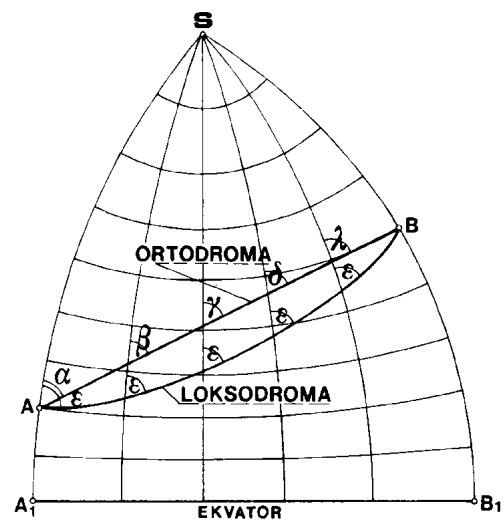


# Geodetski nalogi na krogli

- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
  - določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
  - določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").
- Pojem geodetske linije: "Geodetska linija je najkrajša povezava med dvema točkama na poljubni ploskvi".
- Na Zemlji krogli se srečamo s posebnimi linijami:
  - ortodroma,
  - loksodroma.

## ORTODROMA IN LOKSODROMA (1)

- Na krogli je geodetska linija krajši lok velikega kroga, ki poteka skozi ti dve točki na površju krogle.
- V navigaciji in geodeziji se geodetska linija na krogli imenuje "ortodroma" (iz grščine "ortos" → pravi "dromos" → pot).
- Na Zemlji-krogli je ortodroma najkrajša pot med dvema točkama.
- Če plujemo po ortodromi moramo neprestano spreminjati kurz plovila.



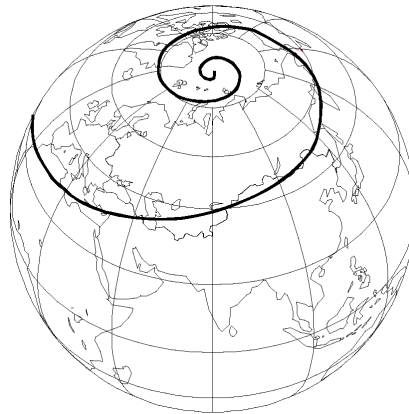
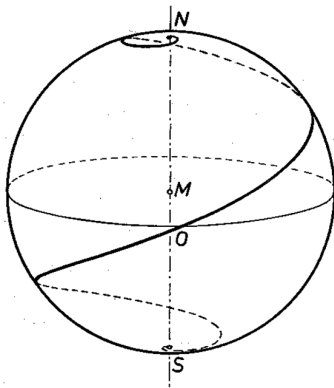
$$\cos D_{AB} = \cos(90^\circ - \phi_B) \cos(90^\circ - \phi_A) + \sin(90^\circ - \phi_B) \sin(90^\circ - \phi_A) \cos \Delta\lambda$$

$$\cos D_{AB} = \sin \phi_B \sin \phi_A + \cos \phi_B \cos \phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)$$

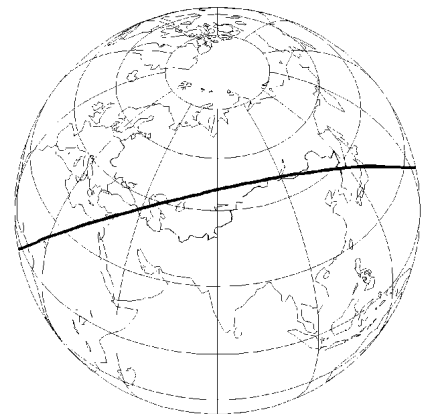
$$L_{AB} = \frac{R_{[km]}(\phi_B - \phi_A)_{[rad]}}{\cos A_{AB}}$$

## ORTODROMA IN LOKSODROMA (2)

- "**Loksodroma**" je krivulja na krogli, ki seka vse meridiane pod istim kotom (iz grščine "loksos" → poševen).
- Ladja, ki pluje po loksodromi ima prednost konst. kurza in pomanjkljivost daljše poti. Loksodroma je prostorska krivulja, ki se polu neprestano približuje in ga nikdar ne doseže.
- Na karti v Merkatorjevi projekciji je loksodroma premica!



