Težnostno polje Zemlje

- Pomen raziskovanja težnostnega polja Zemlje.
- Zunanje težnostno polje Zemlje služi kot referenčni sistem za veliko število geodetskih merskih količin. Težnostno polje moramo dobro poznati, če hočemo te količine reducirati (prevesti) v geometrično točno določen sistem.
- V primeru znanega razporeda vrednosti težnostnega polja na površini Zemlje lahko, v kombinaciji z drugimi geodetskimi meritvami, določimo obliko zemeljske površine (določimo ploskev, ki v najboljši meri ponazarja obliko Zemlje) $\Rightarrow$
  - geoid (kvazigeoid) je najpomembnejša referenčna ploskev za določanje višin, ta pa ni nič drugega kot nivojska ploskev zemeljskega težnostnega polja.

Težnostno polje Zemlje - pomen

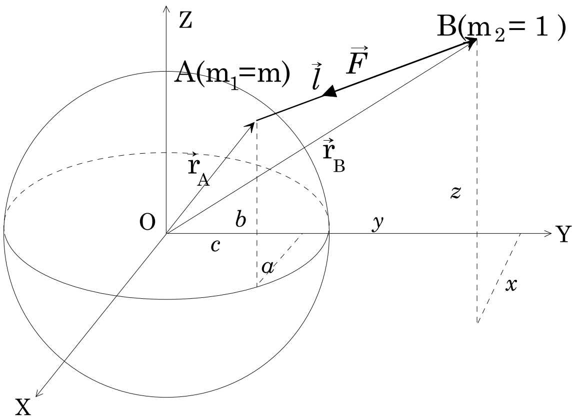
- Umetni Zemljini sateliti krožijo okoli Zemlje kot posledica dejstva njene privlačne sile. Opis in izračun tirov gibanja umetnih zemljinih satelitov ni možen brez poznavanja gravitacijskega polja Zemlje.
- Raziskave zunanjega težnostnega polja Zemlje nam podajo tudi informacije o strukturi in lastnostih Zemljine notranjosti. Z določanjem ustreznih parametrov težnostnega polja geodezija prispeva k raziskavam teoretične geofizike in geologije.

Gravitacijska sila (1)

- Vsa telesa se medsebojno privlačijo z gravitacijsko silo. Ta učinkuje tudi na daljavo in skozi brezzračni prostor. Gravitacijska sila teles je odvisna od njihove mase in od njihove medsebojne oddaljenosti.

- I. Newton (1687):

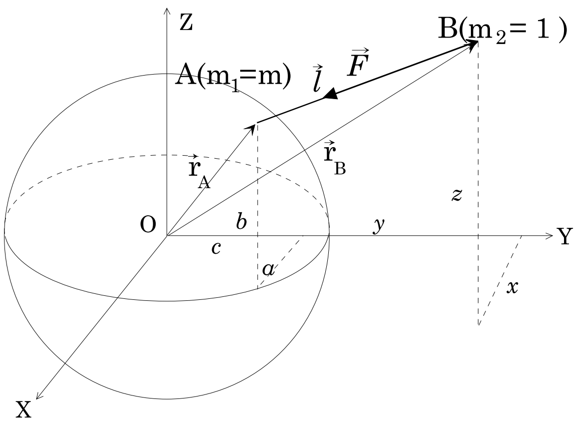
$$F = G\frac{m_1 m_2}{l^2}$$



- "Telo z maso m_1 in telo z maso m_2, ki sta razmaknjeni za l, se medsebojno privlačita z gravitacijsko silo (F)"

Gravitacijska sila (2)

- Sila deluje v smeri veznice težišč obeh teles in sodi med t.i. centralne sile, ki učinkujejo iz središča navzven na vse strani.



- G je gravitacijska konstanta in znaša $G=6,67259 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, relativna negotovost določitve 128 ppm (1,3·10-3).

Gravitacijski potencial (1)

- Newtonov gravitacijski zakon velja za vsa telesa, tudi za telesa na zemeljskem površju. Gravitacijska sila med telesi je zelo šibka (le neznatno vpliva na gibanje teles) in jo večinoma zanemarimo v primerjavi z drugimi silami. Ta sila je pomembna le, če je vsaj eno telo astronomsko, na primer Zemlja.

