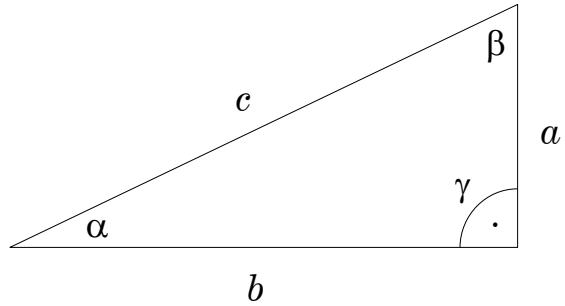


Trigonometrija v ravnini

- Pravokotni trikotnik
 a, b kateti; c hipotenuza



- Osnovne zveze:

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta$$

$$b = c \sin \beta = c \cos \alpha$$

$$a = b \tan \alpha = b \cot \beta$$

- Reševanje pravokotnega trikotnika: Pravokotni trikotnik je določen z dvema elementoma. Obstaja $\binom{5}{2} = 10$ možnih kombinacij, vendar vse niso medsebojno neodvisne. En ostri kot določa tudi drugega, tako da obstajajo 4 neodvisne naloge:

1. dani c, a hipotenuza in kateta (c, b)
2. dani a, b kateti
3. dani c, α hipotenuza in en kot (c, β)
4. dani a, α kateta in kot (a, β), (b, α), (b, β)

- Potrebno je preveriti če dani elementi omogočajo enolično rešitev. Mora biti izpolnjeno:

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \text{ ter } a < c, b < c \text{ in } c^2 = a^2 + b^2.$$

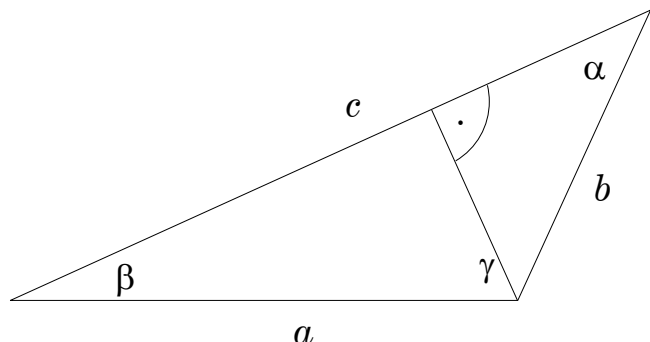
- Poševni (splošni) trikotnik

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

R – polmer očrtanega kroga

r – polmer včrtanega kroga

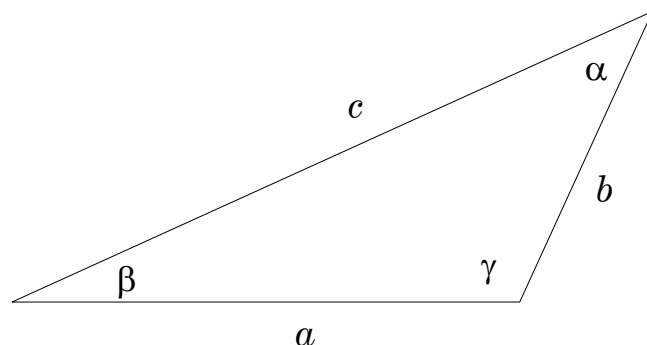
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$



Računanje v splošnem trikotniku

- Sinusni izrek

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



- Kosinusni izrek

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- Tangensni izrek

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan \frac{\beta-\gamma}{2}} \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan \frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

- Izrek o polovičnem kotu

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

- Heronov obrazec

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Ploščina trikotnika

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

$$P = \frac{abc}{4R} \quad P = s \cdot r$$

- Polmera očrtane in včrtane krožnice

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Reševanje splošnega trikotnika

- Trikotnik je možno rešiti, če so podani 3 elementi. Skupaj obstaja 4 tipa nalog, glede na to kateri elementi so podani.

