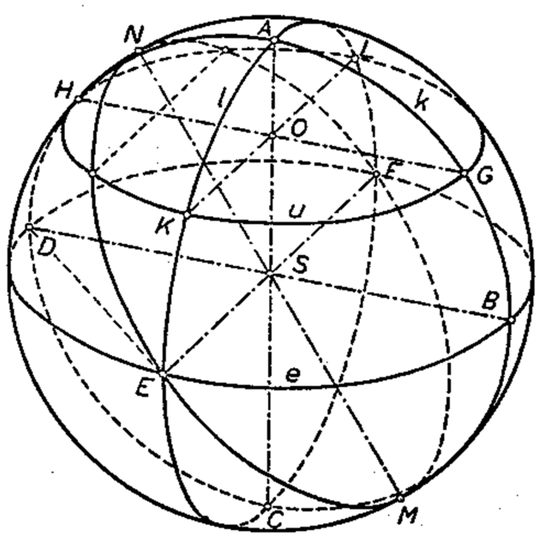
TRIGONOMETRIJA NA KROGLI

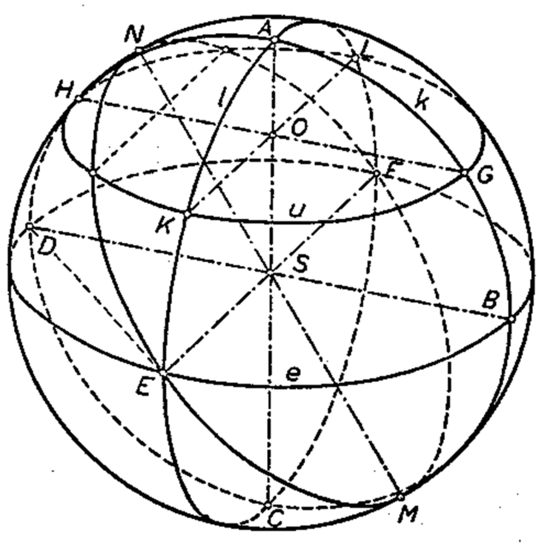
- Sferna trigonometrija se ukvarja z liki na krogli, zlasti z odnosi med elementi v sfernem trikotniku.
- Ime: " σφαιρα " (v grščini krogla)
- Krogla je geometrijsko mesto točk, ki so od stalne točke (središče krogle) oddaljene za stalno razdaljo (polmer krogle).
- Geometrija na krogli ni evklidična.
- Na krogli ni vzporednosti in podobnosti, vsota kotov v trikotniku ni 180°, hipotenuza je lahko krajša od katete...
- Geometrija na krogli je ena od možnih Riemannovih geometrij (B. Riemann, 1826-1866).



Sl. 1.

GEOMETRIJA NA KROGLI (2)

- Presek ravnine s kroglo je vedno krog.
- Če teče ravnina skozi središče krogle je presek veliki krog, sicer pa mali krog.
- Če premica prebode kroglo je del premice v njej (daljica) tetiva (KL, GH).
- Če poteka ta premica skozi središče krogle, imenujemo tako daljico "premer krogle" – diameter. Dolžina je enaka $2r$ (EF, MN).
- Za premer krogle je značilno, da sta si točki premera diametralni oz. polarni.
- Skozi dve točki na površju krogle je možno položiti poljubno mnogo ravnin.
- Če točki ne ležita na istem premeru krogle, če nista "protitočki", obstoja natančno ena ravnina, ki teče skozi točki in skozi središče krogle → z dvema točkama na površju krogle (če nista protitočki) je določen en sam veliki krog.



Sl. 1.

GEOMETRIJA NA KROGLI (2)

- "Sferna razdalja" $\rightarrow$ med dvema točkama na površju krogle je krajši lok velikega kroga skozi ti dve točki.
- Izražamo jo v dolžinskih enotah, če nam je polmer krogle znan, velikokrat pa s središčnim kotom, ki ustreza loku velikega kroga. Tako se izognemu uvedbi polmera v izračun, zato zaključki veljajo za kroglo s poljubnim polmerom.

