1 Trigonometrija

Trigonometrija je del geometrije, ki se ukvarja z reševanjem geometrijskih problemov v ravnini, na krogli ali v prostoru po računski poti, na podlagi zvez, ki obstajajo med sestavinami geometrijskih likov in slik. Za razliko od planimetrije in stereometrije, ki enake probleme rešujeta po konstrukcijski poti. Beseda trigonometrija izhaja iz grški besedi τριγωνον (*trigonon* –trikotnik) in μετρειν (*metrein* – meriti, oz. *metron* – mera. V ožjem pomenu predstavlja trigonometrija računanje trikotnikov in njegovih neznanih sestavin.

Trigonometrijo lahko razdelimo na:

- goniometrijo,
- trigonometrijo v ravnini oz. ravninsko tr.,
- trigonometrijo na krogli oz. sferno tr.

1. Goniometrija izhaja iz grški besedi (*gonia* – kot) in (*metron* – mera), in se torej bavi z računanjem kotov. V širšem pomenu proučuje goniometrija goniometrične in trigonometrične funkcije ter zveze med njimi.
2. Ravninska trigonometrija se bavi z odnosi med elementi v geometrijskih likih v ravnini, predvsem trikotnikih. Probleme vezane za četverokotnik preučuje tetragonometrija, mnogokotnike pa poligonometrija.
3. Sferna trigonometrija se bavi z odnosi med elementi v sfernem trikotniku.

Trigonometrija je del t.i. uporabne matematike in se obširno uporablja v:

- geodeziji,
- astronomiji,
- matematični geografiji,
- navigaciji,
- navtiki itd.

Trigonometrija je zgodovinsko nastala iz geodezije in astronomije; iz praktičnih potreb se je s časom se razvila kot matematična osnova za reševanje astronomskih in zemljemerskih problemov.

1.1 Kratek zgodovinski prikaz razvoja trigonometrije

Ni nam znano, kdaj so se prvič pojavili pojmi ali računske metode, ki jih danes lahko označimo kot trigonometrične. Predpostavimo lahko samo, da začetki trigonometrije segajo tja v čas Orientalne matematike, kulture starih Kitajcev, Babiloncev, Egipčanov itd. Orientalna matematika je nastala kot praktična znanost, ki je omogočala računanje koledarja, upravljanje žetve, organizacijo javnih del in pobiranje davkov. Nedvomno je, da je današnja seksagezimalna razdelitev krožnice nastala v Babilonu in to v zvezi z reševanjem astronomskih problemov. Babilonci so vedeli: "polmer kateregakoli kroga se lahko natančno šestkrat vriše kot tetiva v krog". Pri staroegipčanskih piramidah lahko zasledimo dokaze o poznavanju trigonometrije; vsa gradnja je temeljila na podlagi zvez med koti, smermi, razmerij itd.

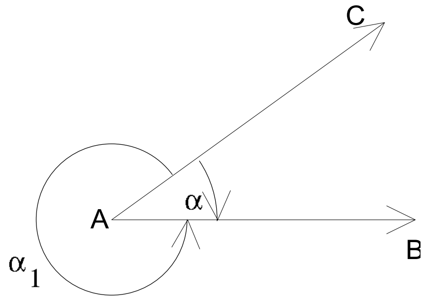
Trigonometrija starih Grkov, kot utemeljiteljev matematike in geometrije v današnjem pomenu, je temeljila bolj na filozofskem pogledu na svet. Geometrija je pri njih bila sredstev logike, čista teoretična znanost. Evklidove "Elemente" (III. st. p.n.š.), po Bibliji drugo najbolj razširjeno in prevajano knjigo na svetu, lahko danes ocenjujemo bolj z logičnega kot praktično-matematičnega stališča. Šele praktično reševanje astronomskih problemov je nakazalo pravo pot k goniometričnim funkcijam in trigonometričnim zvezam. Namreč izkazalo se je, da določenih matematičnih količin, potrebnih v astronomiji, ni možno neposredno izmeriti, pač pa izračunati posredno, prek določenih zvez z neposredno izmerjenimi količinami. Aristarh je III. stoletju p.n.š. izračunal razdalji do Lune in Sonca in je pri tem uporabil goniometrične funkcije. Menelaj in Hiparh (II. st. p.n.š.) sta podala šest oz. dvanajst knjig tetiv, izračunanih s pomočjo kotov. V Ptolemejevem (II. st. n.š.) "Velikem zborniku" oz. bolj znanem pod arabskim imenom "Almagest" je podan pregled celotne grške astronomije in računanja tetiv. Od Evklidovega učenca Arhimeda (III. st. p.n.š.) nam je, za trigonometrijo pomembno, ostalo t.i. Ludolfovo število PI.

