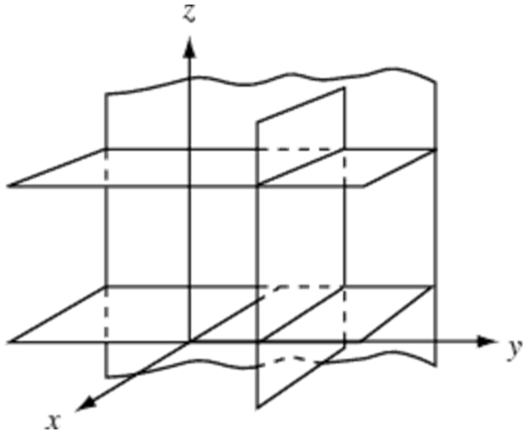
Koordinatni sistemi

Dejstvo je, da živimo v tridimenzionalnem Evklidskem prostoru. To je aksiom, ki ga ni potrebno dokazovati. Da bi podali geometrijski položaj točke v prostoru je primerno sredstvo za to vzpostavitev koordinatnega sistema:
"*Koordinatni sistem določa bijektivno*[*] *preslikavo urejene trojice realnih števil v množico točk tridimenzionalnega Evklidskega prostora*".

Položaj geodetske točke je podan s koordinatami → število, ki skupaj z drugimi določa točko v koordinatnem sistemu. Možno je vzpostaviti neskončno mnogo koordinatnih sistemov, vendar je najbolj preprost in razširjen t.i. "tridimenzionalni pravokotni kartezični[*]" koordinatni sistem.

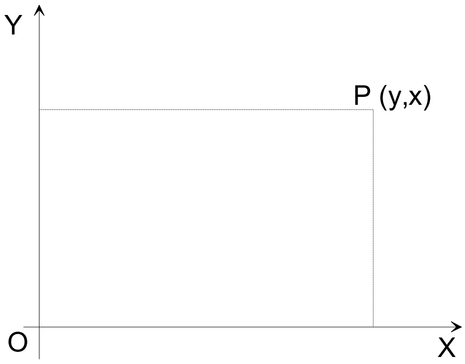


Tridimenzionalni pravokotni kartezični sistem sestavljajo tri medsebojno pravokotne premice → koordinatne osi. Presečišče koord. osi imenujemo izhodišče ali koordinatni začetek.

Koordinatni sistemi v ravnini

Omejimo se zaenkrat na dvodimenzionalni podprostor tridimenzionalnega Evklidskega prostora. To je na primer ravnina kartografske projekcije, ki nam upodablja zemeljsko površje v obliki karte ali načrta. V geodeziji za predstavitev točk v ravnini uporabljamo največkrat naslednja dva koordinatna sistema:

- pravokotni koordinatni sistem,
- polarni koordinatni sistem.



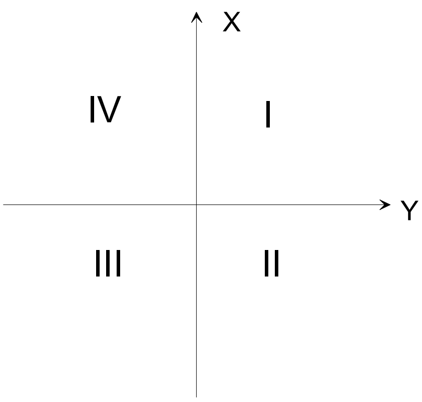
slika: 2D pravokotni k.s. v ravnini

[*] Bijektivna preslikava – preslikava eden v enega.
[*] Kartezični – dobil ime po francoskem matematiku Rene Descarcatesu (lat. Cartesius) iz XVII st., ki ga je prvi uporabil v matematiki.