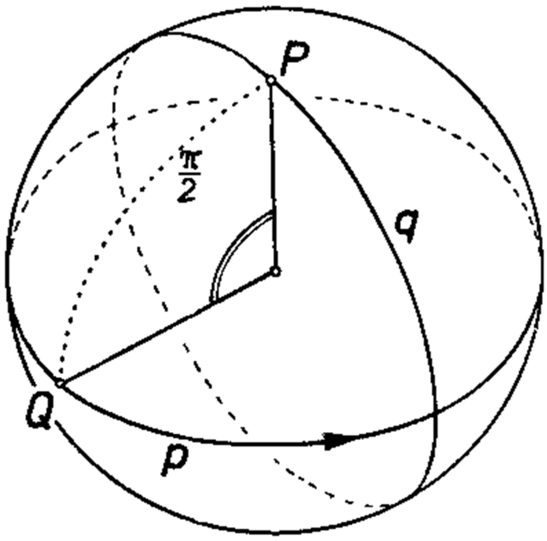
$$l^\circ = \frac{R\alpha^\circ}{\rho^\circ}$$ v stopinjah

$$l' = \frac{R\alpha'}{\rho'}$$ v minutah

$$l'' = \frac{R\alpha''}{\rho''}$$ v sekundah

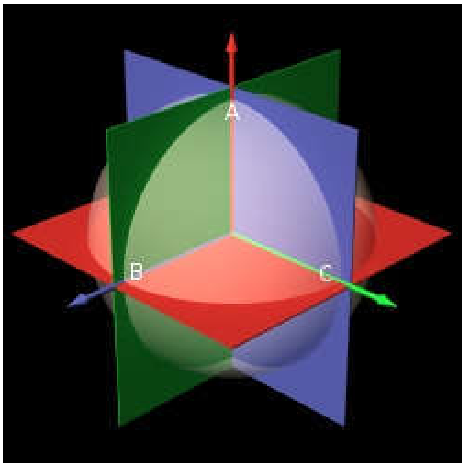
POL IN POLARA

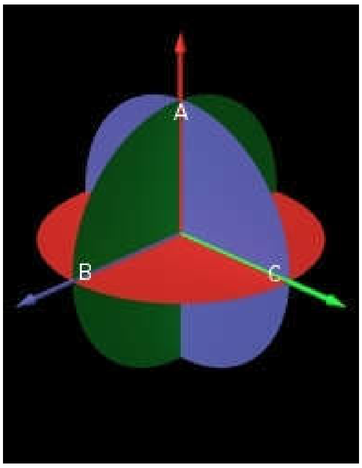
- Os poljubnega velikega ali malega kroga je tisti premer krogle, ki je pravokoten na ravnino tega kroga. Krajišči premera sta protitočki P_1 in P_2 in se imenujeta "pola".
- Sferna razdalja obeh polov je vedno 180°. Sferna razdalja vsakega od obeh polov velikega kroga od poljubne točke na tem krogu je stalna in znaša 90°.

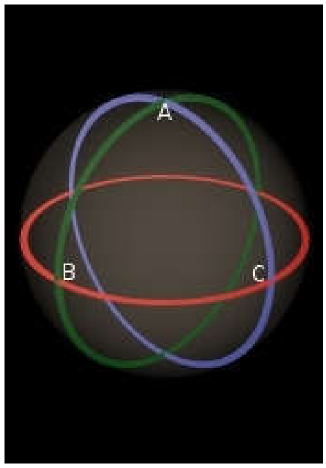


SFERNI TRIKOTNIK - NASTANEK

- Tri točke na površju krogle (če ne ležijo na istem velikem krogu) določajo tri velike kroge, ki se sekajo.