Kod edini nadaljevalci dela starih Grkov so se v srednjem veku izkazali Arabci. Čeprav niso imeli takšnih imen kot Grki, so podpirali splošni napredek znanosti. Na podlagi starogrške in staroindijske matematike so trigonometrijo v veliki meri nadgradili in uspeli zedinit račun in konstrukcijo geometrije. V XI. st. so v Evropo, preko Španije prinesli znake za števila, ki jih danes uporabljamo. Sama beseda *algebra* izhaja iz arabščine. Od sanskrtske besede *djiva* (tetiva) je nastal sprva arabski *djaib* (prevoj), ki ga je Plato do Tivolija prevedel v latinščino kot *sinus*. Na zahodu je sinus dolgo imenovan *sinus primus* kosinus pa *sinus secundus*. Šele leta 1623 je Günther uvedel današnji cosinus, ki pa izhaja iz sanskrtske besede *kotidjiva* (dopolnilni sinus). Al Battani je prvi uvedel zvezi cotangens, Abul Wefa pa zvezo tangensa, seveda še v zelo obširni in dokaj nerazumljivi obliki. Persijcu Nassirju Eddinu Tusi (XIII. st) gre zasluga, da je postala podoba trigonometričnih obrazcev, več ali manj, podobna današnjim. Njemu pripisujejo tudi iznajdbo sinusovega stavka.

Prek Arapcev je prišla trigonometrija v Evropo. Pomembni so prevodi klasičnih matematičnih rokopisov Regiomontana (XV. stoletje). Preporod znanosti v Evropi v času renesanse, zlasti iznajdba logaritmov v XVII. stoletju (Napier in Byrgi) je dala razvoju goniometrije in trigonometrije novi zagon. K temu je prispevala tudi prva praktično izvedena triangulacija, XVII. st. Nizozemec Willebrord Snell. V XVIII. st. je Leonhard Euler opravil obsežno reformo trigonometrije in goniometrije ter podal bolj skladno obliko obrazcev, ki se je z manjšimi spremembami ohranila do danes.

2 Pojem kota

Smer, kateri je določena smer gibanja imenujemo *orientirana smer*. Smer gibanja lahko označimo z puščico ali dvema točkama. Vzemimo sedaj dve orientirane smeri, z izhodiščem v točki A. Orientirane smeri sta ponazorjeni s poltrakoma AC in AB (slika 1).



slika 2.1: kot

Kot je razlika dveh smeri in se meri z velikostjo vrtenja enega poltraka do preklopa z drugim poltrakom. Na ta način dobimo lahko dva kota α in α_1, ki sta v smislu definicije kota enaka. Na primer, če je podana ena smer AB in kot α, s tem še ni določen položaj druge smeri. Da bi odpravili to dvoumnost moramo podati smer vrtenja enega poltraka, da bi tega dovedli do preklopa z drugim poltrakom. To je stvar dogovora. Tako je v matematiki sprejeta levosučna smer (v nasprotnem smislu vrtenja urinega kazalca), v geodeziji pa je dogovorno izbran desnosučno vrtenje (v smislu vrtenja urinega kazalca). Vedno je dogovorna smer vrtenja pozitivna, obratna pa negativna.

V geodeziji je torej kot α pozitiven, kot α_1 pa negativen in velja:

$$\alpha + \alpha_1 = 0.$$

2.1 Merjenje kotov

Obstajata dve različni meri kotov:
1. kotna mera,
2. ločna mera.

2.2 Kotna mera

Mera velikosti kota je vrtenje smeri; samo vrtenje pa merimo z razdelitvijo krožnice na določeno število delov. Obstajata dva načina (sistema) razdelitve krožnice:
- seksagezimalni sistem
- centezimalni sistem

2.2.1 Seksagezimalni sistem

Osnovna enota sistema ustreza razdelitvi krožnice na 360 delov. Enota je *stopinja*, ki je razdaljen na 60 *minut*, ta pa še na 60 *sekund*. Označujemo jih:

$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$
$1^\circ = 3600''$

V tem sistemu pišemo kote kot troimensko število: $217^\circ\ 28'\ 50''$.

