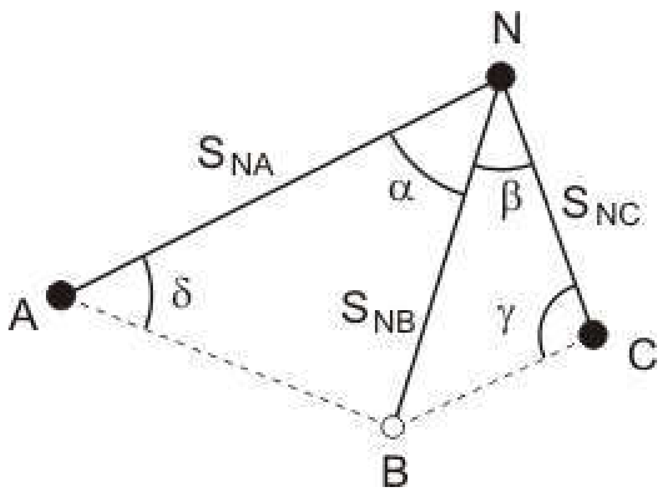
Prehod iz merskega v koordinatni prostor

- Prehod iz merskega v koordinatni prostor ⇒ izračun koordinat geodetskih točk.
- Merski prostor
  - Direktno koordinat nikoli ne merimo! Izpeljemo jih indirektno iz meritev (opazovanj)!
  - Meritve so informacija relativnega položaja več točk (najmanj dveh).
- Primer:
  7 opazovanj:
  S_{NA}, S_{NB}, S_{NC}, α, β, γ, δ
  Za določitev lika ABCN
  zadošča 5 opazovanj!
  Dve opazovanji sta nadštevilni!

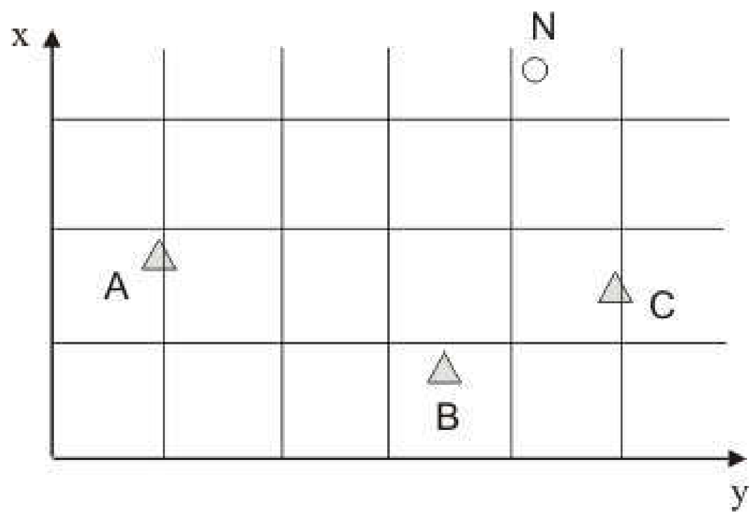


Koordinatni prostor

- Iskane količine so koordinate geodetskih točk!

Koordinate

- Položaji danih točk (A, B, C) so znani (od prej)!
- Iščemo (določamo) koordinate nove točke (N)!



Določanje položaja točk (positioning)

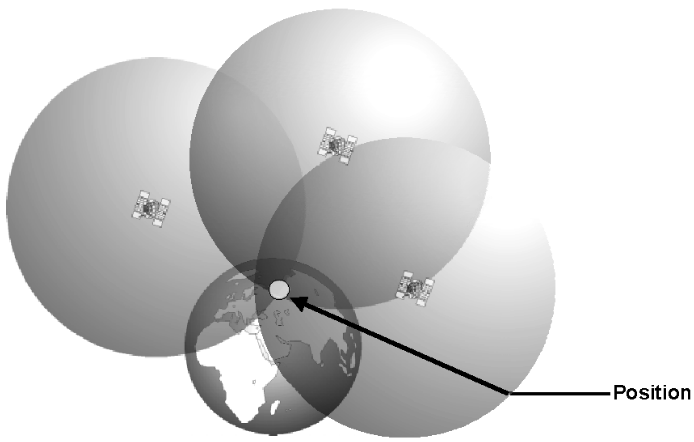
- Različni načini določitve položaja:
  - absolutno določanje položaja;
  - relativno določanje položaja;
  - 3D, 2D, 1D določanje položaja.