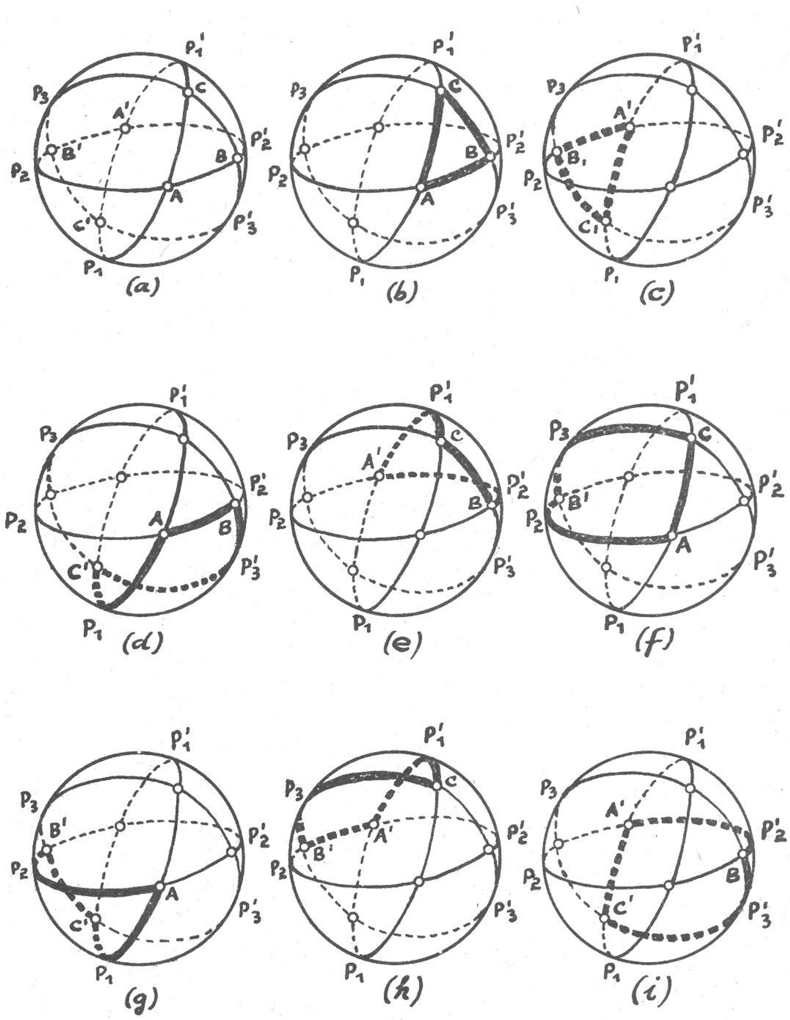






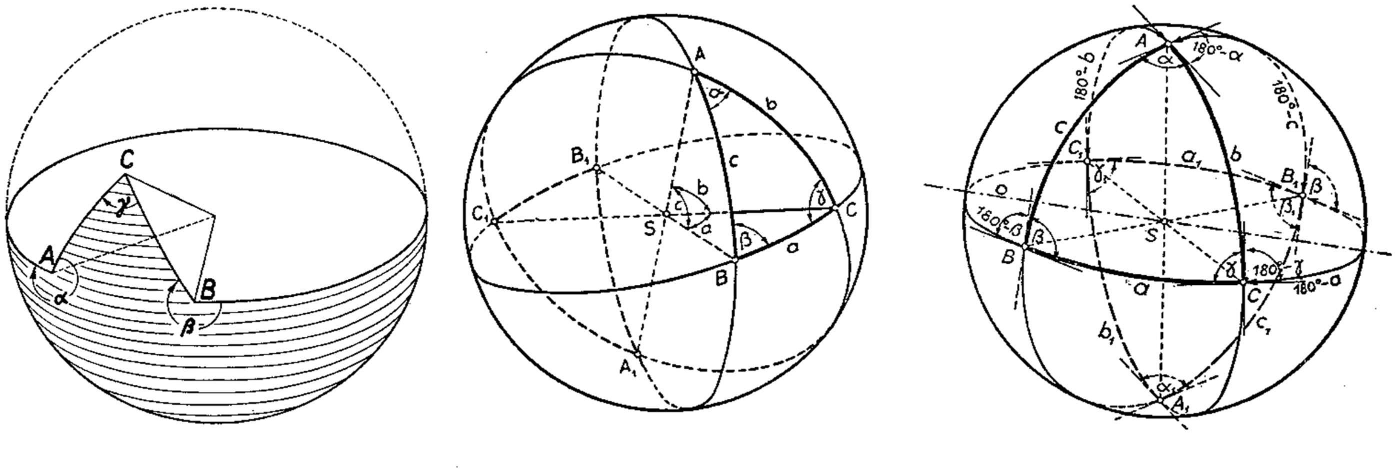
SFERNI TRIKOTNIK (2)