Ta sistem je najstarejši in je bil znan že starim Babiloncem (menili so da leto ima 360 dni). Imena minute in sekunde izhajajo iz latinskih besed:

- "partes minutae primae" (manjši deli prvega reda)
- "partes minutae secundae" (manjši deli drugega reda).

Obstaja enostavna povezava s časovnim enotam:

$24^h = 360^\circ$
$1^h = 15^\circ$
$1^m = 15'$
$1^s = 15''$

Slaba stran sistema je pretvorba stopinj, minut in sekund v decimalne dele stopinj.

Sekunde oz. minute se spremenijo v decimalne dele minut oz. stopinj tako, da jih delimo s 60. Spreminjati začnemo pri sekundah:

$54^\circ\ 39'\ 27'' \to \quad 27'' : 60 = 0{,}45'$
$39{,}45 : 60 = 0{,}6575^\circ \to 54^\circ{,}6575$

2.2.2 Centezimalni sistem

Osnovna enota sistema ustreza razdelitvi krožnice na 400 delov in se imenuje *grad.* Manjše enote so dekadne. Grad vsebuje 100 centezimalnih minut (*centigradov)*, le-ta pa 100 centezimalnih sekund (*centicentigradov*). Označujemo jih:

$1^g = 100^c$
$1^c = 100^{cc}$
$1^g = 100000^{cc}$

V tem sistemu pišemo kote kot decimalno število:

$217{,}8937^g = 217^g\ 89^c\ 37^{cc}$.

V praksi se vse bolj srečujemo z imenom *gon* namesto grada. Manjša enota je *miligon* (tisoči del gona), oznaka mg.

1g = 1000mg

Centezimalni sistem se je prvič pojavil v pisani obliki v XV stoletju vendar sta prava začetnika sistema Francoza Gelibrand in Lagrange (1783). V uporabi je od konca francoske revolucije 1789. V Nemčiji vpeljali sistem v geodezijo že leta 1937.

Pogostokrat se seksagezimalni sistem imenuje stari, centezimalni pa novi sistem. Tako obstaja tudi pri klasičnih geodetskih instrumentih razdelitev krogov na eden oz. drugi sistem. Z novimi elektronskimi instrumenti težave okoli sistema odpadejo.

Pretvorba iz enega v drugi sistem se opravi preko razmerja:

$$90^o = 100^g$$

kar nam da:

$$S^o = \frac{9}{10} C^g \qquad C^g = \frac{10}{9} S^o$$

$$1° = \frac{10}{9} 1^g = 1{,}11111^g \qquad 1^g = \frac{9^o}{10} 0{,}9°$$

$1' = 1^c{,}85185$ | $1^g = 54' = 3240''$

$1'' = 3{,}0864^{cc}$ | $1^c = 32{,}4''$

$1^{cc} = 0{,}324''$

$1'' = 0{,}3086\mathrm{mg}$

$1\mathrm{mg} = 3{,}24''$

Zgled za pretvorbo:

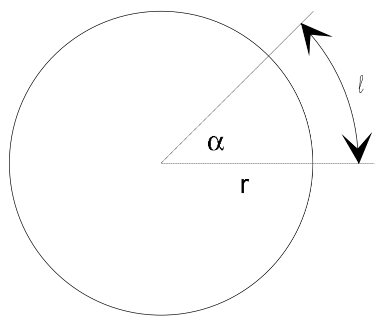
$15^o\ 32'\ 27'' = 15{,}5408333$

$15{,}5408333 \times 10/9 = 17{,}2676\ (17^o\ 26^c\ 76^{cc})$

$17{,}2676 \quad \times 9/10 = 15{,}54084 = 15^o\ 32'\ 27''$

2.2.3 Ločna mera

Imenuje se tudi analitična mera. Izhajamo iz dejstva, da se središčni koti na isti krožnici izražajo z njim pripadajočimi loki (slika 2.2). Razmerje dveh kotov ni odvisno od enote s katero merimo kote. Naj neki kot vsebuje α enot kotne mere, in pravi kot (90°) vsebuje R istih enot. Velja da je razmerje med kotom α in polnem kotu 4R, enako kakor razmerje med pripadajočem lokom l in obodom kroga $2r\pi$.