- Absolutno določanje položaja:
  - dane koordinate ekstraterestričnih objektov (zvezde, umetni Zemljini sateliti);
  - opravljene meritve do teh objektov (smeri, razdalje);
  - iščemo koordinate opazovališča;
  - potrebujemo 3 vrste koordinatnih sistemov:
    - terestrični (iskane geod. točke);
    - nebesni (zvezde);
    - orbitalni (um. Zemljini sateliti).

Absolutno določanje položaja

- Astronomska opazovanja nam podajo astronomske geografske koordinate (Φ, Λ).
  - Potrebujemo opazovanja do vsaj ene zvezde (ali Sonca). Moramo imeti dostop do točnega časa. Zvezde obravnavamo kot dane točke.

- Opazovanja do um. zemljinih satelitov nam podajo geodetske (elipsoidne koordinate (ϕ, λ, h).
  - potrebujemo opazovanja do vsaj štirih satelitov (3 za položaj, enega za odpravo pogreška ure v sprejemniku).
  - Tirnice satelita so znane.



Relativno določanje položaja

- Relativno določanje položaja pomeni določitev položaja ene točke glede na drugo. Lahko uporabimo:
  - neposredna opazovanja med točkami;
  - posredna opazovanja s točk do ekstraterestričnih objektov;
- Vrsta opazovanj in vrsta iskanih koordinat določajo matematični model določitve položaja (3D, 2D ali 1D).

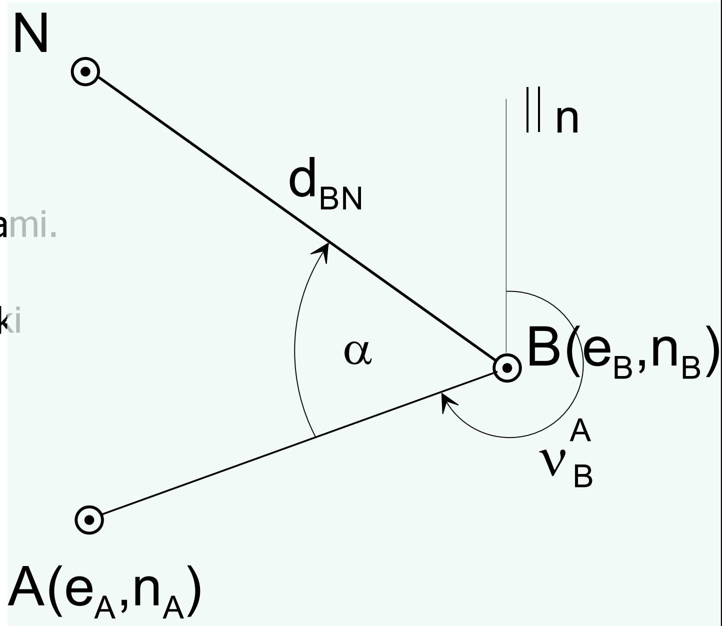
- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
  - določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
  - določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").

Določanje položaja točk v ravnini

- Načini določitve:
  - polarna izmera (polarni priklep),
  - zunanji urez (angl. "intersection"),
  - notranji urez (angl. "resection"),
  - ločni presek (angl. "lateration"),
  - prosto stojišče (angl. "free stationing"),
  - poligon – poligonski vlak (angl. "traverse").

- Dane količine:
  - koordinate danih točk.
- Opazovane količine:
  - smeri (koti) in razdalje.

Polarna izmera



- Polarna izmera (polarni priklep) sloni na zvezi pravokotnimi in polarnimi koordinatami.
- Določitev koordinat nove točke s polarno izmero uporabljamo pri detajlni topografski izmeri. Z dane točke opazujemo drugo dano točko (orientacija), ter izmerimo smer in dolžino do nove točke:
- dano: $A\ (e_A, n_A)$, $B\ (e_B, n_B)$
- merjeno: α
- neznano: $N\ (e_N, n_N)$