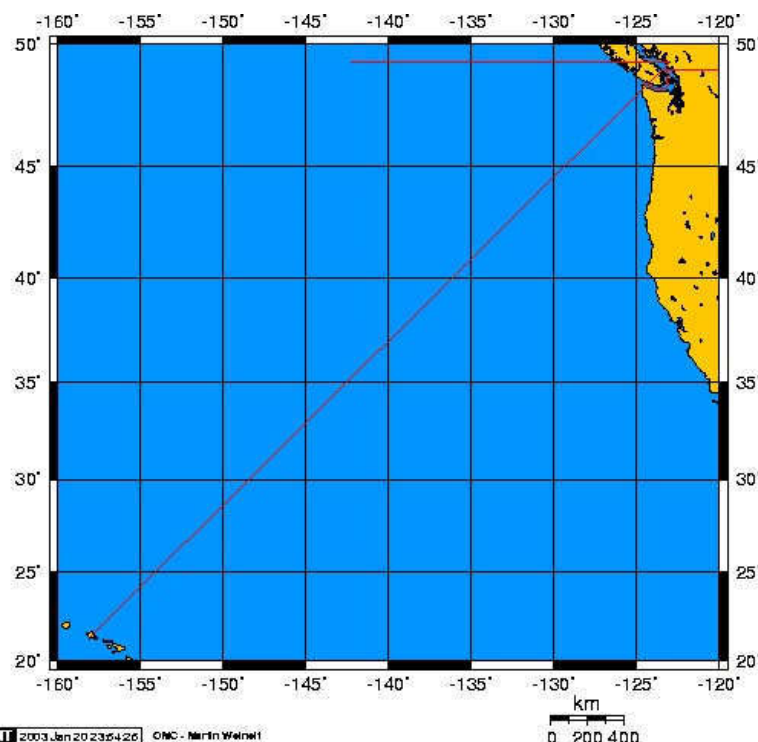
loksodroma



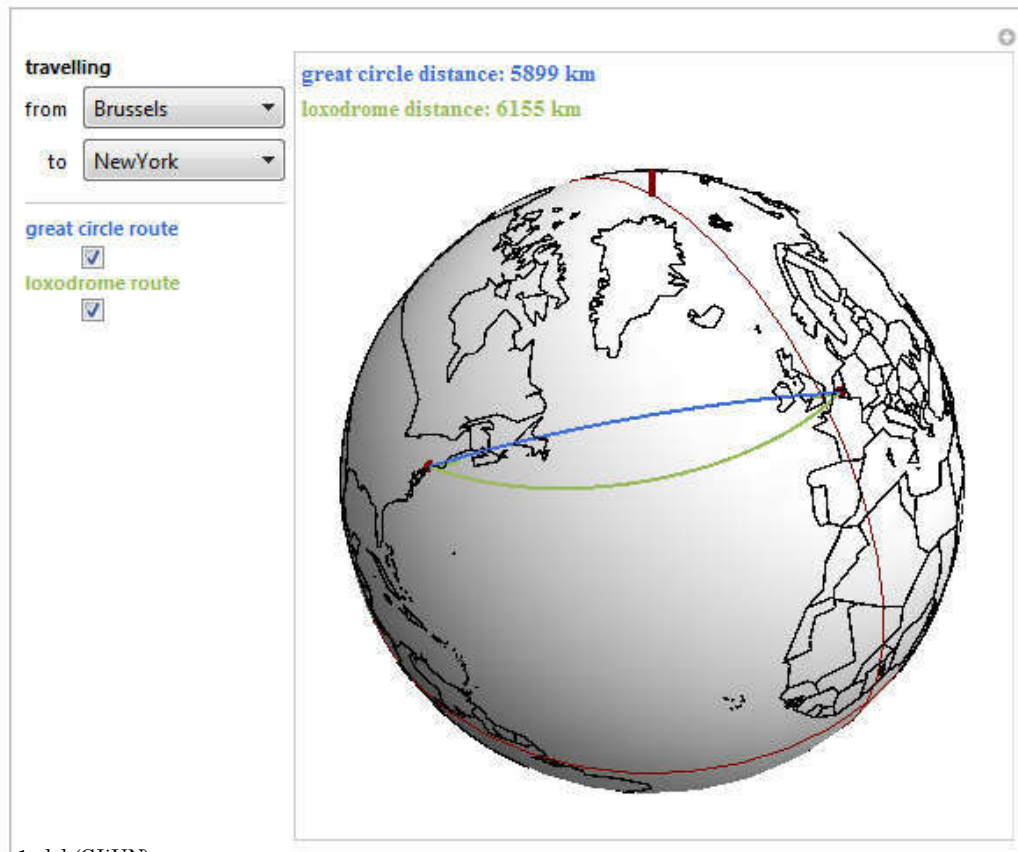
ortodroma