- Tri točke na površju krogle (če ne ležijo na istem velikem krogu) določajo tri velike kroge, ki se sekajo in tvorijo 8 sfernih trikotnikov.



SFERNI TRIKOTNIK (3)

- "Eulerjev sferni trikotnik" $\rightarrow$ koti in stranice manjši od 180°.
  (L. Euler, 1707-1783)



- Sferni trikotnik: 3 stranice in 3 koti.

LASTNOSTI SFERNEGA TRIKOTNIKA

1. $b + c \geq 180°$ $\qquad$ $\beta + \gamma \geq 180°$

   $b + c \leq 180°$ $\qquad$ $\beta + \gamma \leq 180°$

2. $|a - b| < c < |b + a|$

   $|b - c| < a < |b + c|$

   $|c - a| < b < |c + a|$

3. $a \geq b$ $\qquad$ $\alpha \geq \beta$

4. $\alpha + \beta < 180° + \gamma$

   $\beta + \gamma < 180° + \alpha$

   $\gamma + \alpha < 180° + \beta$

5. $0° < a + b + c < 360°$

   $d = 360° - (a + b + c)$ sferni "defekt"

6. $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$

   $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180°$ sferni "eksces"

ZVEZE MED ELEMENTI SF. TRIKOTNIKA

- 6 elementov: 3 stranice in 3 koti.
- Osnovni izreki sferne trigonometrije:
  - kosinusni izrek za stranice,
  - kosinusni izrek za kote,
  - sinusni izrek,
  - sinus-kosinusni izreki,
  - kotangensni izreki,
  - funkcije polovičnih kotov,
  - funkcije polovičnih stranic,
  - Delambreove (Mollweidove, Gaussove) enačbe,
  - Napierjeve enačbe.

KOSINUSNI IZREK ZA STRANICE

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

- Uporaba:
  - če sta dani dve stranici in kot med njimi,
  - če so dane vse tri stranice in iščemo kote;

KOSINUSNI IZREK ZA KOTE

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

- Uporaba:
  - če sta dana dva kota in priležna stranica,
  - če so dani vsi trije koti;

SINUSNI IZREK

V Eulerjevih sf. trikotnikih so elementi vedno manjši od 180°; zato so sinusi vedno pozitivni. Vstavimo pod koren in dobimo sinusni izrek:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c} = \frac{N^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

Število: $K = N\sec a \sec b \sec c$ je za en sferni trikotnik konstantno in se imenuje "konstanta" sfernega trikotnika.

- Uporaba:
  - le izjemoma, saj f-ja *sinus* ne daje enolične rešitve (f-ja *sinus* je v obeh kvadrantih pozitivna).
  - če računamo s sinusniim izrekom, preverimo rešitev → nasproti večje stranice leži večji kot in obratno.

IZREKI O POLOVICAH KOTOV -"s" IZREKI

- "s"izreki so obrazci, ki dajejo tangens polovičnega kota. Izvedemo jih iz kosinusnega izreka za stranice.