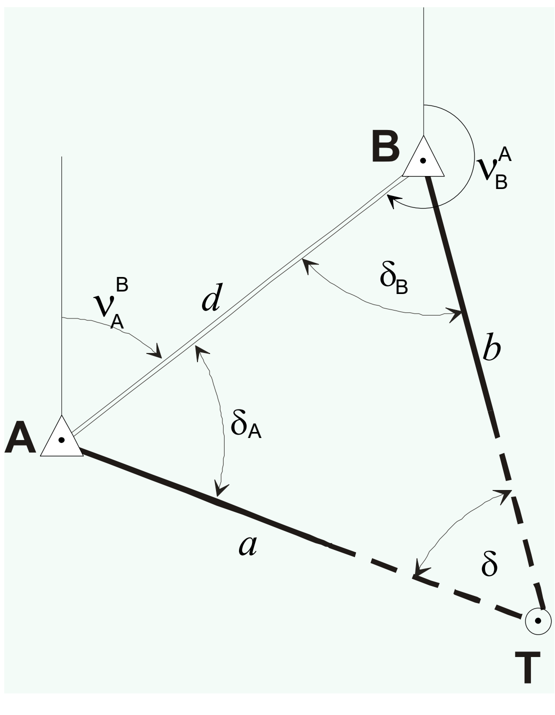
- Postopek:

1. Izračunamo smerni kot iz B na A;
2. izračunamo "orientirano smer" (smerni kot) iz B na N: $\nu_B^N = \nu_B^A + \alpha$
3. izračunamo koord. razlike od B do N;
4. Izračunamo koordinate točke N.

Zunanji urez

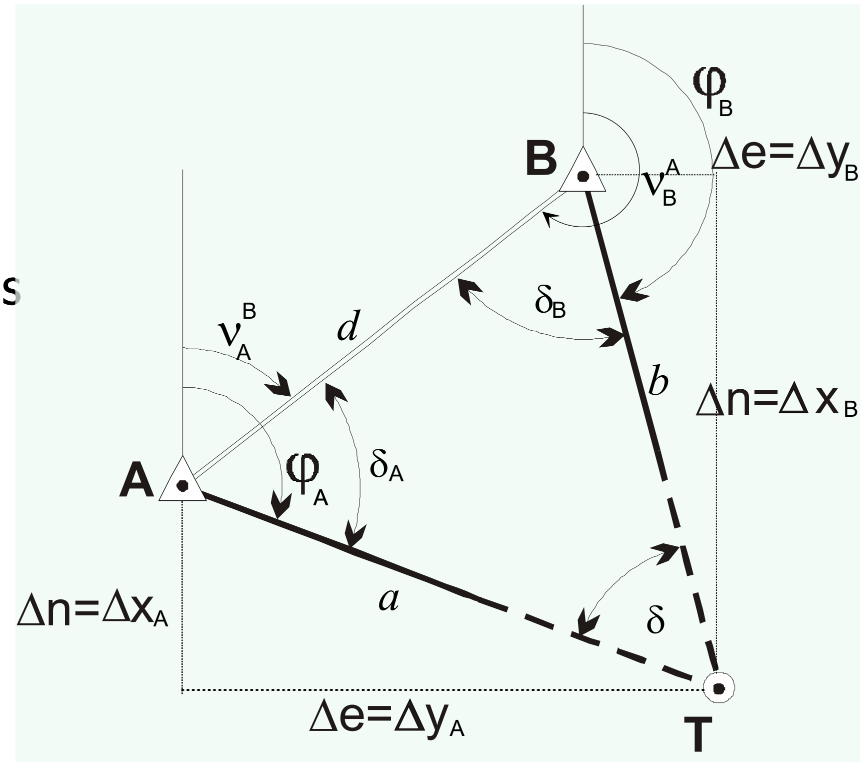
- Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih zunanjih smeri iz dveh danih točk. Zunanja smer je smer z dane točke na novo točko.

- dano: $A\ (Y_A, X_A)$, $B\ (Y_B, X_B)$
- merjeno: δ_A, δ_B
- neznano: $T\ (Y_T, X_T)$



Zunanj urez

- φ_A in φ_B sta orientirani smeri.
- Orientirana smer je kot, ki ga oklepa neka smer s severom.



- Orientirane smeri izračunamo:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \delta_A$$

$$\varphi_B = \nu_B^A - \delta_B$$

- oz. kot δ v oglišču T izračunamo kot:

$$\delta_A = \varphi_A - \nu_A^B$$

$$\delta_B = \nu_B^A - \varphi_B = (\nu_A^B \pm 180°) - \varphi_B$$

$$\delta = \varphi_B - \varphi_A$$

- Računska kontrola je: $\delta_A + \delta_B + \delta = 180°$.