- Ker je gravitacijska sila vektor, pomeni, da v območju v okolici telesa, na katerem telo učinkuje na druga podobna telesa, deluje vektorsko polje sile. Polje gravitacijske, privlačne sile, se imenuje gravitacijsko polje. Polju grav. (privlačne) sile lahko priredimo skalarno količino $\rightarrow$ "potencial gravitacijske sile" (V).

$$V = G\frac{m}{l}$$

Gravitacijski potencial (2)

- V fizikalnem pomenu je potencial gravitacijske sile v neki točki P negativno delo, ki ga mora opraviti gravitacijska sila na enoto mase, da bi privedla telo iz neskončne oddaljenosti, kjer je potencial $V = 0$, v točko P.

- Parcialni odvodi skalarne funkcije gravitacijskega potenciala so enaki komponentam vektorske funkcije gravitacijske sile.

$$\vec{F} = (F_X, F_Y, F_Z) = grad\, V$$

Gravitacijski potencial Zemlje (1)

- Gravitacijska sila, med telesi, ki niso zanemarljivo majhna v primerjavi z njihovo medsebojno oddaljenostjo, odvisna od oblike, velikosti in lege teles v prostoru. Če razdelimo telo na majhne koščke (masne točke) in poiščemo privlačni vpliv vsakega koščka na obravnavano točko, ter vse vplive seštejemo, dobimo vrednost privlačne sile oz. potenciala v tej točki:

$$V = G\frac{m_1}{l_1} + G\frac{m_2}{l_2} + \ldots.. + G\frac{m_n}{l_n} = G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{l_i}$$

Gravitacijski potencial Zemlje (2)

- Ob predpostavki, da so masne točke v notranjosti telesa razporejene zvezno v notranjosti, lahko preidemo z elementa mase m na zvezno razporejene elemente v prostornini v z gostoto ρ:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

dm – element mase, dv elem. prostornine.

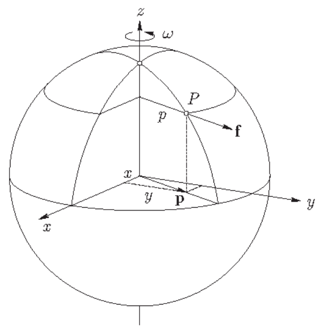
- Vsoto lahko potem napišemo v obliki prostorninskega integrala:

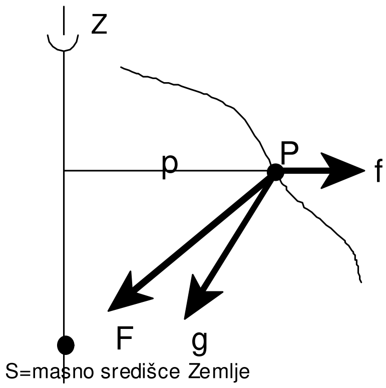
$$V = G\iiint_{\text{Zemlja}}\frac{\mathrm{d}m}{l} = G\iiint_{\text{Zemlja}}\frac{\rho}{l}\mathrm{d}v$$

- Zaradi nepoznavanja dejanskega razporeda gostote v notranjosti Zemlje, enačba geodetom ni v veliko pomoč. Zato poskušamo določiti potencial (težnost) na drugačen način.

Sila teže

- Na točko na površju Zemlje učinkujeta gravitacijska (privlačna) in centrifugalna sila.
- $$\vec{g} = \vec{F} + \vec{f}$$





- Rezultanta delovanja je sila teže g ("gravity").
  Velikost vektorja $\boldsymbol{g}$ je jakost teže, oz. teža, smer vektorja $\boldsymbol{g}$ je težiščnica. Velikost vektorja sile teže – težnost ima fizikalno dimenzijo pospeška.