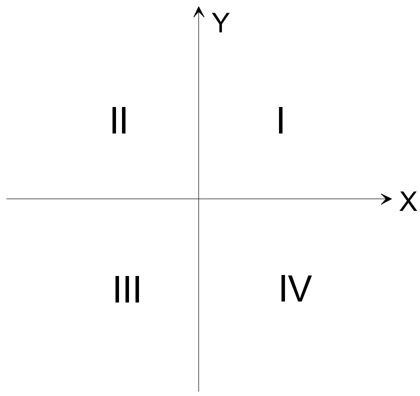
Pravokotni kartezični koordinati točke P imenujemo razdalji (izraženi v določenem merilu) vzeti z opredeljenim predznakom, te točke od dveh koordinatnih osi. O je koordinatno izhodišče, x-koordinata je "abcisa", y-koordinata pa "ordinata". Ustrezno se imenujeta tudi tudi abcisna X-os, in ordinatna Y-os.
Koordinati točke sta lahko pozitivni ali negativni, odvisno od tega na katero polos pade projekcja točke P.

Geodetski dvodimenzionalni pravokotni koordinatni sistem je različen od matematičnega. V geodetskem koordinatnem sistemu je X-os vertikalna, pozitivni del osi kaže navzgor - usmerjen je proti severu; negativni del osi kaže navzdol proti jugu. Y-os je vodoravna, pozitivni del osi je usmerjen na desno in kaže proti vzhodu; negativni del osi kaže na levo proti zahodu.

Geodetski koordinatni sistem je desnosučni, matematični pa levosučni, kar pomeni, da koti naraščajo v desno oz. v levo (enako velja tudi za kvadrante).

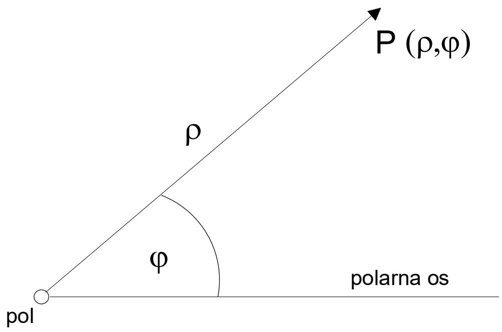


geodetski k.s.



matematični k.s.

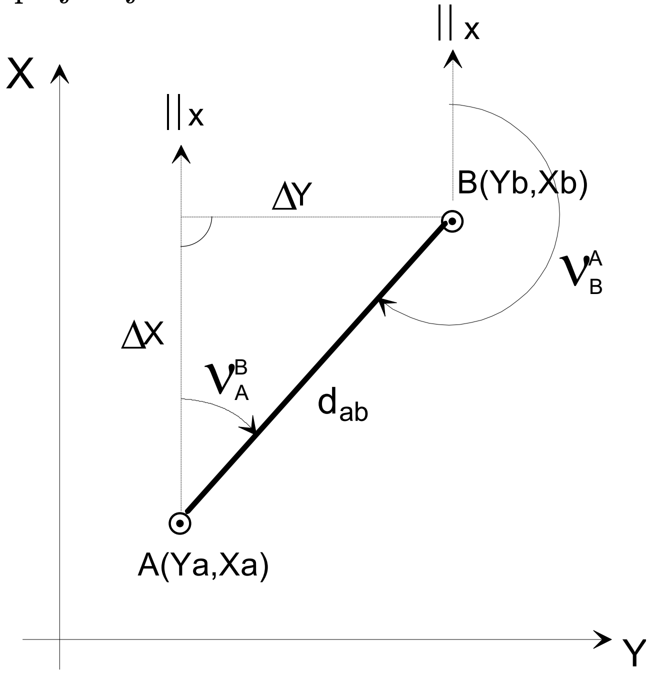
Polarni koordinati točke P sta: *radij vektor* ρ - razdalja točke P od koordinatnega izhodišča (pola O) in *polarni kot* φ - kot med daljico OP in danim poltrakom, ki izhaja iz pola (polarna os). Polarna os je izhodišče za štetje kotov.



slika : polarni koordinatni sistem v ravnini

Geodetski polarni koordinatni sistem v ravnini – smerni kot

Geodetski polarni koordinatni sistem v ravnini je vrsta prirejenega koordinatnega sistema vezanega na predstavitev Zemljinega površja na topografski karti oz. načrtu. Geodetske polarne koordinate podajajo zvezo med dvema točkama v ravnini kartografske projekcije.