## Loksodroma na karti

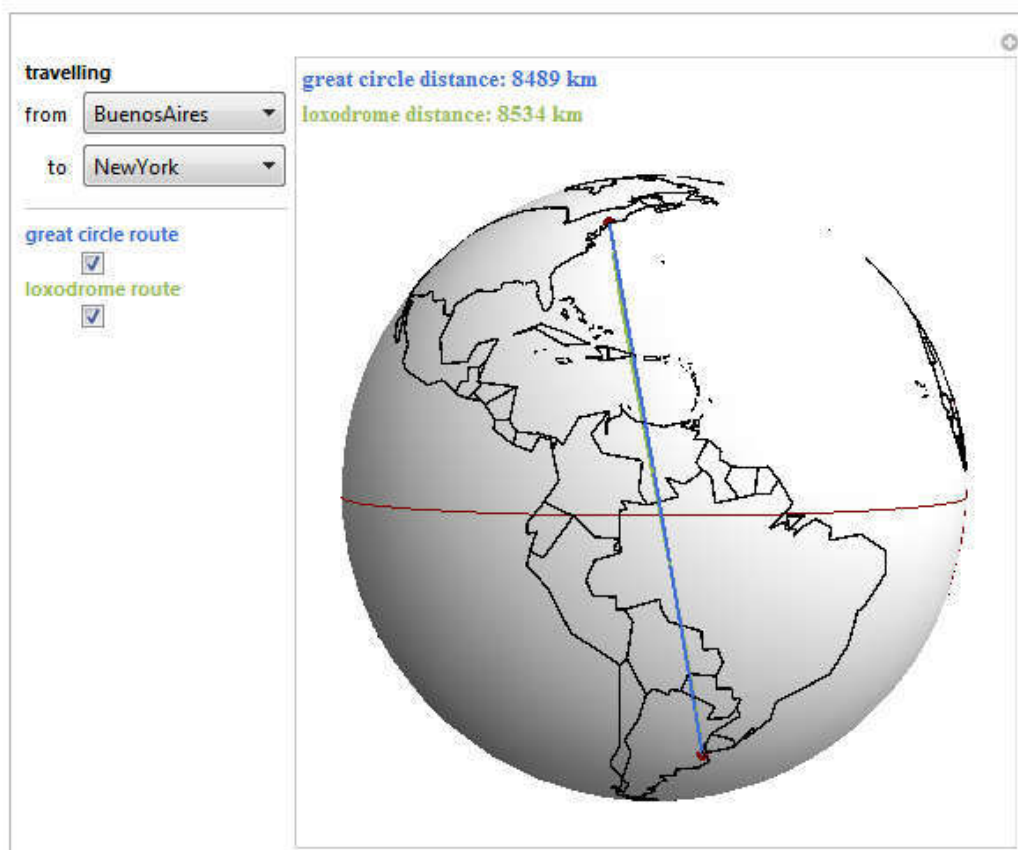
- Na karti v Merkatorjevi projekciji je loksodroma premica!