Potencial sile teže

- Potencial sile teže W (težnostni potencial):

$$W = V + \Phi = G \iiint_{Zemlja} \frac{\rho}{l} dv + \frac{\omega^2}{2} p^2 \qquad \vec{g} = gradW$$

- Enote za g:

količina	SI enote	uporabniške
težnost (težni pospešek)	10^{-2} ms^{-2} 10^{-5} ms^{-2} 10^{-8} ms^{-2}	1 Gal 1 mGal 1 μGal
težnostni potencial	10 m^{2}s^{-2} = = 1 g.p.u.	1 kGalm

- Zaradi sploščenosti Zemlje na polih, sprememb v gostoti Zemljine notranjosti in zaradi različnega centrifugalnega pospeška se vrednost g giblje med g=9,78 ms^{-2} (na ekvatorju) in g=9,83 ms^{-2} (na polih). Srednja vrednost težnega pospeška na površini Zemlje znaša g=9,803 ms^{-2}.

Težnost na Zemlji

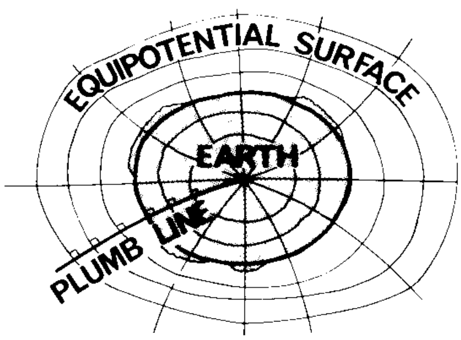
- težnost v kleti FGG: g = 9,80615540 ms^{-2}
- Velikostni razredi in vplivi na izmerjeno vrednost težnega pospeška:

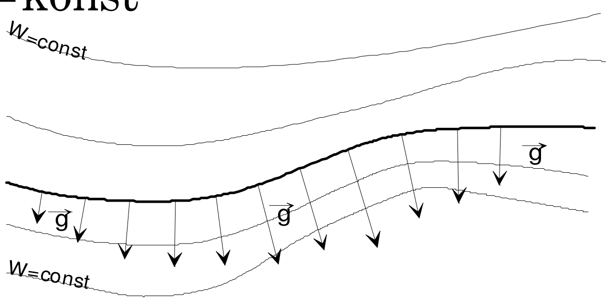
10^{0}	Zemlja kot krogla
10^{-3}	sploščenost in centrifugalni pospešek
10^{-4}	gore, doline, depresije, oceanski hrbti …
10^{-5}	spremembe gostote v Zemljini skorji in plašču
10^{-6}	sedimenti, solni čoki, rudna ležišča
10^{-7}	plimovanje trdne Zemlje in oceanov, vremenske fronte
10^{-8}	časovno odvisni vplivi v oceanih, sprememba vodnega režima
10^{-9}	topografija morske gladine, gibanje polov
10^{-10}	splošna teorija relativnosti

Geometrija težnostnega polja

- Ekvipotencialna (nivojska) ploskev, ploskve z enakim potencialom:

$$W(x,y,z)=\mathrm{C}=\mathrm{konst}$$



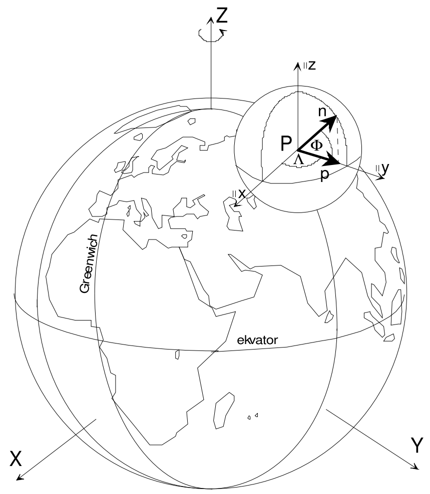


$$\mathrm{d}W = -g\mathrm{d}H$$

- Silnice težnostnega polja imenujemo težiščnice. Vektor sile teže je v vsaki točki pravokoten na nivojsko ploskev.
- Čeprav je potencial na niv. ploskvah stalen, težni pospešek ni (skladno z enačbo). Posledica: nivojske ploskve niso medsebojno paralelne, konvergirajo k polu.