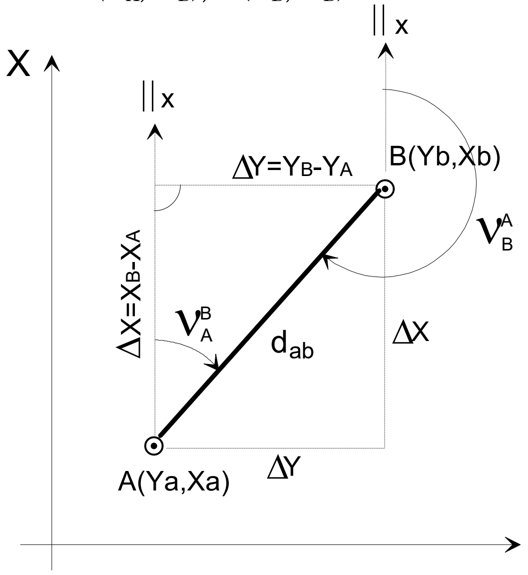


slika : geodetki polarni k.s. – smerni kot

Polarna os je pozitivni del *X*-osi. oz. vzporednica z osjo *X*. Radij vektor je dolžina, razdalja med točkama. Polarni kot se imenuje *smerni kot* ν_A^B, (preberemo "ni a na b"). To je kot med pozitivno smerjo osi *X* in dolžino med točkama (daljico AB). Smerni kot v točki B ν_B^A je različen od smernega kota v točki A ν_A^B. Smerni kot je dejansko azimut v ravnini kartografske projekcije.

Izračun smernega kota

Smerni kot lahko izračunamo če sta nam podani dve točki s svojimi pravokotnimi koordinatami A(Y_A, X_B), B(Y_B, X_B).



slika : izračun smernega kota

Tangens smernega kota lahko izračunamo iz koordinatnih razlik točk *A* in *B*.

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad \nu_B^A = \nu_A^B + 180°$$

Dolžino med točkama *A* in *B* izračunamo iz koordinat:

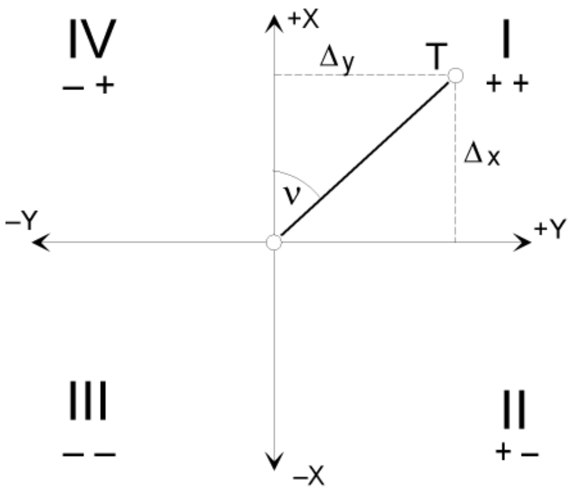
$$d_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

Velikost smernega kota je odvisna od predznaka koordinatnih razlik. Ločimo štiri različne primere. Kot ν se lahko nahaja v I. kvadrantu (0° < ν < 90°), II. kvadrantu (90° < ν < 180°), III. kvadrantu (180° < ν < 270°) ali IV. kvadrantu (270° < ν < 360°).

kvadrant koord. razl.	I.	II.	III.	IV.
ΔY	+	+	−	−
ΔX	+	−	−	+
ν	ν	+ 180°	+180°	+360°

