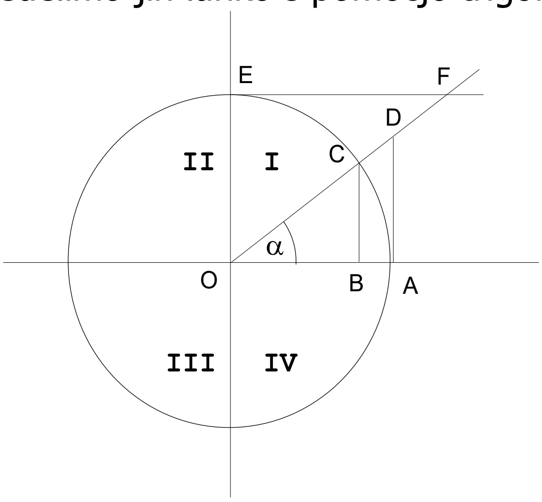
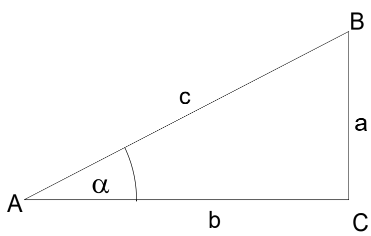
TRIGONOMETRIJA

- Trigonometrija → reševanje geometrijskih problemov v ravnini, na krogli ali v prostoru po računski poti.
  grški besedi: τριγωνον "trigonon" + μετρειν "metrein" oz. "metron".
- Trigonometrija:
  1. trigonometrične (kotne) funkcije,
  2. trigonometrija v ravnini,
  3. trigonometrija na krogli (sferna trigonometrija).
- Trigonometrija je del t.i. "uporabne matematike" in se uporablja v geodeziji, astronomiji, matematični kartografiji, geografiji, navtiki (navigaciji) ...

Kotne funkcije (1)

- Opredelimo jih lahko s pomočjo trigonometričnega kroga ali pravokotnega trikotnika.





- V pravokotnem trikotniku obstajajo trije elementi: hipotenuza in dve kateti. Med njimi lahko postavimo šest sorazmerij, od teh so tri neposredne in tri posredne. Neposredne so sinus, kosinus in tangens, posredne pa kotangens, sekans in kosekans.

Kotne funkcije (2)

$$\sin\alpha = BC = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = OB = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = AD = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = EF = \frac{b}{a}$$

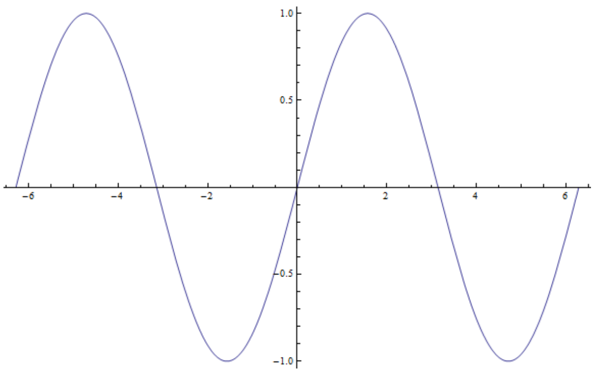
$$\mathrm{sc}\,\alpha = OD = \frac{c}{b} \qquad \csc\alpha = OF = \frac{c}{a}$$

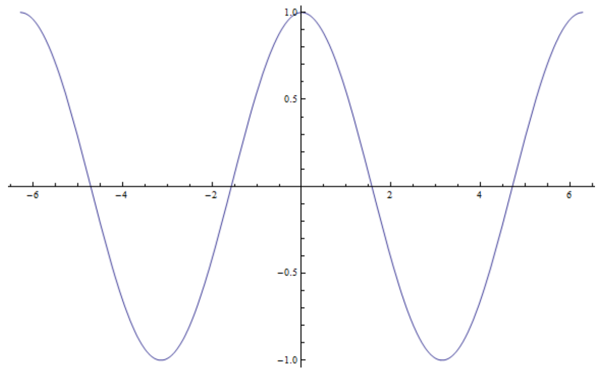
Funkcijam pripisujemo določen predznak odvisno od tega, v katerem kvadrantu trigonometričnega kroga leži premični polmer OC.