Sistem naravnih koordinat

- Nivojske ploskve in težiščnice lahko vzamemo za osnovo krivočrtnega koordinatnega sistema, ki ima za posamezne geodetske naloge določene prednosti.
- Sistem naravnih koordinat tvorijo:
  - astronomska geografska širina Φ,
  - astronomska geografska dolžina Λ,
  - težnostni potencial W.



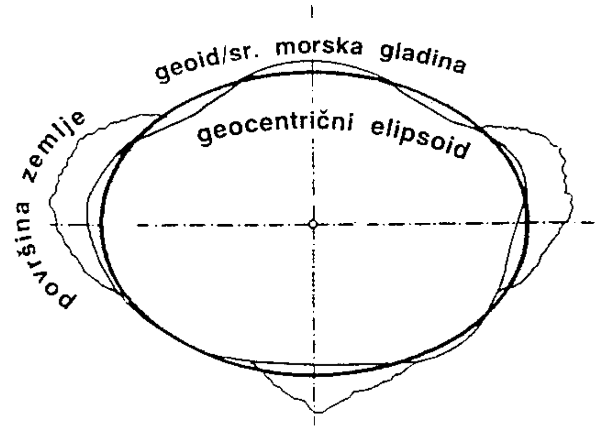
$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} W_X \\ W_Y \\ W_Z \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Lambda \\ \cos\Phi\sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \arctan\frac{-W_Z}{\sqrt{W_X^2 + W_Y^2}} \qquad \Lambda = \arctan\frac{W_Y}{W_X}$$

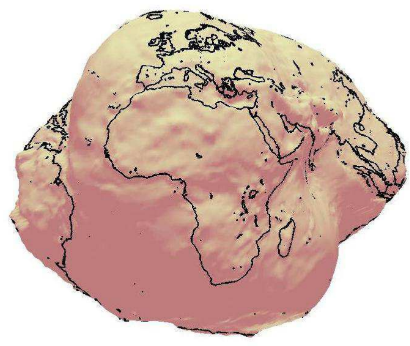
Oblika Zemlje - geoid

- Fizikalno obliko Zemlje predstavimo z eno od nivojskih ploskvi Zemljinega težnostnega polja $\rightarrow$ geoid.

  W = W(x,y,z) = Wo



- Gauss: "Geoid je potencialna ploskev zemeljskega telesa, ponazorjena s srednjo gladino svetovnih morij in v mislih podaljšana pod celinami."



Normalno težnostno polje (1)

- Normalno težnostno polje priredimo "normalni" obliki Zemlje: nivojski elipsoid ("level ellipsoid").
- Nivojski elipsoid je v popolnosti določen s parametri rotacijskega elipsoida: geometričnima: a, f, fizikalnima: M (masa Zemlje in atmosfere), kotna hitrost rotacije ω.
- Normalni težnostni potencial (U):

$$U = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

Normalnemu težn. potencialu ustreza vektor normalne sile teže: γ. Smer sovpada z normalo na elipsoid, velikost pa je enaka normalnemu težnemu pospešku (enačba Somigliane):

$$\vec{\gamma} = grad\,U$$

Normalno težnostno polje (2)

- Enačba Somigliane* omogoča izračun normalne težnosti v poljubni točki na površju elipsoida: γ_a (γ_e) je normalna težnost na ekvatorju ($\phi=0°$); γ_b (γ_p) je normalna težnost na polu ($\phi= 90°$):

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a\cos^2\phi + b\gamma_b\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} \qquad \gamma_0 = \gamma_e\frac{1+k\sin^2\phi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}$$

- Vrednost normalne težnosti na poljubni elipsoidni višini (h) lahko izračunamo:

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_o\left(1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f\sin^2\phi)h + \frac{3}{a^2}h^2\right)$$