Preglednica : velikost smernega kota glede na predznak koordinatnih razlik

Grafično se zgornja preglednica lahko predstavi kot:

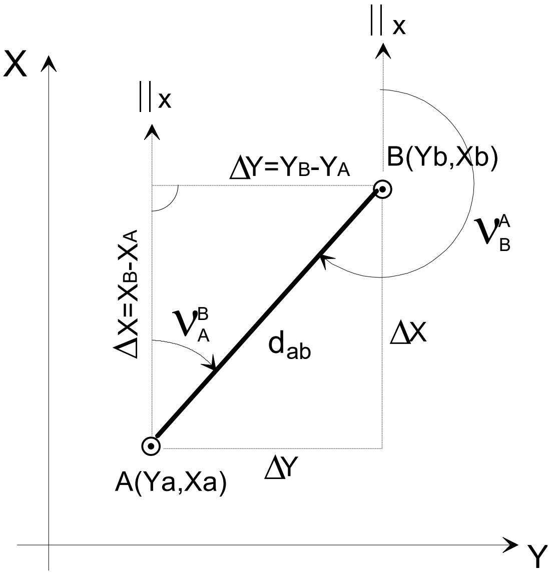


Slika: velikost smernega kota glede na predznak koordinatnih razlik

Primeri:

točka	Y	X	
A	80	115	$\nu_A^B = \dfrac{20}{-15} = -53{,}1301 + 180° = 126°52'11''$
B	100	100	$\nu_V^C = \dfrac{-30}{25} = -50{,}1944 + 360° = 309°48'20''$
C	75	125	

Zveza med pravokotnimi in polarnimi koordinatami



slika : Zveza med pravokotnimi in polarnimi koordinatami

Zveza med pravokotnimi in polatnimi koordinatami izhaja iz znanih zvez v pravokotnem trikotniku, ki ga tvorijo razdalja d, ter koordinatni razliki med točkama A in B.

$$\tan \nu_A^B = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B}$$

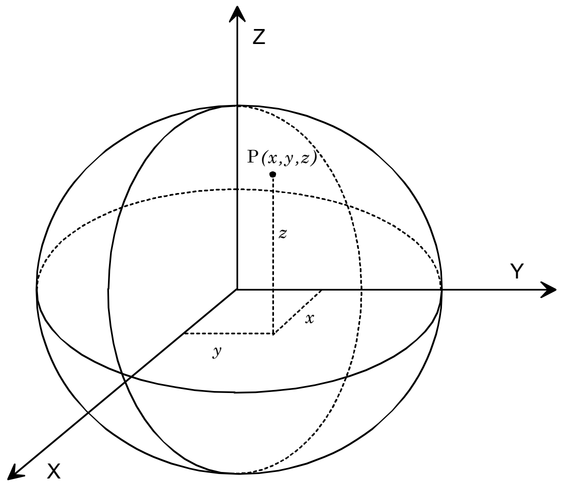
$$\Delta Y_A^B = d_{AB} \sin \nu_A^B \qquad d_{AB} = \frac{\Delta Y_A^B}{\sin \nu_A^B}$$

$$\Delta X_A^B = d_{AB} \cos \nu_A^B \qquad d_{AB} = \frac{\Delta X_A^B}{\cos \nu_A^B}$$

To zvezo lahko uporabimo za izračun pravokotnih koordinat nove točke, če poznamo dolžino in smerni kot proti tej točki.

