se napake, ki jih povzroča poenostavljen model transformacije ali računski proces dodatno nalagajo na obstoječe napake.

V geodeziji je običajno, da se koordinate hranijo in predstavijo s toliko števkami, koliko jih potrebujemo da dosežemo dosledno natančnost milimetra. To pomeni, da bi naj geografske koordinate bile shranjene z vsaj 5 decimalkami ločne sekunde. Pri nekaterih nalogah je potrebno to število decimalk celo zvišati (šest). Če se transformacija opravja po korakih, pri čemer se vmesni rezultati shranjujejo v tekstovne datoteke, je potrebno te koordinate zapisati s saj eno decimalko več.

Posebej previdni morami biti, ko dostopamo do javno objavljenih transformacijskih parametrov. Moramo točno vedeti za katero transformacijo veljajo ti parametri (na primer: transformacija iz sistema A v sistem B oz. obratno). Dobro je vedeti s kakšno programsko opremo so pridobljeni ti parametri oz. moramo biti seznanjeni z možnosti programov, ki jih sami uporabljamo. Recimo: dogovorjeni predznak rotacij, ali so pozitivne v smeri urinega kazalca, ali obratno; ali program uporablja točno rotacijsko matriko, ali aproksimativno. Če koti zasuka niso zares "majhni" (< 10"), da omogočajo uporabo aproksimativne rotacijske matrike, se napake kopičijo s kvadratom velikosti kotov zasuka (Reit, 2009).

## Natančnost transformiranih koordinat

Natančnost transformiranih koordinat je odvisna od natančnosti določitve transformacijskih parametrov in od natančnosti koordinat, ki jih transformiramo.

V primeru transformacije koordinat točk v/iz državni koordinatni sistem, imamo opravka tudi z močnimi lokalnimi deformacijami državnega koordinatnega sistema. Zato je potrebno pri natančnosti transformiranega položaja točke upoštevati tudi nenatančnost koordinatnega sistema iz/v katerega položaje točk transformiramo. Običajno je največje odstopanje transformiranih koordinat v smeri višinske komponente položaja točke.

Viri:

Harvey B. 1986. Transformation of 3D Co-ordinates, The Australian surveyor, vol. 33, No. 2.
King R.W., Masters E.G., Rizos C., Stolz A., Collins J., 1985. Surveying with GPS, Dümmler Verlag, Nemčija.
Prešeren P.P., Stopar B., 2000. GPS v geodetski praksi, študijsko gradivo, UL FGG.
Reit Bo-G. 2009. On geodetic transformations, LMV-rapport 2010:1, Lantmäteriet, Gävle, Švedska.