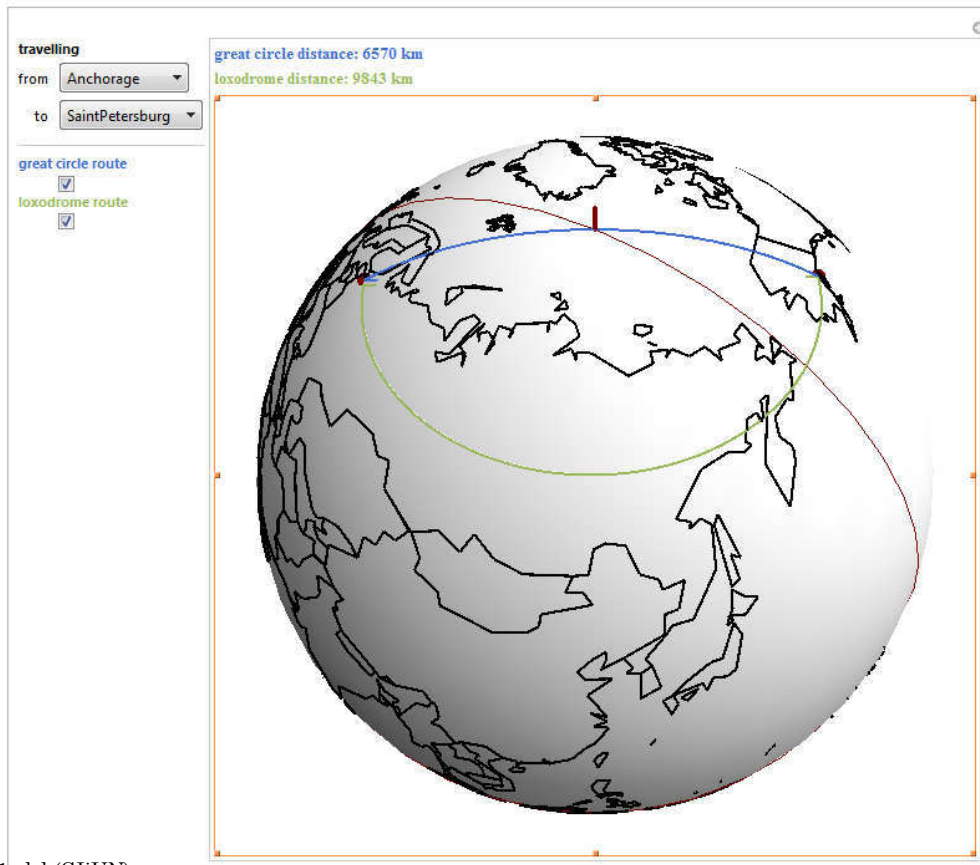
## Primerjava ortodrome in loksodrome (E - Z)



## Primerjava ortodrome in loksodrome (S - J)



# Primerjava ortodrome in loksodrome - pot čez pol



M. Kuhar - Geodezija, 1. del (GIUN)

7

## Primerjava v Tržaškem zalivu in širše

Območje	Smer	Dolžina		$\Delta_{L-O}$
		ortodroma	loksodroma	
Tržaški zaliv	Koper - Gradež	30398,090 m	30398,114 m	0,023 m
	Koper - Tržič	32677,072 m	32677,080 m	0,008 m
	Trst - Gradež	29439,090 m	29439,118 m	0,027 m
	Tržič - Savudrija	35184,108 m	35184,108 m	0,000 m
Jadransko morje	Koper - Benetke	110003 m	110006 m	3 m
	Trst - Benetke	114292 m	114294 m	2 m
	Gradež - Dubrovnik	504002 m	504071 m	69 m
svet	Miami - Lizbona	6672 km	6812 km	140 km
	Sydney - San Francisco	11948 km	15742 km	3794 km
	Melbourne - Buenos Aires	11602 km	18271 km	6668 km

M. Kuhar - Geodezija, 1. del (GIUN)

8

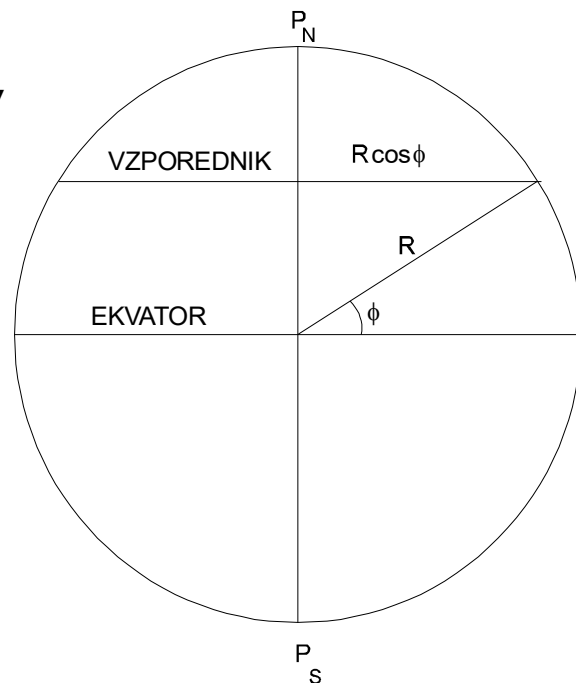
## Lok na vzporedniku in meridianu

- Vsi meridiani na Zemlji-krogli imajo enak polmer, ta je enak polmeru krogle. Vsi vzporedniki (ker so mali krogi), imajo manjši polmer. Polmer vzporednika z geografsko širino  $\phi$  lahko enostavno izračunamo iz zveze v pravokotnem trikotniku:

$$R_\phi = R \cos \phi$$

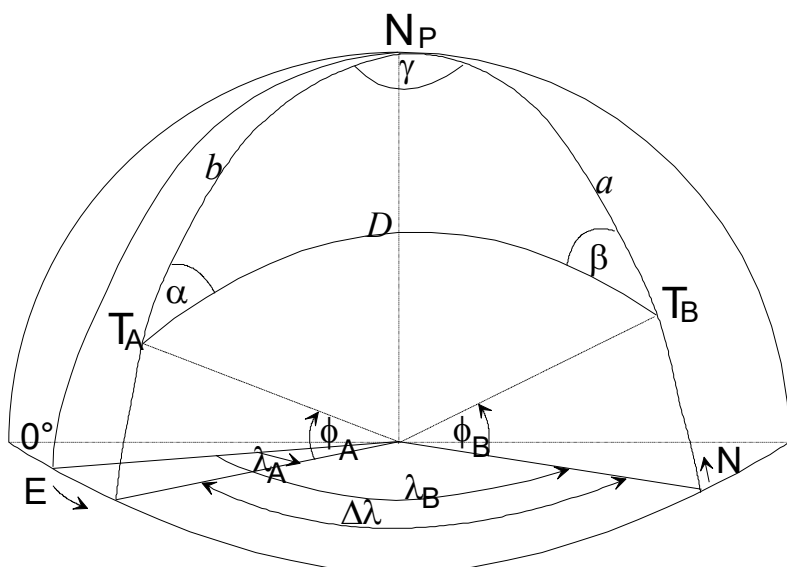
- Obseg vzporednika je potem:

$$O_\phi = 2R_\phi \pi = 2R\pi \cos \phi$$



## GEODETSKI NALOGI (po ortodromi) 1

- 1. dano:  $T_A (\phi_A, \lambda_A)$ ,  $D_{AB}$ ,  $A_{AB}$   
neznano:  $T_B (\phi_B, \lambda_B)$
- 2. dano:  $T_A (\phi_A, \lambda_A)$ ,  $T_B (\phi_B, \lambda_B)$   
neznano:  $D_{AB}$ ,  $A_{AB}$ ,  $A_{BA}$



navtični sferni trikotnik  $N_P T_A T_B$ :

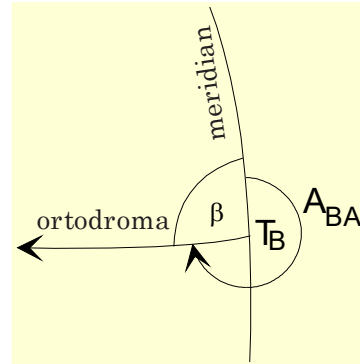
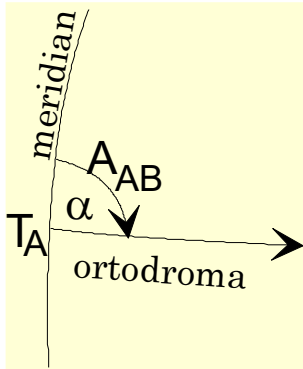
$$a = 90^\circ - \phi_B$$

$$b = 90^\circ - \phi_A$$

$$\gamma = |\lambda_A - \lambda_B| = |\Delta \lambda|$$

# GEODETSKI NALOGI (po ortodromi) 2

- AZIMUT je "smerni kot na krogli". Kot med tangentama na krog meridiana in geodetsko krivuljo iz točke  $T_A$  v točko  $T_B$ .
- Azimut v točki  $T_A$  je enak kotu  $A_{AB} = \alpha$ .
- Azimut v točki  $T_B$  je enak  $A_{BA} = 360^\circ - \beta$ .