- 1 tip naloge:

dano: a, b, c (vse tri stranice)

neznano: α, β, γ

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{(s-a)} \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{(s-b)} \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{(s-c)}$$

- 2. tip naloge:

dano: b, c, α (dve stranici in vmesni kot)

neznano: β, γ, a

Neznana kota lahko izračunamo s pomočjo tangentsnega izreka, katerega napišemo v malo spremenjeni obliki:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan \frac{\beta-\gamma}{2}} \quad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\cot \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\tan \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b+c}{b-c} \cot \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta-\gamma}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

stranico a lahko izračunamo iz sinusnega izreka:

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$$

○ 3. tip naloge:

dano: a, b, α (dve stranici in kot nasproti ene izmed njih)

neznano: β, γ, c

Z danimi elementi lahko izračunamo edino kot β prek sinusnega izreka:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

○ Pri tem lahko nastopijo trije primeri:

1. $\sin \beta > 1$, ne obstaja realna vrednost za β . Ni rešitve, trikotnik s takšnimi elementi ne obstaja.
2. $\sin \beta = 1$, $\Rightarrow \beta = 90^\circ$ Trikotnik je pravokoten.
3. $\sin \beta < 1$,
obstajata dve rešitvi za kot β : β_1 in $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$.
 $a > b$ potem mora biti tudi $\alpha > \beta$
iz sinusnega izreka sledi:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \sin \alpha > \sin \beta \Rightarrow \text{Kot } \alpha \text{ je bližje } 90^\circ \text{ kakor kot } \beta.$$

Ne glede na to, ali je dani kot α v I. ali II. kvadrantu, je rešitev vedno samo ena $\beta = \beta_1$. Nasproti danemu kotu leži večja stranica.

$a < b$ potem mora biti tudi $\alpha < \beta$

iz sinusnega izreka sledi:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \sin \alpha < \sin \beta \Rightarrow \text{Kot } \beta \text{ je bližje } 90^\circ \text{ kakor kot } \alpha.$$

1. dani kot α je v I. kvadrantu in obe rešitvi $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ zadoščajo pogoju $\alpha < \beta$.
2. dani kot α je v II. kvadrantu in nobena rešitev $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ ne zadošča pogoju $\alpha < \beta$. Ni rešitve za trikotnik z danimi elementi.

○ 4. tip naloge:

dano: a, α, β (stranica in priležna kota)

neznano: γ, b, c

Pogoj rešljivosti: $\alpha + \beta < 180^\circ$

Kot γ dobimo iz lastnosti trikotnika: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

Obe neznani stranici lahko izračunamo iz sinusnega izreka:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow b \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c$$

Uporaba v geodeziji

○ Izračun dolžine med dvema nedostopnima točkama

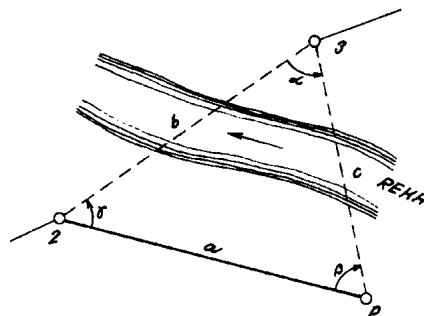
○ 1.

merjeno: a, α, β, γ

neznano: b, c

rešitev:

sinusni izrek



○ 2.

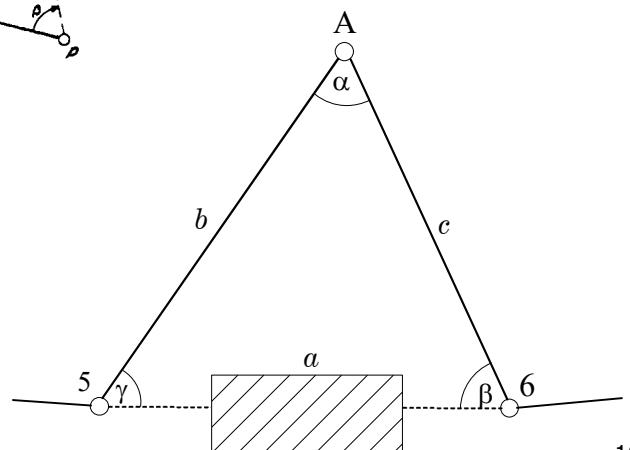
merjeno: α, b, c

neznano: a

rešitev:

kosinusni izrek;

tangensni izrek + sinusni izrek



- Redukcija poševno merjenih razdalj na horizont:

d_m merjena razdalja

d_r reducirana razdalja

Δh višinska razlika

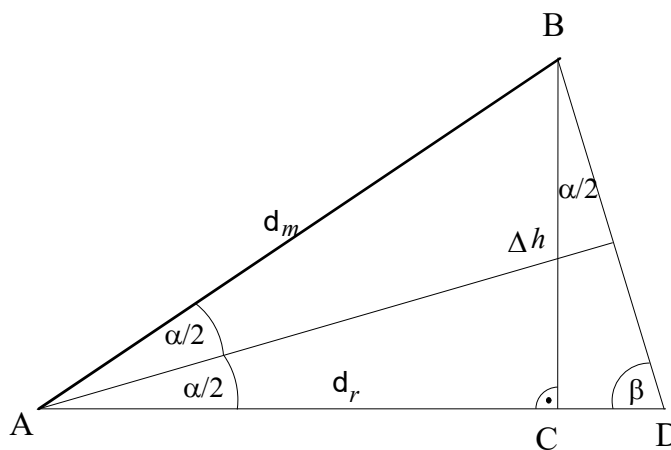
r redukcija

ABD enakokraki trikotnik

- rešitev s pomočjo višinske razlike:

$$d_m^2 = d_r^2 + \Delta h^2$$

$$d_r = \sqrt{d_m^2 - \Delta h^2}$$



- rešitev s pomočjo vertikalnega kota:

$$\cos \alpha = \frac{d_r}{d_m} \quad \Rightarrow \quad d_r = d_m \cos \alpha$$

$$r = d_m - d_r = d_m - d_m \cos \alpha$$

$$r = d_m (1 - \cos \alpha)$$

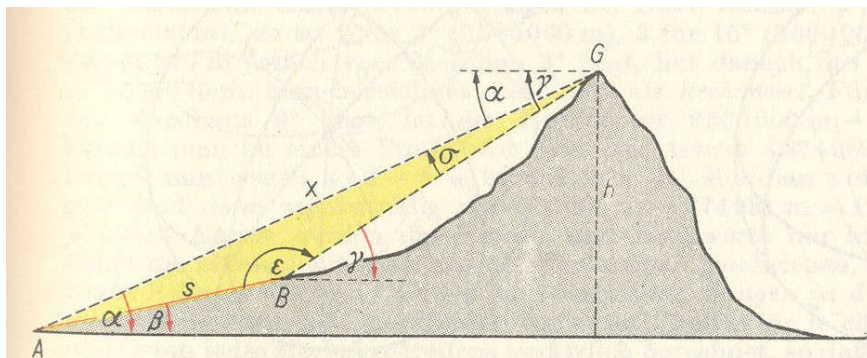
- Trigonometrično višinomerstvo

- 1.

merjeno: α, γ, s

(naklonski kot β)

neznano: h



$$h = x \sin \alpha$$

$$\varepsilon = \beta + (180^\circ - \gamma)$$

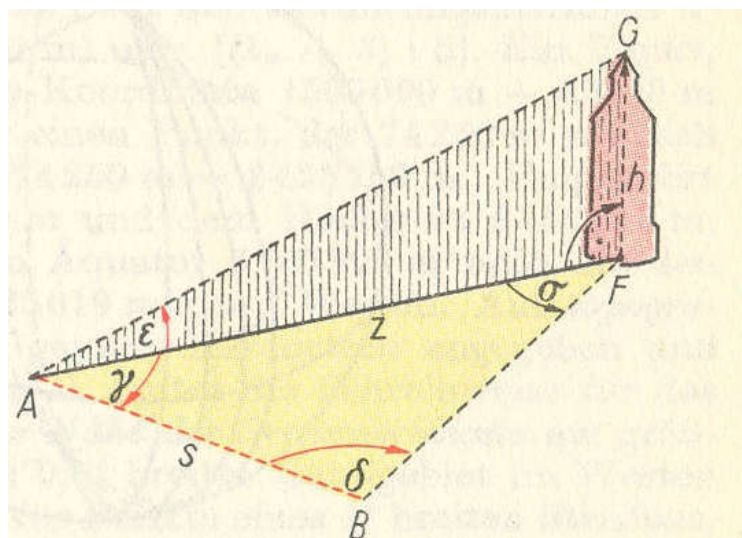
$$x = s \frac{\sin \varepsilon}{\sin \sigma}$$

$$\sigma = \gamma - \alpha$$

$$x = s \frac{\sin \varepsilon \sin \alpha}{\sin \sigma}$$

○ 2. Določitev višine objekta:

merjeno: $s, \varepsilon, \gamma, \delta$
 neznano: h



$$\overline{AF} = z \qquad h = z \tan \varepsilon$$

$$z = s \frac{\sin \delta}{\sin \sigma} = s \frac{\sin \delta}{\sin [180^\circ - (\gamma + \delta)]} = s \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$