-

*Carlo Somigliana (1860-1955), italijanski fizik

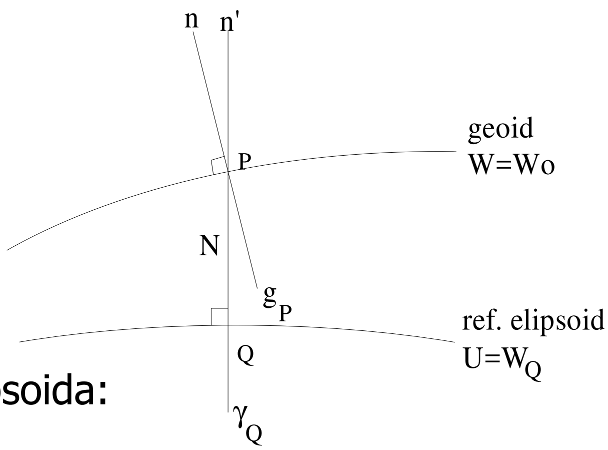
GRS80

Anomalijsko težnostno polje

- Dejansko težnostno polje Zemlje odstopa od normalnega t.p. nivojskega elipsoida. Razliko med potencialoma imenujemo: anomalija potenciala, moteči potencial (T):

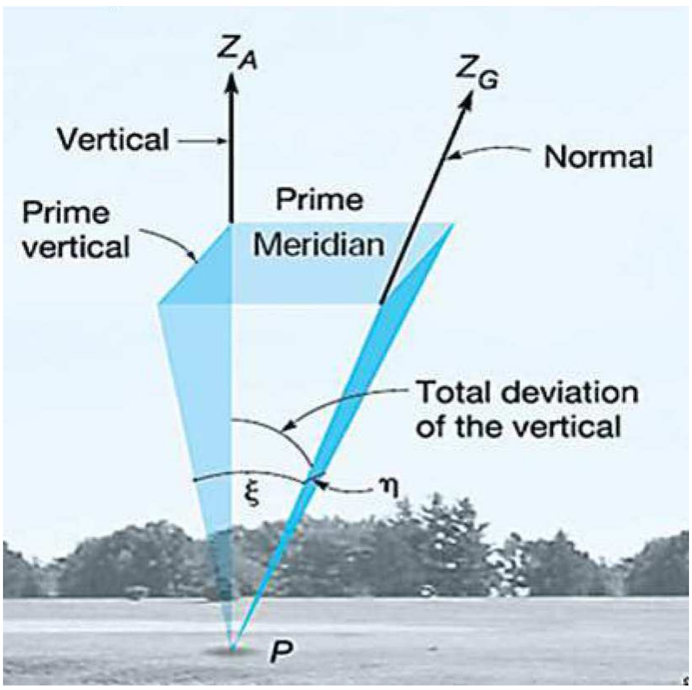
$$W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z)$$

- Primerjajmo vektorja dejanske sile teže in normalne sile teže:
- Razlika v velikosti $\rightarrow$ anomalija težnosti $\Delta g = g - \gamma$
- Razlika v smereh $\rightarrow$ odklon navpičnice.
- Medsebojna oddaljenost geoida in elipsoida: $\rightarrow$ geoidna višina (ondulacija) N

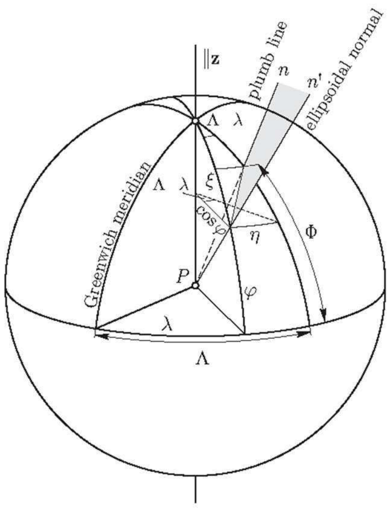


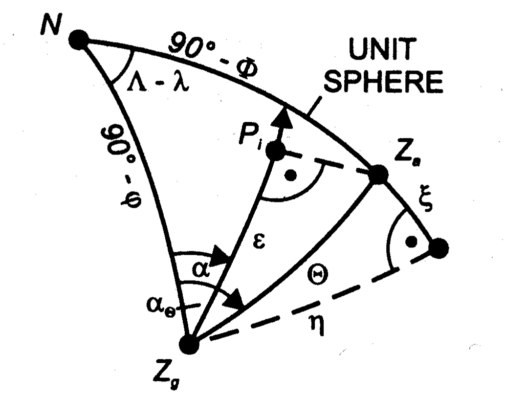
Odklon navpičnice (1)

- Odklon navpičnice (θ) je prostorski kot. Razčlenimo ga lahko na dve komponenti: v smeri meridiana ξ (ksi), in v smeri prvega vertikala η (eta).