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{\sin(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2}=\frac{k}{\sin(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{k}{\sin(s-c)}$$

$$k=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \qquad s=\frac{a+b+c}{2}$$

Predznak korena je vedno pozitiven, ker so v Eulerjevih sf. trikotnikih stranice vedno manjše od 180°. Prav tako so vrednosti goniometričnih funkcij pod korenom vedno pozitivne glede na lastnost sfernega trikotnika (2. in 5. lastnost).

- Geometrično pomeni količina k tangens sfernega polmera r, sfernemu trikotniku včrtanega kroga: $k = \tan r$.

- "s" izreke uporabljamo za izračun neznanih kotov če so podane vse tri stranice. Dobimo enolično rešitev, saj so polovični koti vedno v I. kvadrantu.

IZREKI O POLOVICAH STRANIC -"σ" IZREKI

- "σ" izreki so obrazci, ki dajejo tangens polovične stranice. Izpeljemo jih iz kosinusnega izreka za kote, od koder izrazimo $\cos$ stranice...

$$\tan\frac{a}{2}=K\cos(\sigma-\alpha) \quad \tan\frac{b}{2}=K\cos(\sigma-\beta) \quad \tan\frac{c}{2}=K\cos(\sigma-\gamma)$$

$$K=\sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}} \qquad \sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

- Geometrično pomeni količina K tangens sfernega polmera R sfernemu trikotniku očrtanega kroga: $K = \tan R$.

- Predznak korena je vedno pozitiven, saj so v Eulerjevem sf. trikotniku stranice vedno manjše od 180°. Glede na lastnost sf. trikotnika: $180° < \alpha+\beta+\gamma < 540°$, je polovična vsota kotov (σ) vedno v II. ali v III. kvadrantu. Vrednost funkcije *kosinus* je vedno negativna. Razlike $(\sigma-\alpha)$, $(\sigma-\beta)$ in $(\sigma-\gamma)$ so vedno v I. ali v IV. kvadrantu. Zato so kosinusi teh razlik tudi vedno pozitivni.

- "σ" izreke uporabljamo za izračun stranic, če so podani vsi trije koti. Dobimo enolično rešitev saj so polovične stranice vedno v I. kvadrantu

Napierjeve enačbe (analogije) (1)

- V zgodovini se omenjajo kot Napierjeve analogije (sorazmerja). John Napier (1550-1617) škotski matematik, iznajdel logaritme.
- Ta sistem enačb dobimo s kombinacijo Delambrovih enačb in to z deljenjem ustrezne enačbe iz sistema I., II. in III. z enačbo iz sistema IV., V. in VI.

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{a-c}{2}}{\cos\frac{a+c}{2}}\cot\frac{\beta}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a-c}{2}}{\sin\frac{a+c}{2}}\cot\frac{\beta}{2}$$

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

Napierjeve enačbe (analogije) (2)

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2} \qquad \tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{a-c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}\tan\frac{b}{2} \qquad \tan\frac{a+c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\tan\frac{b}{2}$$

$$\tan\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}\tan\frac{a}{2} \qquad \tan\frac{b-c}{2}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\tan\frac{a}{2}$$

- Funkcija tangens je zelo občutljiva in enačba daje enolično rešitev.
- Za zgornji sistem enačb velja, če je: $a>b \Rightarrow \alpha>\beta$. V primeru, da je $a<b$ ter $\alpha<\beta$ enačbe dobijo obliko: $b-a$ in $\beta-\alpha$.