- Da bi izračunali koordinate točke T prvo izračunamo koordinatne razlike med točkami A oz. B in T.

- iz sinusovega izreka izračunamo stranice trikotnika a in b.

$$\frac{d}{\sin\delta}=\frac{b}{\sin\delta_A} \qquad \frac{d}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin\delta_B}$$

$$b=\frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_A \qquad a=\frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_B$$

- Izračun koordinatnih razlik:

$$\Delta e_A=\Delta y_A=a\sin\varphi_A \qquad \Delta e_B=\Delta y_B=b\sin\varphi_B$$

$$\Delta n_A=\Delta x_A=a\cos\varphi_A \qquad \Delta n_B=\Delta x_B=b\cos\varphi_B$$

- Koordinate točke T so:

$$e_T\,'=e_A+\Delta e_A^T \qquad n_T\,'=n_A+\Delta n_A^T$$

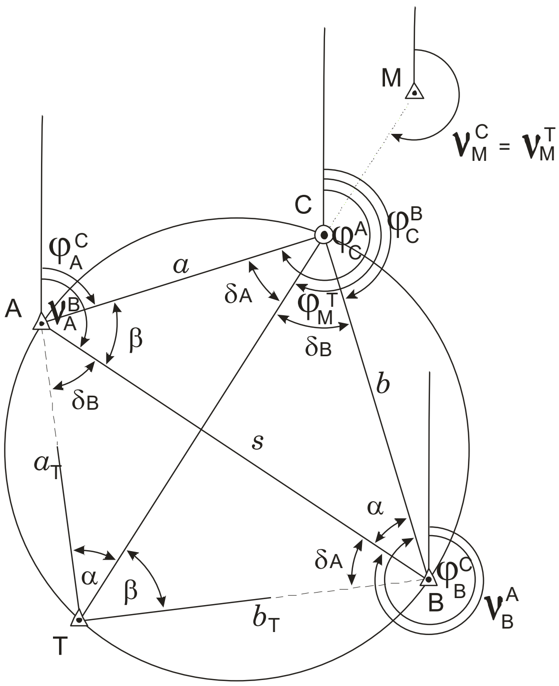
$$e_T\,''=e_B+\Delta e_B^T \qquad n_T\,''=n_B+\Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola (koordinati točke T morata biti enaki, če jih računamo s točke A ter s točke B):
- $e_T' = e_T''$ $\qquad$ $n_T' = n_T''$

Notranji urez

- Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih notranjih smeri iz nove točke do treh danih točk. Notranja smer je smer iz nove točke na dano točko.

- dano: $A\,(Y_A, X_A)$, $B(Y_B,X_B)$, $M(Y_M,X_M)$
- merjeno: α, β
- neznano: $T\,(Y_T, X_T)$



- Obstaja skoraj sto različnih načinov reševanja notranjega ureza.

- Predstavljen bo Collinsov način.

- Skozi točke T, A in B postavimo krog. Premica TM seka ta krog v točki C (v slavo Collinsa se imenuje Collinsova (pomožna) točka).

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad s_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

- Iz smernega kota ν_A^B in kotov α in β izračunamo orientirane smeri s točk A in B na točko C:

$$\varphi_A^C = \nu_A^B - \beta \qquad \varphi_B^C = \nu_B^A + \alpha = \nu_A^B + \alpha + \pi$$

- Kontrola:

$$\delta = 180° - (\alpha + \beta) = \varphi_A^C - \varphi_B^C, \qquad \delta = \delta_A + \delta_B$$

- Izračun koordinat Collinsove (pomožne) točke $C(y_C, x_C)$ opravimo na osnovi danih koordinat A in B ter orientiranih smeri φ_A^C in φ_B^C.

$$m = 2 \cdot r = \frac{s}{\sin \delta}$$

$$a = \overline{AC} = m \sin \alpha \qquad b = \overline{BC} = m \sin \beta$$

$$\Delta y_A^C = a \sin \varphi_A^C \qquad \Delta x_A^C = a \cos \varphi_A^C$$
$$\Delta y_B^C = b \sin \varphi_B^C \qquad \Delta x_B^C = b \cos \varphi_B^C$$

$$y_C = y_A + \Delta y_A^C = y_B + \Delta y_B^C$$
$$x_C = x_A + \Delta x_A^C = x_B + \Delta x_B^C$$