slika 2.2: lok kot mera kota

$$\alpha : 4R = l : 2r\pi$$

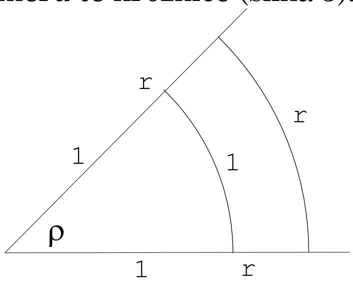
$$\alpha = \frac{4Rl}{2\pi r} = \frac{2Rl}{r\pi} = \frac{2R}{\pi}\frac{l}{r}$$

$2R/\pi$ je konstanta in je torej vsak kot, ne glede na enoto s katero merimo, odvisen samo od razmerja l/r. To razmerje je neimenovano število in je odvisno samo od od kota α.

Nas zanima kot, za katerega je razmerje *l*/r enako 1.

$$l\,/\,r=1$$

Ta kot se se imenuje *radian* in je enak ρ=2R/π. Radian je središčni kot, ki na katerikoli krožnici ustreza loku enakemu polmeru te krožnice (slika 3).



slika 2.3: radian

Radian se lahko izrazi izrazi v stopinjah, minutah in sekundah za vsako kotno mero. To nam ponazarja tabela 1. Tabela 1 nam omogoča tudi prehod iz ločnih mer v kotne mere in obratno.

$$\alpha=\frac{2R}{\pi}\alpha\ (\text{rad})$$

$$\alpha^{o}=\frac{180^{o}}{\pi}\alpha\ (\text{rad}) \qquad \alpha^{g}=\frac{200^{g}}{\pi}\alpha\ (\text{rad})$$

$$\alpha(\text{rad})=\frac{\pi}{2R}\alpha$$

$$\alpha(\text{rad})=\frac{\pi}{180^{o}}\alpha^{o} \qquad \alpha\ (\text{rad})=\frac{\pi}{200^{g}}\alpha^{g}$$

Splošno velja:

$$\alpha(\text{rad})=\alpha(rad)=\frac{\alpha^{o}}{\rho^{o}}=\frac{\alpha'}{\rho'}=\frac{\alpha''}{\rho''}$$

$$\alpha^{o}=\alpha(\text{rad})\rho^{o}\ ....$$

Enota	Seksagezimalna razdelba		Centezimalna razdelba	
^{o} in ^{g}	$\frac{180^{o}}{\pi}$	$\rho^{o}=57^{o},29578$	$\frac{200^{g}}{\pi}$	$\rho^{g}=63^{g},6620$
’ in ^{c}	$\frac{180^{o}.60}{\pi}$	ρ’=3437’,75	$\frac{200^{g}.100}{\pi}$	$\rho^{c}=6366^{c},20$
“ in ^{cc}	$\frac{180^{o}.3600}{\pi}$	ρ“=206264,8”	$\frac{200^{g}.100000}{\pi}$	$\rho^{cc}=636620^{cc}$

Tabela 2.1: prehod iz ločne v kotno mero in radiane

2.2.4 Dolžina loka

Na krogu s polmerom r, središčni kot α radianov ustreza loku dolžine l:

$$l = r \times \alpha \qquad \alpha(rad) = \frac{l}{r}$$

dolžina loka = radij × središčni kot

Povdarimo, da sta l in r lahko izražena v poljubnih merskih dolžinskih enotah; ni pomembno katerih, vendar morata biti v enakih.