Krogelne koordinate (geografske koordinate na Zemlji krogli)

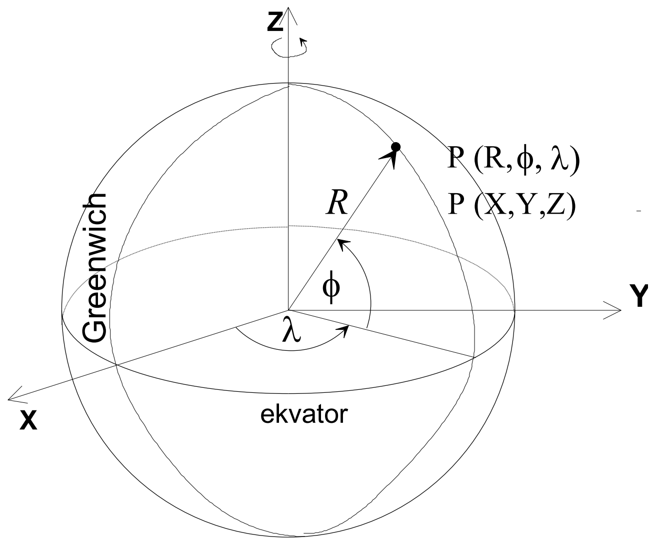
Izhodišče pravokotnega koordinatnega sistema postavimo v središče krogle s polmerom R. Položaj točke P v na površini krogle je enolično določen s ksrtezičnimi koordinatami (X,Y,Z).



slika: pravokotne koordinate in krogla

Položaj točke na površju krogle lahko podamo tudi z krogelnimi koordinatami. Krogelne koordinate so:

- R radij vektor (polmer),
- krogelna širina ϕ,
- krogelna dolžina λ.



slika: krogelne koordinate

N krogli R=konst. je točka enolično določena samo z dvema kotnima koordinatama: krogelno širino ϕ in krogelno dolžino λ. Če je ta krogla s konstantnim polmerom

Zemlja, sta ti dve koordinati: ϕ *geografska (zemljepisna) širina* in λ *geografska (zemljepisna) dolžina*.

Rotacijska os Zemlje seka kroglo v dveh protitočkah: severnemu (P_N) i južnemu polu (P_S). Geografska širina je sferna razdalja točke od ekvatorja, računano v ravnini meridiana. Geografska širina je tudi kot v ravnini meridiana med radij vektorjem točke P in ravnino ekvatorja. Štejemo jih severno in južno od ekvatorja od 0° do +90° oz. od 0° do –90°. Oznaka je lahko tudi N (+) in S (–). Ekvator je veliki krog na Zemlji-krogli in je presečišče Zemlje-krogle z ravnino, ki poteka skozi središče krogle. Meridiani (poldnevniki) so veliki krogi na Zemlji-krogli, so presečišče Zemlje-krogle z ravninami, ki potekajo skozi središče krogle in skozi oba pola.

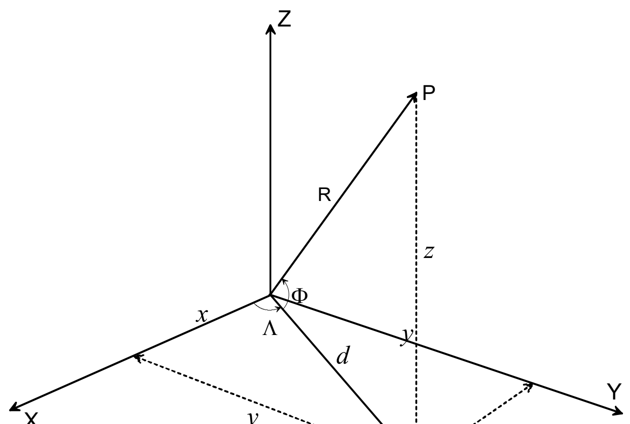
Geografska dolžina točke je njena sferna razdalja od začetnega Greenwiškega meridiana, računano v ravnini ekvatorja. Geografska dolžina točke je tudi kot v ravnini ekvatorja med ravninami izhodiščnega meridiana in krajevnega meridiana točke. Geograske dolžine štejemo vzhodno in zahodno od izhodiščnega Greenwiškega meridiana od 0° do 180°.

Vzporedniki (širinski krogi) so mali krogi na Zemlji-krogli, ki so vzporedni z ekvatorjem. Vsi kraji na istem vzporedniku imajo enako geografsko širino. Vsi kraji na istem meridianu imajo enako geografsko dolžino.