- Sedaj imamo določen položaj točke C. Zanima nas položaj točke T. Prvo izračunamo smerni kot s točke M na novo točko C:

$$\tan \nu_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{\Delta Y_M^C}{\Delta X_M^C}$$

- Z njegovo pomočjo izračunamo lahko orientirane smeri na novo točko T.

$$\delta_B = \nu_M^C - \varphi_C^B \qquad \delta_A = \varphi_C^A - \nu_M^C$$

$$\varphi_A^T = \nu_A^B + \delta_A$$
$$\varphi_B^T = \nu_B^A - \delta_B$$

$$a_T = \overline{AT} = m \sin \delta_B$$
$$b_T = \overline{BT} = m \sin \delta_A$$

$$\Delta y_A^T = a_T \sin \varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T = a_T \cos \varphi_A^T$$
$$\Delta y_B^T = b_T \sin \varphi_B^T \qquad \Delta x_B^T = b_T \cos \varphi_B^T$$

$$Y_T' = A_A + \Delta y_A^T \qquad X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$
$$Y_T'' = Y_B + \Delta y_B^T \qquad X_T'' = X_B + \Delta x_B^T$$

- Zadnja kontrola je enaka kot pri zunanjem urezu:

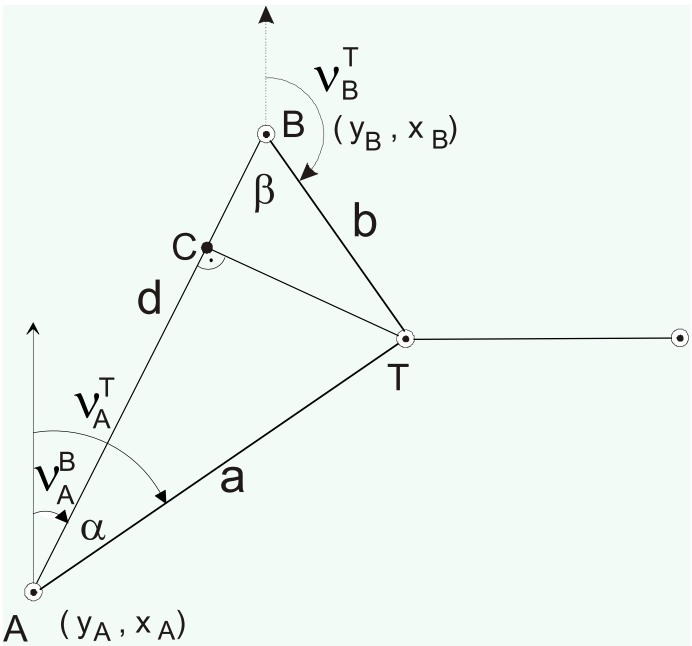
$$Y_T' = Y_T'' \qquad X_T' = X_T''$$

Ločni presek

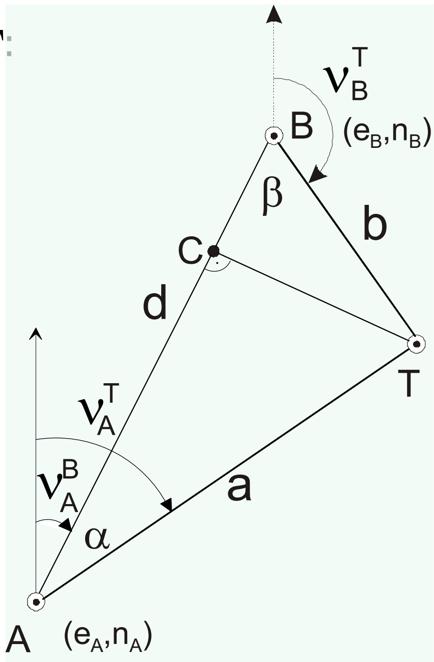
- Ločni presek je postopek za izračun koordinat točke s pomočjo merjenih razdalj od dveh (treh) danih točk do nove točke.