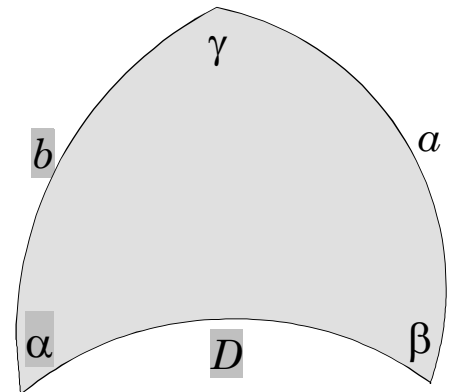
## Prva geodetska naloga (1)

- dano:  $T_A (\phi_A, \lambda_A)$ ,  $D_{AB}$ ,  $A_{AB}$ ; neznan:  $T_B (\phi_B, \lambda_B)$
- splošni sferni trikotnik III. tip naloge;
- Če je dani azimut v mejah med  $0^\circ$  in  $180^\circ$ , je to notranji kot v navtičnem trikotniku. Potem iskana točka  $T_B$  leži vzhodno od točke  $T_A$ . V primeru da je dani azimut v mejah med  $180^\circ$  in  $360^\circ$  je to zunanji kot v oglišču. Iskana točka leži zahodno od dane točke.
- Dolžina  $D_{AB}$  je podana v [km], potrebna pretvorba v kote:

$$D^\circ = \frac{D_{\text{km}} 180^\circ}{\pi R_{\text{km}}}$$

Stranico  $a$  izračunamo po kosinsovem stavku za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos D + \sin b \sin D \cos \alpha$$

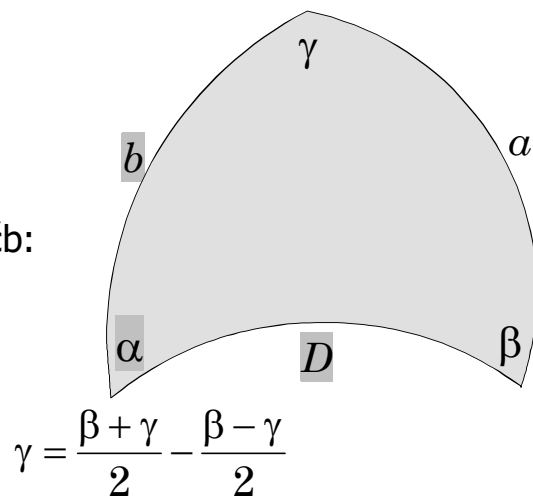


## Prva geodetska naloga (2)

- Kota  $\beta$  in  $\gamma$  izračunamo s pomočjo Napierjevih enačb:

$$\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b - D}{2}}{\cos \frac{b + D}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b - D}{2}}{\sin \frac{b + D}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$



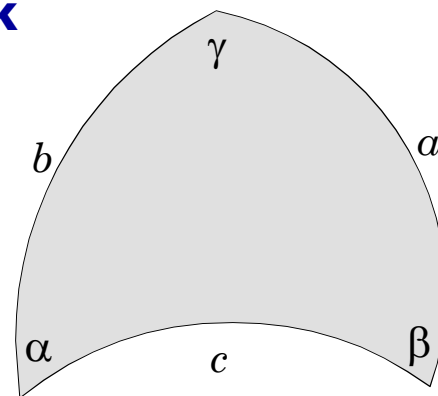
$$\beta = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2}$$

## Prva geodetska naloga (3)

- Izračunani elementi navtičnega sfernega trikotnika nam dajo ustrezne geografske koordinate točke  $T_B$ .
- $\alpha = 90^\circ - \phi_B \Rightarrow \phi_B = 90^\circ - \alpha$
- $\gamma = \Delta\lambda \quad \lambda_B = \lambda_A \pm \Delta\lambda$
- Pri izbiranju oznak točk (dana, iskana) moramo upoštevati velikost danega azimuta. Oznake si nato ustrezno priredimo. Enako velja za predznak  $\pm\Delta\lambda$ . Če je dani azimut  $A < 180^\circ$ ,  $\Delta\lambda$  prištejemo, če pa je dani azimut  $A > 180^\circ$ ,  $\Delta\lambda$  odštejemo.