Odklon navpičnice (2)





normala na geoid n $\rightarrow$ astronomske koord. Φ, Λ

normala na elipsoid n' $\rightarrow$ geodetske koord. ϕ, λ

$$\xi = \Phi - \phi$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\phi$$

Uporaba odklonov navpičnice (1)

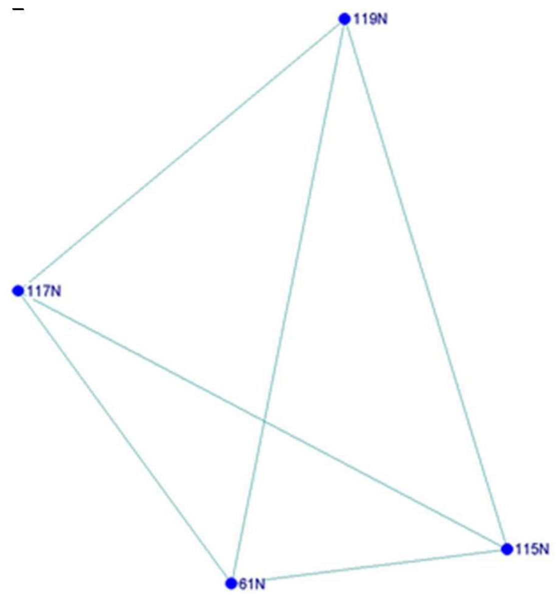
- Odkloni navpičnic predstavljajo odstopanja realnega težnostnega polja Zemlje od normalnega, zato jih, skupaj z geoidnimi višinami, uporabljamo v raziskavah oblike Zemlje in geodetskega datuma.
- Odkloni navpičnic podajajo zvezo med geodetskimi in astronomskimi koordinatami oz. podajajo zvezo med uporabljenim matematičnim modelom in dejansko obliko Zemlje.

Uporaba odklonov navpičnice (2)

- So velikega pomena pri orientaciji in izravnavi astrogeodetskih mrež, saj skupaj z Laplaceovimi azimuti omogočajo prehod iz astronomskega v geodetski azimut.
  - Še danes jih uporabljamo za kontrolo orientacije portalnih mrež pri gradnji predorov.
- Brez odklonov navpičnic ni možno reducirati geodetskih merjenih količin s fizične površine Zemlje na referenčni elipsoid.
- Odkloni navpičnic skupaj z geoidnimi višinami tvorijo temeljno zvezo med fizikalno stvarnostjo in geometrijskim modelom in to opravičuje potrebo za njihovo določitev s čim večjo natančnostjo.

Primer uporabe odklonov (:

- Izravnava terestričnih meritev v 3D



Točka 115N	Točka 117N	Točka 61N	Točka 119N
$\varphi = 45°31'06.37884''$	$\varphi = 45°31'33.93064''$	$\varphi = 45°31'02.70755''$	$\varphi = 45°32'02.93144''$
$\lambda = 13°37'28.81747''$	$\lambda = 13°36'14.56870''$	$\lambda = 13°36'46.90409''$	$\lambda = 13°37'04.15632''$
$h = 207.8025$m	$h = 45.7445$m	$h = 232.8546$m	$h = 158.5828$m
$N = 44.3637$m	$N = 44.2971$m	$N = 44.3347$	$N = 44.3225$
$\xi = -5.1566''$	$\xi = -4.641''$	$\xi = -4.641''$	$\xi = -5.1566''$
$\eta = 2.5783''$	$\eta = 2.5783''$	$\eta = 2.5783''$	$\eta = 3.094''$