- merjeno: a, b
- dano: A (e_A,n_A), B (e_B, n_B)
- neznano: T (e_T, n_T)

- Ločni presek lahko izračunamo na dva načina.



- 1. način (trigonometrični):
- Iz kosinusovega izreka izračunamo kote v trikotniku ΔABT:



$$a^2 = d^2 + b^2 - 2db\cos\beta$$
$$b^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2da}$$
$$\cos\beta = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2db}$$

- kontrola je: $d = a\cos\alpha + b\cos\beta$

- Zatem izračunamo smerne kote stranic trikotnika a in b:

$$\nu_A{}^T = \nu_A{}^B + \alpha$$
$$\nu_B{}^T = \nu_B{}^A - \beta$$

- Smerni kot $\nu_A{}^B$ izračunamo iz koordinat danih točk A in B.

- S pomočjo smernih kotov izračunamo koordinatne razlike od A in B do točke T:

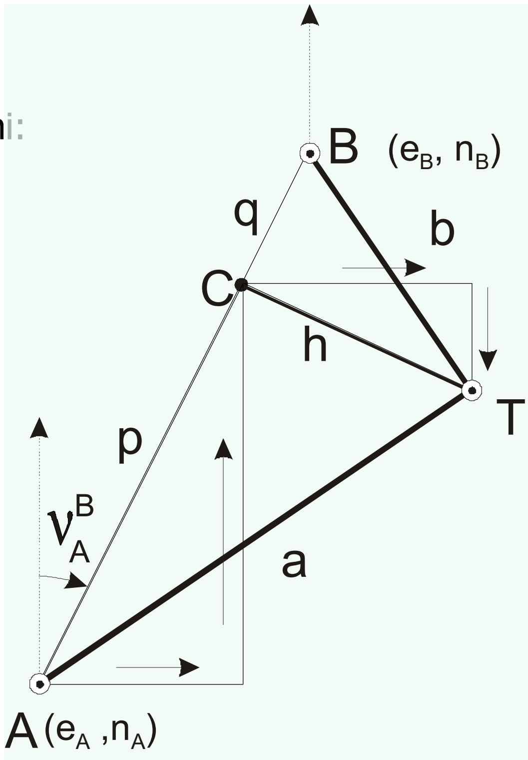
$$\Delta e_A^T = a\sin\nu_A^T \qquad \Delta n_A^T = a\cos\nu_A^T$$
$$\Delta e_B^T = b\sin\nu_B^T \qquad \Delta n_B^T = b\cos\nu_B^T$$

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$
$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola:

$$e_T' = e_T'' \qquad n_T' = n_T''$$

- 2. način (geodetski):
- Način računanja je enak izračunu koordinat linijskih točk. Tukaj računamo delne koordinatne razlike od točk A (B) do točke C (vznožje višine h) ter naprej od točke do nove točke T.
- h je višina v trikotniku $\Delta\mathrm{ABT}$;
- p, q projekciji stranic a in b na stranico d;
- Zveza med projekcijami ter višino in stranicami:



$$h^2 = b^2 - q^2$$

$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$

$$a^2 - b^2 = (p+q)(p-q) \qquad (p+q) = d$$

$$\frac{a^2 - b^2}{2d} = \frac{p-q}{2}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{p+q}{2}$$

- Projekciji p in q lahko izračunamo iz zgornjih zvez:

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$$

$$q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$$

- Če je točka z desne strani daljice AB (velja da je $h \oplus$):

$$e_T^{'} = e_A + p\sin\nu_A^B + h\cos\nu_A^B \qquad e_T^{'} = e_B - q\sin\nu_A^B + h\cos\nu_A^B$$

$$n_T^{'} = n_A + p\cos\nu_A^B - h\sin\nu_A^B \qquad n_T^{''} = n_B - q\cos\nu_A^B - h\sin\nu_A^B$$

- Če je točka z leve strani daljice AB (velja da je $h \ominus$):

$$e_T^{'} = e_A + p\sin\nu_A^B - h\cos\nu_A^B \qquad e_T^{'} = e_B - q\sin\nu_A^B - h\cos\nu_A^B$$

$$n_T^{'} = n_A + p\cos\nu_A^B + h\sin\nu_A^B \qquad n_T^{''} = n_B - q\sin\nu_A^B + h\sin\nu_A^B$$