$$\alpha : 360° = l : 2r\pi$$

2.3 Dolžinske merske enote

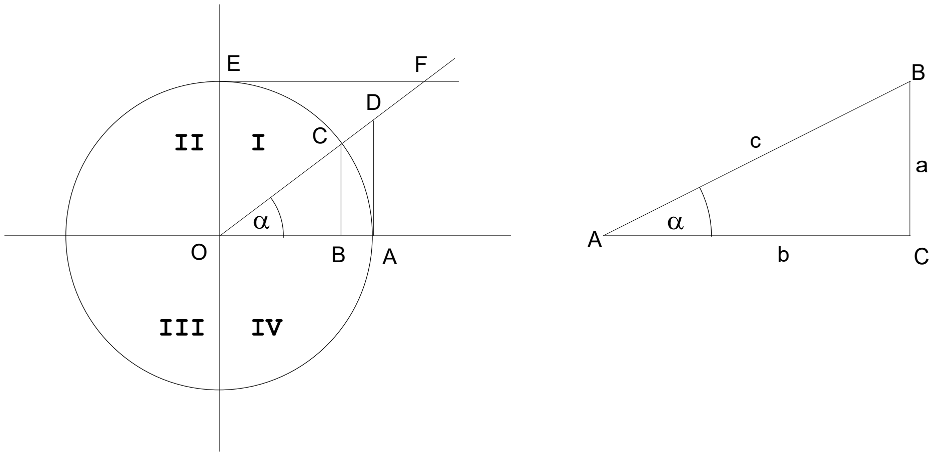
Osnovna enota za dolžino v SI sistemu merskih enot je *meter*. Manjše enoto so decimeter (dm), centimeter (cm), milimeter (mm), mikron (μ). Večje enote so hektometer (hm), kilometer (km).

Dolžinske merske enote:		Površinske mere:
1 meter = več različnih definicij: 1/10000000 dolžine meridiana, ki gre skozi Pariz, 1650763.73 valovnih dolžin EMV sevanja Kriptona 86 pri prehodu med različnimi stanji pot svetlobe v vakuumu v 1/299792438 sekunde **1 km, 1 dm, 1 cm, 1 mm, 1μm, 1 nm** Stare dolžinske mere: **1 seženj** =1.896484 m **1 čevelj** = 1/ 6 sežnja = 0.316081 m **1 palec** = 1 / 12 čevlja = 0.026340 m **1 črta** = 1 / 12 palca = 0.002195 m **1 poštna milja** = 4000 sežnjev = 7.585936 km		**1 m^2** **1 a** = 100 m^2 **1 ha** = 100 a = 10000 m^2 **1 km^2** =1000000 m^2
angloameriške merske enote za dolžino:		in^2 = 6,4516 10^{-4} m^2 (točno)
1 yard	1yd = 0,9144m	ft^2 = 9,2903 10^{-2} m^2 (točno)
čevelj (foot)	1' =0,3048m	yd^2 = 0,836127 m^2
palec, col (inch)	1" = 2,54cm	jutro (acre) 1 ac = 4 046,86 m^2
milja (US)	1mi = 1 609,344m (1m=1760yd)	mi^2 = 2,589 988 m^2
UK morska milja	1 n.mi. (UK) = 1 853, 18 m	
medn. morska milja	1 n.mi. = 1 852,0 m	

Tabela 2.2: SI in angloameriške dolžinske enote

3. Goniometrične funkcije

Goniometrične funkcije kota α opredelimo lahko s pomočjo trigonometričnega kroga (polmer kroga, R=1), ali pa s pomočjo pravokotnega trikotnika (za ostre kote). Kot α merimo od nepremičnega polmera OA do premičnega polmera OC nasprotno vrtenju urinega kazalca (slika 4).



slika 3.1 definicija goniometričnih funkcij

V pravokotnem trikotniku obstajajo trije elementi: hipotenuza in dve kateti. Med njimi lahko postavimo šest sorazmerij, od teh so tri neposredne in tri posredne. Neposredne so sinus, kosinus in tangens, posredne pa kotangens, sekans in kosekans.

$\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$ $\qquad \cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$ $\qquad \tan\alpha = AD = \frac{a}{b}$ $\qquad \cot\alpha = EF = \frac{b}{a}$

$\mathrm{sc}\alpha = OD = \frac{c}{b}$ $\qquad \csc\alpha = OF = \frac{c}{a}$

Funkcijam pripisujemo določen predznak odvisno od tega, v katerem kvadrantu trigonometričnega kroga leži premični polmer OC. Razpredelnica nam poda predznak vseh goniometričnih funkcij.

kvadrant	velikost kota	sin	cos	tan	ctg
I	od 0° do 90°	+	+	+	+
II	od 90° do 180°	+	–	–	–
III	od 180° do 270°	–	–	+	+
IV	od 270° do 360°	–	+	–	–

Preglednica 3.1: predznak goniom. funkcij glede na kvadrant kota

Meja spreminjanja:
sinus in kosinus: od –1 do +1;
tangens in kotangens: od $-\infty$ do $+\infty$.