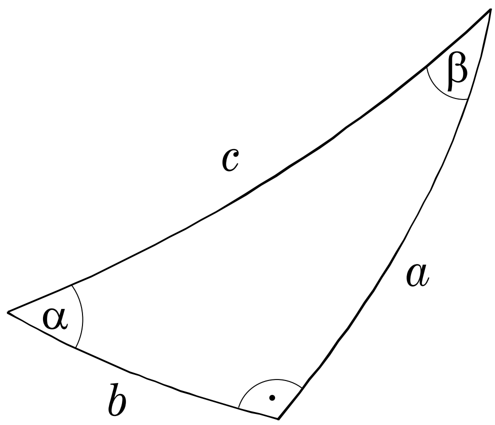
Numerično reševanje splošnega sf. trikotnika

- Sferni trikotnik je možno rešiti, če so podani trije elementi. Skupaj obstaja 6 tipov nalog:

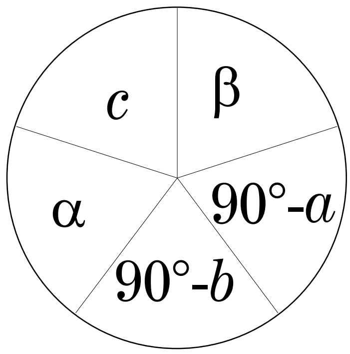
I. dane so tri stranice,
II. dani so trije koti,
III. dani sta dve stranici in vmesni kot,
IV. dana je ena stranica in oba priležna kota,
V. dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot,
VI. dana sta dva kota in enemu kotu nasproti ležeča stranica.

Pravokotni sf. trikotnik (1)

- Pravokotni sferni trikotnik je tisti trikotnik, ki ima en kot (γ) enak 90°. Njegovi elementi so: a, b kateti, c hipotenuza, γ = 90° pravi kot.



- Označimo elemente pravokotnega sf. trikotnika na obodu poljubnega kroga v istem smislu kot si sledijo v trikotniku. Pri tem izpustimo pravi kot γ, in postavimo na ustrezni mesti namesto katet njihove komplemente. Vsega skupaj imamo 5 elementov, izmed katerih ima vsak dva sosednja in dva nasprotna elementa.



Pravokotni sf. trikotnik (2)

- J. Napier je združil vseh deset obrazcev za pravokotni sferni trikotnik v enem pravilu, (Napierjevo pravilo):
- "Kosinus vsakega elementa je enak produktu sinusov nasprotnih elementov, ali pa produktu kotangensov sosednjih elementov."

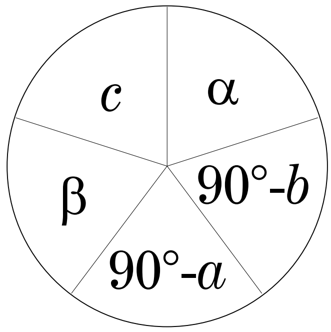
$$\cos c = \cot\alpha \cot\beta$$
$$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b) = \cos a \cos b$$

$$\cos\beta = \cot c \cot(90° - a) = \cot c \tan a$$
$$\cos\beta = \sin\alpha \sin(90° - b) = \sin\alpha \cos b$$

$$\cos(90° - a) = \sin a = \cot\beta \cot(90° - b) = \cot\beta \tan b$$
$$\cos(90° - a) = \sin a = \sin c \sin\alpha$$

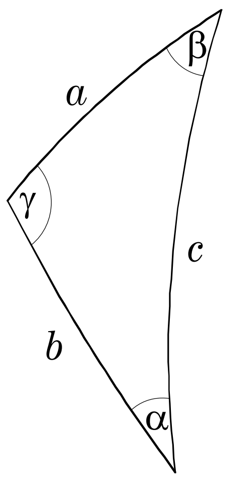
$$\cos(90° - b) = \sin b = \cot(90° - a)\cot\alpha = \tan a \cot\alpha$$
$$\cos(90° - b) = \sin b = \sin\beta \sin c$$

$$\cos\alpha = \cot(90° - b)\cot c = \tan b \cot c$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - a)\sin\beta = \cos a \sin\beta$$

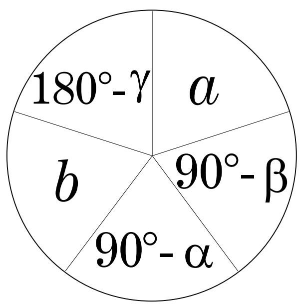


Pravostranični (kvadrantni) sf. trikotnik (1)

- Pravostranični sferni trikotnik je tisti, ki ima eno stranico (c) enako 90°. Njegovi elementi so: a, b nekvadrantni stranici in koti α, β in γ.