## Kotangensni izrek

- Šest elementov sfernega trikotnika lahko napišemo v cikličnem zaporedju  $\alpha\gamma b\alpha c\beta$ . Kotangensni izrek veže štiri elemente v trikotniku: dve stranici, kot, ki ga oklepata in eni stranici nasproti ležeči kot; vsi elementi so v zaporedju, na primer  $\alpha\gamma b\alpha$ , ali  $\beta\alpha\gamma b$ .



- Na primer za kombinacijo  $\beta\alpha\gamma b$  so: notranji kot  $\gamma$ , notranja stranica  $a$ , zunanji kot  $\beta$ , ter zunanja stranica  $b$ . Potem se kotangensni izrek glasi:

- Kotangens zunanje stranice krat sinus notranje stranice je enak: produktu kosinusa notranje stranice in kosinusa notranjega kota plus produktu kotangensa zunanjega kota in sinusa notranjega kota.**

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot \alpha \sin \gamma$$

$$\cot b \sin c = \cos c \cos \alpha + \cot \beta \sin \alpha$$

$$\cot c \sin b = \cos b \cos \alpha + \cot \gamma \sin \alpha$$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos \beta + \cot \alpha \sin \beta$$

$$\rightarrow \cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$$

$$\cot c \sin a = \cos a \cos \beta + \cot \gamma \sin \beta$$

## Prva geodetska naloga – rešitev s pomočjo kotangensnega izreka

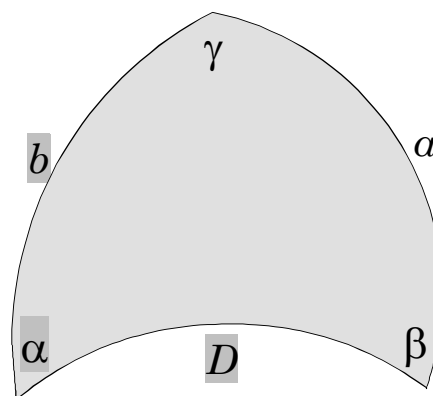
- Razlika je samo v računanju neznanih kotov  $\beta$  in  $\gamma$ .
- Kotangensni izrek za elemente  $D\alpha b\gamma$ :

$$\cot D \sin b = \cos b \cos \alpha + \cot \gamma \sin \alpha$$

- rešimo kot  $\gamma$ :

$$\cot \gamma \sin \alpha = \cot D \sin b - \cos b \cos \alpha$$

$$\tan \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cot D \sin b - \cos b \cos \alpha}$$



- Kotangensni izrek za elemente  $b\gamma a\beta$ :  $\cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$

- rešimo kot  $\beta$ :

$$\cot \beta \sin \gamma = \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma$$

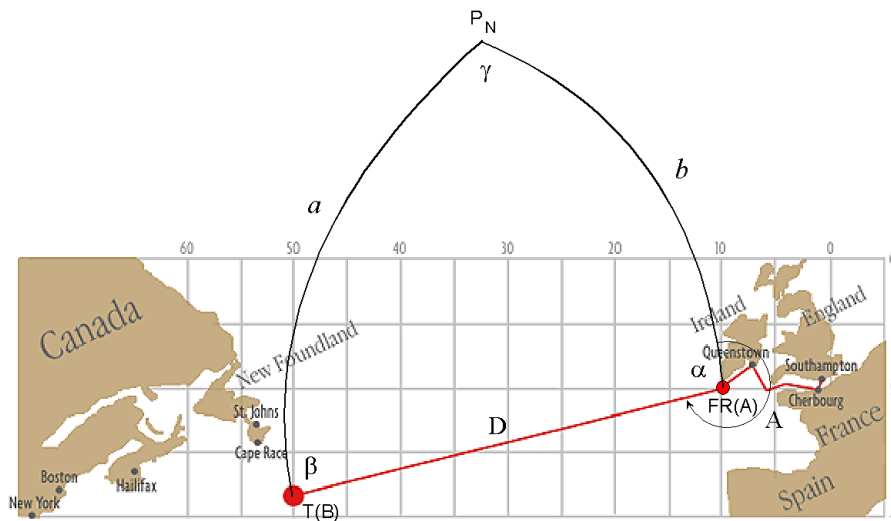
$$\tan \beta = \frac{\sin \gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos \gamma}$$