Definicija goniometričnih funkcij se nanaša na katerikoli kot, ne samo na ostre kot je predstavljeno na sliki. Če je kot negativen prevedemo funkcijo na funkcijo pozitivnega kota po obrazcih:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$$

Če se kot nahaja $90° < \beta < 360°$, prevedemo goniometrično funkcijo na funkcijo ostrega kota po obrazcih za prevedbo, glej preglednico 4.2.

Preglednica 3.2: prevedba goniometrične funkcije poljubnega kota na funkcijo ostrega kota

funkcija	$\beta=90\pm\alpha$	$\beta=180\pm\alpha$	$\beta=270\pm\alpha$	$\beta=360-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

3.1 Osnovni goniometrični obrazci

3.1.1 Funkcije enega kota

Osnovne odnose med funkcijami dobimo lahko s pomočjo Pitagorinega teorema, tako da preuredimo razmerja med strancami pravokotnega trikotnika.

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$$

$$1 + (b/a)^2 = (c/a)^2 \qquad (a/b)^2 + 1 = (c/b)^2$$

Od tod sledijo iskane zveze:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

3.1.2 Funkcije vsote in razlike kotov

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

3.1.3 Funkcije polovičnega kota

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

3.1.4 Vsota in razlika funkcij

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \sin\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \cot\alpha \pm \cot\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

3.1.5 Funkcije dvojnega kota

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

3.1.6 Produkt funkcij

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

3.1.7 Potence funkcij

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-2\cos 2\alpha) \qquad \sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

3.2 Razvoj goniometričnih funkcij v MacLaurinovo vrsto

Funkcijo $y=f(x)$, ki je zvezna in ima odvode za $x=a$, lahko v mnogih primerih izrazimo v obliki vsote potenčne vrste, dobljene po Taylorjevem obrazcu:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)$$

za $a=0$ dobimo poseben primer te vrste, t.i. MacLaurinovo vrsto:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad \sin x \approx x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad \cos x \approx 1$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots \qquad \tan x \approx x$$

$$\cot x = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \ldots\right]$$

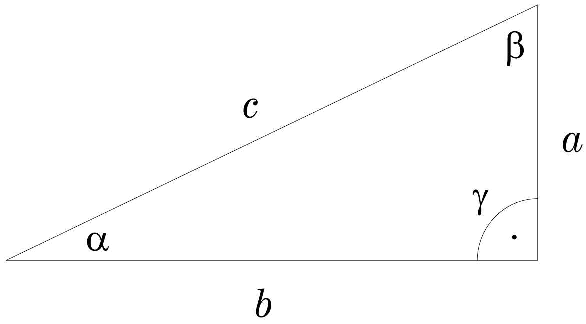
Op: Kot x je vedno podan v ločni meri! Če je kot podan v kotni meri, ga pretvorimo v ločno mero:

$$\alpha[\mathrm{rad}] = \frac{\alpha''}{\rho''}$$

4 Trigonometrija v ravnini

4.1 Pravokotni trikotnik

a, b	kateti
c	hipotenuza



Osnovne zveze v pravokotnem trikotniku:

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta$$
$$b = c\sin\beta = c\cos\alpha$$
$$a = b\tan\alpha = b\cot\beta$$

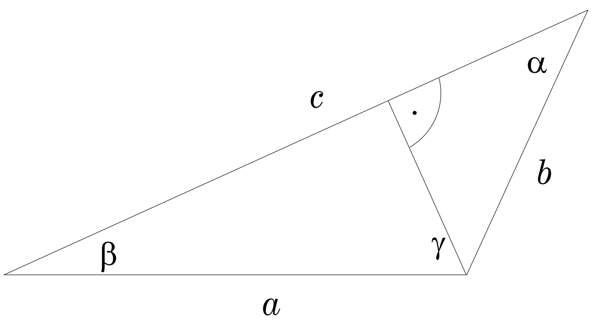
Reševanje pravokotnega trikotnika:

Pravokotni trikotnik je določen z dvema elementoma. Obstaja $\binom{5}{2} = 10$ možnih kombinacij, vendar vse niso medsebojno neodvisne. En ostri kot določa tudi drugega, tako da obstajajo 4 neodvisne naloge:

3. dani c, a — hipotenuza in kateta (c, b)
4. dani a, b — kateti
5. dani c, α — hipotenuza in en kot (c, β)
6. dani a, α — kateta in kot (a, β), (b, α), (b, β)

Potrebno je preveriti če dani elementi omogočajo enolično rešitev. Mora biti izpolnjeno: $\alpha + \beta = 90°$, ter $a < c$, $b < c$ in $c^2 = a^2 + b^2$.