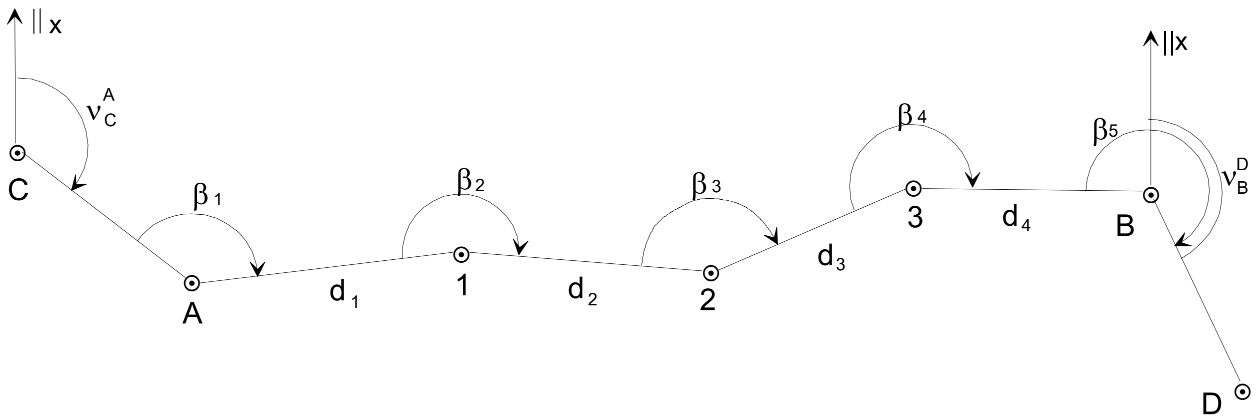
- Zadnja kontrola:

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

Poligon - poligonski vlak

- Položaj poligonskih točk določimo na osnovi merjenih priklepnih in lomnih kotov ter dolžin!



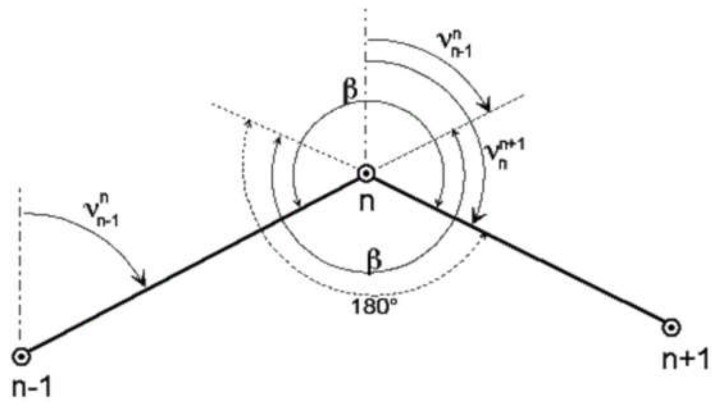
- dano: $A(e_A,n_A)$, $B(e_B,n_B)$, $C(e_C,n_C)$, $D(e_D,n_D)$
- merjeno: β_1, β_5, β_2, β_3, β_4, β_5, d_1, d_2, d_3, d_4
- neznano: $1\ (e_1,n_1)$, $2(e_2,n_2)$, $3(e_3,n_3)$

- Iz danih koordinat izračunamo smerne kote med danimi točkami $\nu_C{}^A$ in $\nu_B{}^D$:

$$\tan \nu_C^A = \frac{e_A - e_C}{n_A - n_C} \qquad \tan \nu_B^D = \frac{e_D - e_B}{n_D - n_B}$$

- Da bi izračunali neznane koordinate poligonskih točk moramo izračunati koordinatne razlike Δe in Δn, začenši od prve dane točke A.

- Zveza med smernimi in lomnimi koti – izračun smernega kota posamezne poligonske stranice:



- Splošno velja:

$$\nu_n^{n+1} = \nu_{n-1}^n + \beta_n \pm 180°$$

- Za poligon na sliki lahko izračunamo smerne kote na naslednji način:

$$\nu_A^1 = \nu_C^A + \beta_1 \pm 180^\circ$$
$$\nu_1^2 = \nu_A^1 + \beta_2 \pm 180^\circ$$
$$\ldots$$
$$\nu_B^D = \nu_3^B + \beta_5 \pm 180^\circ$$

- Izračun koordinat točk v poligonu se opravi prek postopne izravnave.