- Označimo elemente kvadrantnega sf. trikotnika na obodu poljubnega kroga v istem smislu kot si sledijo v trikotniku. Pri tem izpustimo kvadrantno stranico c, zamenjamo kot, ki je nasproti kvadrantne stranice z njegovim suplementom (180°-γ) in namesto ostalih dveh kotov pišemo njihove komplemente: (90°-α), (90°-β). Vsega skupaj imamo 5 elementov, izmed katerih ima vsak dva sosednja in dva nasprotna elementa.



Pravostranični (kvadrantni) sf. trikotnik (2)

- Napierjevo pravilo za kvadrantni sf. trikotnik je enako in se glasi:
- "Kosinus vsakega elementa je enak produktu sinusov nasprotnih elementov, ali pa produktu kotangensov sosednjih elementov."

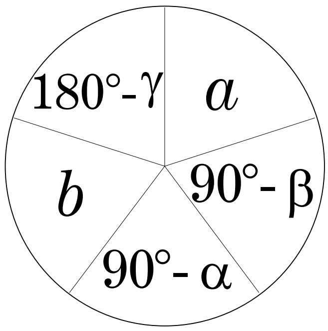
$$\cos(180^\circ - \gamma) = \cot b \cot a \qquad \cos\gamma = -\cot b \cot a$$
$$\cos(180^\circ - \gamma) = \sin(90^\circ - \alpha)\sin(90^\circ - \beta) \qquad \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos b = \cot(180^\circ - \gamma)\cot(90^\circ - \alpha) \qquad \cos b = -\cot\gamma\tan\alpha$$
$$\cos b = \sin a \sin(90^\circ - \beta) \qquad \cos b = \sin a \cos\beta$$

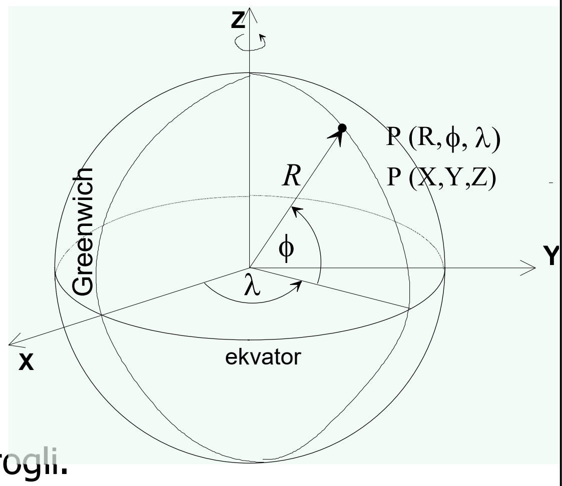
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cot b \cot(90^\circ - \beta) \qquad \sin\alpha = \cot b \tan\beta$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin a \qquad \sin\alpha = \sin\gamma \sin a$$

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cot(90^\circ - \alpha)\cot a \qquad \sin\beta = \tan\alpha \cot a$$
$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin b \sin(180^\circ - \gamma) \qquad \sin\beta = \sin b \sin\gamma$$

$$\cos a = \cot(180^\circ - \gamma)\cot(90^\circ - \beta) \qquad \cos a = -\cot\gamma\tan\beta$$
$$\cos a = \sin b \sin(90^\circ - \alpha) \qquad \cos a = \sin b \cos\alpha$$



Uporaba sf. trigonometrije v geodeziji



- Oblika Zemlja – krogla;
- Geografske koordinate na Zemlji-krogli:
  - Lok na vzporedniku in lok na meridianu.
  - Ortodroma in loksodroma.
  - Prva in druga geodetska naloga.
  - Izračun sferne razdalje dveh točk na Zemlji – krogli.
  - Sferna razdalja dveh točk na istem vzporedniku.