4.2 Poševni trikotnik



R – polmer očrtanega kroga
r – polmer včrtanega kroga
$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

4.3 Izreki za poševni trikotnik

4.3.1 Sinusni izrek

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

4.3.2 Kosinusni izrek

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

4.3.3 Tangensni izrek

Iz sinusnega izreka velja:

$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ To lahko napišemo v obliki:

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ iz česar sledijo enačbe tangensnega izreka:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}\qquad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}\qquad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

4.3.4 Mollweidove enačbe

Iz sinusnega izreka velja:

$$\left\{\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right\}\oplus$$
$$\left\{\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right\}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$$
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Vrnimo se zopet na sinusni izrek:

$$\left\{\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right\}$$
$$\ominus$$
$$\left\{\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right\}$$

Z enakim postopkom kot zgoraj dobimo:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

4.3.5 Izrek o polovičnem kotu

$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ upoštevajoč enačbo za polmer včrtanega kroga (glej spodaj) se izrek o polovičnih kotih lahko napiše v obliki:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{(s-c)}$$

4.3.6 Heronov obrazec

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

4.3.7 Ploščina trikotnika

$$P=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\tfrac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$P=\frac{abc}{4R} \qquad P=s.r$$

4.3.8 Polmer očrtanega kroga

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

4.3.9 Polmer včrtanega kroga

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

4.4 Reševanje splošnega trikotnika

Trikotnik je možno rešiti, če so podani 3 elementi. Skupaj obstaja 4 tipa nalog, glede na to kateri elementi so podani.

1. tip naloge

dano: a, b, c (vse tri stranice)
neznano: α, β, γ
Za izračun neznanih kotov je najboljše uporabiti izrek o polovičnih kotih:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{(s-c)}$$

2. tip naloge

dano: b, c, α (dve stranici in vmesni kot)
neznano: β, γ, a
Neznana kota lahko izračunamo s pomočjo tangensnega izreka, katerega napišemo v malo spremenjeni obliki:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b+c}{b-c}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\beta-\gamma}{2}, \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta-\gamma}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

stranico a laho izračunamo iz sinusnega izreka:

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

3. tip naloge

dano: a, b, α (dve stranici in kot nasproti ene izmed njih)
neznano: β, γ, c

Z danimi elementi lahko izračunamo edino kot β prek sinusnega izreka:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

Pri tem lahko nastopijo trije primeri:

$\sin\beta > 1$, ne obstaja realna vrednost za β. Ni rešitve, trikotnik s takšnimi elementi ne obstaja.

$\sin\beta = 1$, $\Rightarrow$ $\beta = 90°$ Trikotnik je pravokoten.

$\sin\beta < 1$,

obstajata dve rešitvi za kot β: β_1 in $\beta_2 = 180° - \beta_1$.

a) $a > b$ potem mora biti tudi $\alpha > \beta$

iz sinusnega izreka sledi:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha > \sin\beta \quad \Rightarrow$ Kot α je bližje 90° kakor kot β.

Ne glede na to, ali je dani kot α v I. ali II. kvadrantu, je rešitev vedno samo ena $\beta = \beta_1$. Nasproti danemu kotu leži večja stranica.

b) $a < b$ potem mora biti tudi $\alpha < \beta$

iz sinusnega izreka sledi:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta \quad \Rightarrow$ Kot β je bližje 90° kakor kot α.

1. dani kot α je v I. kvadrantu in obe rešitvi $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ zadoščajo pogoju $\alpha < \beta$.
2. dani kot α je v II. kvadrantu in nobena rešitev $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ ne zadošča pogoju $\alpha < \beta$. Ni rešitve za trikotnik z danimi elementi.