Koordinate točke, ki je podana z geografskimi koordinatami zapišemo:

T:	ϕ:	N 45° 24' 16",3	λ:	E 14° 56' 33",7
		+ 45° 24' 16",3		– 14° 56' 33",7

Pretvorba med kartezičnimi in krogelnimi koordinatami



slika : pretvorba med pravokotnimi in polarnimi krogelnimi koordinatami

Pretvorba iz sistema (R, ϕ, λ) v sistem (X , Y, Z) je podana z enačbo:

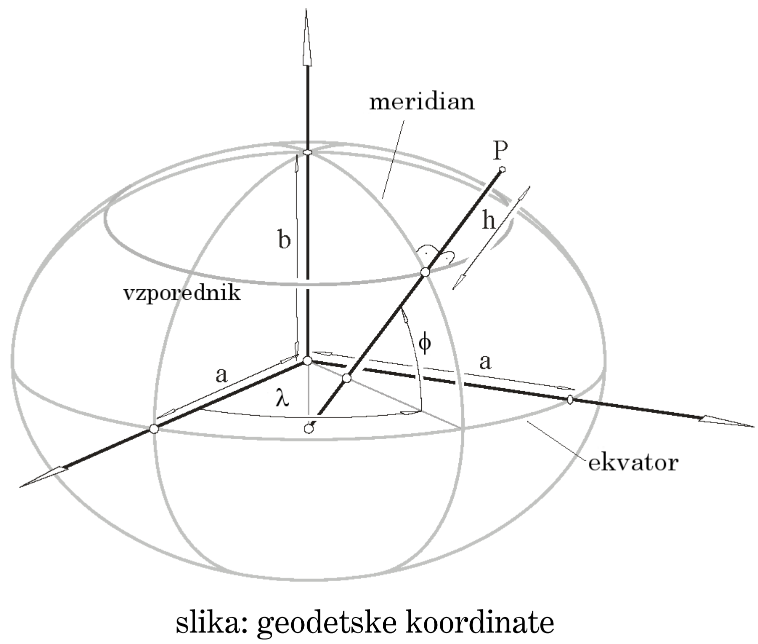
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$

Pretvorba iz sistema (X , Y, Z) v sistem (R, Φ, Λ) je podana z enačbo:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\frac{Z}{d}; \arcsin\frac{Z}{R} \\ \arctan\frac{Y}{X} \\ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \end{bmatrix} \qquad d = \sqrt{Y^2+X^2}$$

d je pomožna količina in je diagonala pravokotnika s stranicami enakimi koordinatam X, Y točke P.

Geodetske (elipsoidne) koordinate



slika: geodetske koordinate

Geodetske koordinate (ϕ, λ, h) so definirane z normalo (pravokotnico) na elipsoid. Geodetska (elipsoidna) širina ϕ je kot med normalo in ekvatorsko ravnino. Geodetska (elipsoidna) dolžina λ je kot med ravninama izhodiščnega (Greeenviškega) in krajevnega meridiana točke. Elpsoidna višina h je oddaljenost točke na površju Zemlje od elipsoida, vzeto po normali.

Pretvorba med kartezičnimi in geodetskimi koordinatami

Pretvorba iz geodetskih koordinat (ϕ, λ, h) v pravokotne koordinate (X, Y, Z) je podana z enačbo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ \left[(1-e^2)N+h\right]\sin\phi \end{bmatrix} \qquad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}} \qquad e^2 = 2f - f^2$$

pri čemer so:

- N polmer ukrivljenosti v smeri prvega vertikala vtočki obravnave,
- e je prva ekscentriciteta referenčnega elipsoida,
- f je sploščenost referenčnega elipsoida.

Obratna pretvorba iz pravokotnih koordinata je možna po iterativni poti ali z rešitvijo enačbe 4. stopnje.