## Primer: ladja Titanic

- Ladja "Titanic" je preplula na svoji poti od zadnje stične točke s celino (svetilnik Fastnet Rock) na Irskem, do kraja, kjer je trčila z ledeno goro skupaj 3 236, 6 km (glej sliko). Če je "Titanic" plul z kurzom  $A = 266^\circ 52'$  (na zahod) in so geografske koordinate svetilnika:

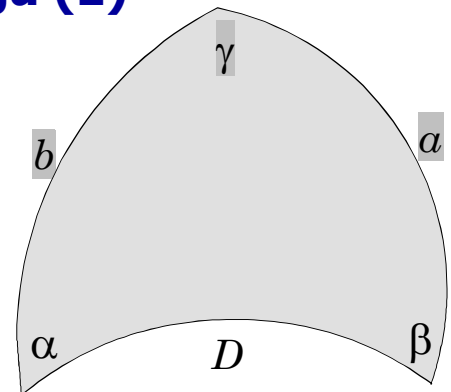
	Geografska širina	Geografska dolžina
Fastnet Rock	N $51^\circ 23' 00''$	W $9^\circ 36' 00''$



- Izračunaj:
- geografske koordinate mesta trka z ledeno goro. Napiši vse enačbe in nariši ustrezno skico (severna zemeljska polobla in navtični sferni trikotnik). Polmer Zemlje-krogle je  $R = 6371$  km.

## Druga geodetska naloga (1)

- dano:  $T_A (\phi_A, \lambda_A)$  in  $T_B (\phi_B, \lambda_B)$ ;
- neznano:  $D_{AB}$ ,  $A_{AB}$ ;  $A_{BA}$ ;
- splošni sferni trikotnik III. tip naloge;
- $\gamma = |\Delta\lambda|$



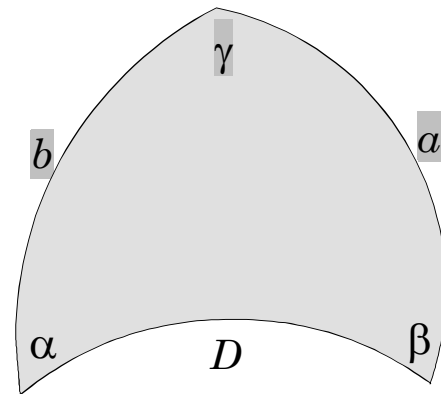
- Razdaljo  $D$  izračunamo s pomočjo kosinusovega stavka za stranice:

$$\cos D = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

- Izračunano razdaljo  $D_{AB}$  izrazimo v dolžinskih enotah:

$$D_{\text{km}} = \frac{\pi R_{\text{km}}}{180^\circ} D^\circ$$

## Druga geodetska naloga (2)



- Kota  $\alpha$  in  $\beta$  dobimo s pomočjo Napierjevih enačb:

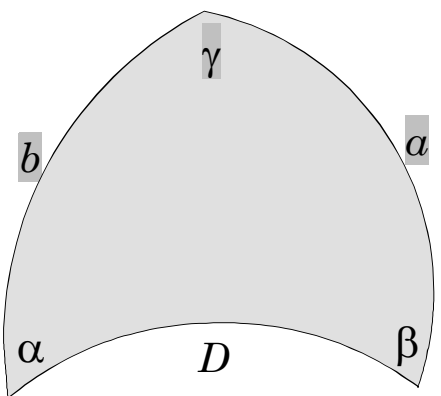
$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2} \quad \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- Azimuta sta:  $A_{AB} = \alpha$ ,  $A_{BA} = 360^\circ - \beta$

## Druga geodetska naloga – rešitev s pomočjo kotangentsnega izreka



- Razlika je samo v računanju neznanih kotov  $\alpha$  in  $\beta$ .
- Kotangentsni izrek za elemente  $\alpha\gamma b\alpha$  :

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot \alpha \sin \gamma$$

izrazimo kot  $\alpha$ :

$$\cot \alpha \sin \gamma = \cot a \sin b - \cos b \cos \gamma$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \gamma}{\cot a \sin b - \cos b \cos \gamma}$$

- Kotangentsni izrek za elemente  $\beta\alpha\gamma b$  :  $\cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$   
izrazimo kot  $\beta$ :

$$\sin \gamma \cot \beta = \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos \gamma}$$

- Ortodromno razdaljo izračunamo prav tako po kosinusnem izreku.