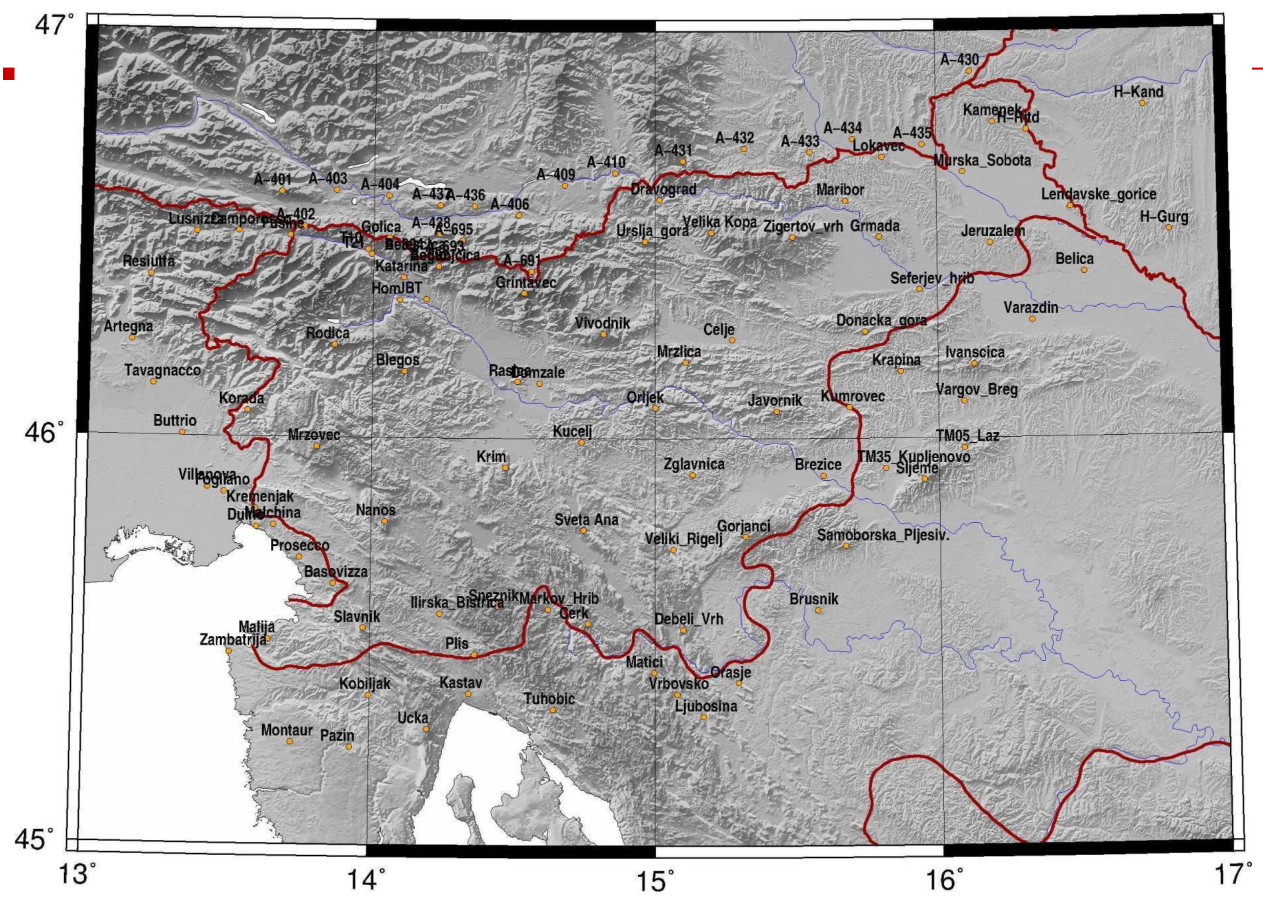
Primer uporabe odklonov (2)

- Odstopanje elipsoidnih koordinat z in brez uporabe odklonov:

Točka	Odstopanje *z - brez*
115N	$\Delta\varphi = -0.\ 00068''$
	$\Delta\lambda = 0.\ 00015''$
	$\Delta h = -0.\ 03664$ m
117N	$\Delta\varphi = 0.\ 00044''$
	$\Delta\lambda = 0.00121''$
	$\Delta h = -0.0279$ m
119N	$\Delta\varphi = -0.\ 00031''$
	$\Delta\lambda = 0.\ 00204''$
	$\Delta h = -0.01606$ m

- Odstopanje GK koordinat na WGS-84 z in brez uporabe odklonov:

Točka	Odstopanje *z - brez*
115N	$\Delta x = -0.\ 021$ m
	$\Delta y = 0.\ 002$ m
117N	$\Delta x = 0.\ 014$ m
	$\Delta y = 0.026$ m
119N	$\Delta x = -0.01$ m
	$\Delta y = 0.034$ m



Vrednosti odklonov na območju Slovenije

Št. točke	Ime točke	Fi(astro)	Lam(astro)	ξ	η
		[°]	[°]	["]	["]
166	Vivodnik	46,256161	14,817381	-4,53	2,73
167	Grintovec	46,355300	14,533172	-6,49	-5,57
168	Rašica	46,138411	14,511311	-4,88	-2,01
169	Blegoš	46,163011	14,115042	-6,51	3,83
170	Rodica	46,223111	13,864661	-16,56	-1,45
171	Mrzavec	45,975400	13,801906	-9,76	-9,44
172	Krim	45,930019	14,472597	5,37	3,75
173	Kucelj	45,991731	14,738172	-0,80	-1,77
174	Sveta Ana	45,776181	14,749000	2,10	3,38
175	Snežnik	45,588169	14,447169	-1,12	-1,08
176	Nanos	45,793789	14,045794	-4,85	-8,39
179	Mangart	-	-	0,00	0,00
180	Malija	45,504111	13,640825	1,15	-6,46
181	Slavnik	45,533639	13,973436	-0,94	-6,30
182	Montaur	45,249561	13,724328	-3,89	-7,03
183	Učka	45,281861	14,202403	-11,08	1,13
184	Tuhobić	45,331069	14,638989	-11,54	-6,92
185	Cerk	45,545011	14,765806	-4,84	3,72
193	Bijela Lasica	45,273078	14,961019	-1,75	-0,38
194	Privis	-	-		
202	Kanin	-	-		
209	Ivančica	46,182369	16,129636	3,41	6,02
212	Sljeme	45,899519	15,946867	0,11	-2,82
214	Donačka gora	46,262189	15,742539	-1,88	0,51
215	Žigertov Vrh	46,494181	15,490128	-1,00	7,52
222	Kalnik	46,130267	16,456250	-3,66	3,96
223	Uršlja Gora	46,485331	14,966303	0,96	5,76
224	Orljek	46,076839	15,000122	0,65	-1,02
372	Velika Kopa	46,505831	15,197433	-3,05	-1,56
373	Mrzlica	46,187600	15,107911	0,28	1,14
374	Javornik	46,066889	15,429339	-3,04	2,44
375	Gorjanci	45,760061	15,317106	1,05	-2,71
376	Debeli Vrh	45,530089	15,098603	-3,98	2,16
384	Brusnik	45,578361	15,572292	-0,78	5,19
385	Grmada	46,494561	15,796503	-2,28	3,59
386	Lokavec	46,691331	15,809097	-0,31	5,35
387	Kamenek	46,774328	16,204856	-3,17	4,77
388	Lend. gorice	46,565989	16,477586	0,36	1,66
389	Kotoriba	46,356308	16,820911	3,44	-1,05
396	Zglavnica	45,911211	15,130094	-0,07	0,58
515	Košuta	-	-	0,00	0,00
516	Golica	46,492308	14,056400	3,07	4,39
517	Jeruzalem	46,479697	16,190897	2,48	2,76
518	Korada	46,061489	13,557667	-12,43	-7,34
519	Kremenjak	45,821261	13,589194	-7,60	-8,12
522	Sam. Plješivica	45,735064	15,670589	-7,65	6,30