kvadrant	velikost kota	sin	cos	tan	ctg
I	od 0° do 90°	+	+	+	+
II	od 90° do 180°	+	–	–	–
III	od 180° do 270°	–	–	+	+
IV	od 270° do 360°	–	+	–	–

Lastnosti kotnih funkcij

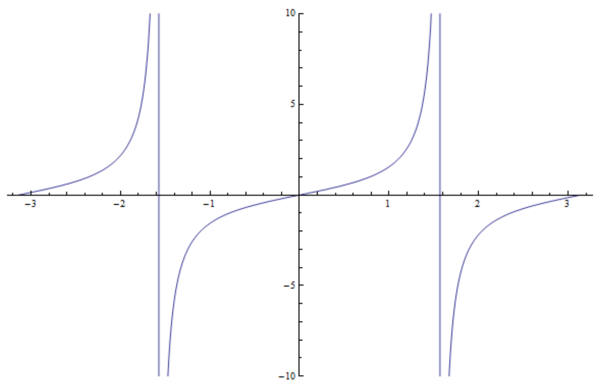
- Meje spreminjanja: sin, cos: od -1 do +1; tan, cot: od -∞ do + ∞.





- Funkcije negativnih kotov:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$



Redukcijske formule

- $90° < \beta < 360°;\ 0° < \alpha < 90°$
- Vrednosti kotnih funkcij v primerju, ko je kot a večji ali enak 90° in manjši od 360°, izračunamo s pomočjo funkcijskih vrednosti za ostri kot.
  t.i. redukcijske formule:

funkcija	$\beta=90°\pm\alpha$	$\beta=180°\pm\alpha$	$\beta=270°\pm\alpha$	$\beta=360°-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\tan\beta$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\beta$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\cot\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

Osnovni trigonometrični obrazci

- Funkcije enega kota:
  - Osnovne odnose med funkcijami dobimo lahko s pomočjo Pitagorovega teorema, tako da preuredimo razmerja med stranicami pravokotnega trikotnika:
  - $a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad (a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$
  - $1 + (b/a)^2 = (c/a)^2$ $\qquad (a/b)^2 + 1 = (c/b)^2$
  - Od tod sledijo iskane zveze:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$$

- Funkcije vsote in razlike kotov:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \qquad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

- Funkcije polovičnega kota:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

- Vsota in razlika funkcij:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \cot\alpha \pm \cot\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

- Funkcije dvojnega kota:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

- Produkt funkcij:

  $\sin\alpha\sin\beta = 1/2\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

  $\cos\alpha\cos\beta = 1/2\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

  $\sin\alpha\cos\beta = 1/2\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

- Potence funkcij:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-2\cos 2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

Razvoj goniometričnih funkcij v potenčne vrste

- Funkcijo $y=f(x)$, ki je zvezna in je vsaj n-krat odvedljiva, lahko v točki $x=a$, v mnogih primerih izrazimo v obliki vsote potenčne vrste, dobljene po Taylorjevem obrazcu:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)$$

  kjer je $n!$ fakulteta n in $f^{(n)}(a)$ n-ti odvod f v točki a.

- Za $a=0$ dobimo poseben primer te vrste, t.i. MacLaurinovo vrsto:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0)$$

- Potenčne vrste za funkcije $\sin$, $\cos$, $\tan$ in $\cot$ se glasijo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots \qquad \cot x = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \ldots\right]$$

- Op: Kot x je vedno podan v ločni meri! Če je kot podan v kotni meri, ga pretvorimo v ločno mero:

$$\alpha'' = \frac{\alpha''}{\rho''}$$

- Za majhne kote velja:

$\sin x \approx x$ $\quad\cos x \approx 1$ $\quad\tan x \approx x$