- Prisotna sta dva pogoja: pogoj kotov in pogoj koordinat.

- **Pogoj kotov**
- Smerni kot ν_B^D izračunan iz koordinat točk B in D ne bo enak vrednosti, izračunani iz vsote lomnih kotov.

$$\nu_B^D = \nu_C^A + [\beta] \pm n * 180^\circ \qquad [\beta] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

- Zaradi neizogibnih napak pri merjenju lomnih kotov nastane kotno nesoglasje f_β :

$$f_\beta = (\nu_B^D + n * 180^\circ) - (\nu_C^A + [\beta])$$

n je število lomnih kotov (β) v poligonu.

- f_β mora biti manjše od dopustnega kotnega nesoglasja Δ_β: $f_\beta < \Delta_\beta$

- Izračun popravkov za merjene lomne kote: kotno nesoglasje delimo s številom lomnik kotov (brez ostanka):

$$v_{\beta_i} = \frac{f_\beta}{n}$$

- S popravljenimi lomnimi koti lahko izračunamo dokončne smerne kote poligonskih stranic in nato koordinatne razlike:

$$\Delta e_1 = d_1 \sin \nu_A^1 \qquad \Delta n_1 = d_1 \cos \nu_A^1$$
$$\Delta e_2 = d_2 \sin \nu_1^2 \qquad \Delta n_2 = d_2 \cos \nu_1^2$$
$$\ldots$$

Pogoj koordinat

- Vsota izračunanih koordinatnih razlik bi morala biti enaka razliki koordinat danih točk A in B:

$$[\Delta e] \neq e_B - e_A \qquad [\Delta n] \neq n_B - n_A$$

- Zaradi neizogibnih napak pri merjenju poligonskih stranic pride do t.i. koordinatnih nesoglasij:

$$f_y = (e_\mathrm{B} - e_\mathrm{A}) - [\Delta e] \qquad f_x = (n_\mathrm{B} - n_\mathrm{A}) - [\Delta n]$$

Iz koordinatnih nesoglasij lahko izračunamo skupno linearno nesoglasje: $f_d = \sqrt{f_n^2 + f_e^2}$

- To mora biti manjše ali enako dopustnemu linearnemu nesoglasju Δ_d: $f_d \leq \Delta_d$

- Koordinatna nesoglasja f_y in f_x porazdelimo na koordinatne razlike in to sorazmerno dolžinam posameznih poligonskih stranic. Izračunamo popravke $v_{\Delta e}$ in $v_{\Delta n}$:

$$v_{\Delta \mathrm{e}_\mathrm{i}} = \frac{f_\mathrm{e}}{[d]} d_i \qquad v_{\Delta \mathrm{n}_\mathrm{i}} = \frac{f_\mathrm{n}}{[d]} d_i$$

$[d]$ je vsota poligonskih stranic poligona

- Izračunane popravke algebrsko prištejemo posameznim koordinatnim razlikam in dobimo popravljene koordinatne razlike $\Delta e'_\mathrm{i}$ in $\Delta n'_\mathrm{i}$:

$$\Delta e'_i = \Delta e_i + v_{\Delta e_i} \qquad \Delta n'_i = \Delta n_i + v_{\Delta n_i}$$

- S popravljenimi koordinatnimi razlikami izračunamo koordinate poligonskih točk:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_\mathrm{A} + \Delta e'_1 & n_1 &= n_\mathrm{A} + \Delta n'_1 \\ e_2 &= e_1 + \Delta e'_2 & n_2 &= n_1 + \Delta n'_2 \\ e_3 &= e_2 + \Delta e'_3 & n_3 &= n_2 + \Delta n'_3 \\ e_\mathrm{B} &= e_3 + \Delta e'_4 & n_\mathrm{B} &= n_3 + \Delta n'_4 \end{aligned}$$

- Vsa računanja se ponavadi opravijo v trigonometričnem obrazcu številka 19.

Zaključeni poligon

- dano: $A(e_A, n_A)$, $1(e_1, n_1)$
- merjeno: β_1, β_5, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5
- neznano: $2(e_2, n_2)$, $3(e_3, n_3)$, $4(e_4, n_4)$, $5(e_5, n_5)$