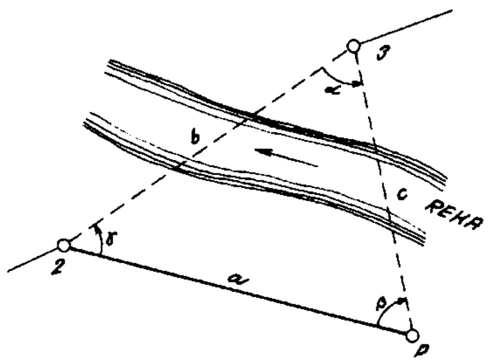
4. tip naloge

dano: a, α, β (stranica in priležna kota)
neznano: γ, b, c
Pogoj rešljivosti: $\alpha + \beta < 180°$
Kot γ dobimo iz lastnosti trikotnika: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
Obe neznani stranici lahko izračunamo iz sinusnega izreka:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow b \qquad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c$$

5 Uporaba v geodeziji

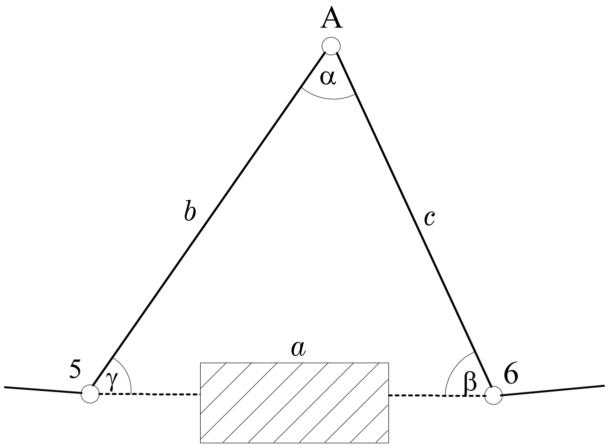
5.1 Izračun dolžine med dvema nedostopnima točkama



merjeno: a, α, β, γ
neznano: b, c

sinusni izrek:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



merjeno: α, b, c
neznano: a
Kosinusni izrek; tangensni izrek +
sinusni izrek:

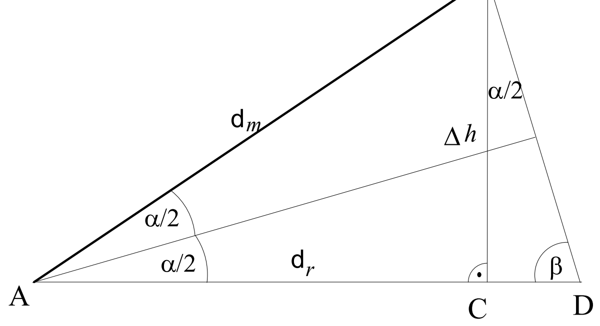
$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\beta}{2}}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

5.2 Redukcija poševno merjenih razdalj na horizont



d_m	merjena razdalja
d_r	reducirana razdalja
Δh	višinska razlika
r	redukcija
ABD	enakokraki trikotnik

rešitev s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$d_m^2 = d_r^2 + \Delta h^2$$

$$d_r = \sqrt{d_m^2 - \Delta h^2}$$

Tako dobimo vrednost reducirane dolžine neposredno (pri tem moramo poznati višinsko razliko med točkama A in B.

Če želimo izračunati vrednost redukcije lahko računamo na več načinov, tim pa so odvisni od količin, ki so nam na voljo.
trikotnik $\triangle$BCD je pravokoten:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\Delta h} \qquad \Rightarrow \qquad r = \Delta h \tan\frac{\alpha}{2}$$

kot α lahko izračunamo iz trikotnika $\triangle$ABC:

$$\sin\alpha = \frac{\Delta h}{d_m}$$

$$d_r = d_m - r$$

če smo izmerili višinski (vertikalni kot α) izračunamo reducirano razdaljo:

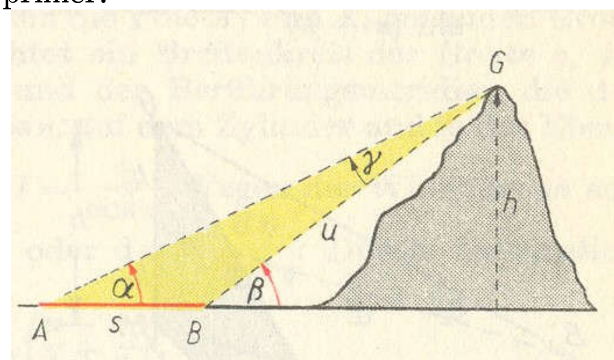
$$\cos\alpha = \frac{d_r}{d_m} \qquad \Rightarrow \qquad d_r = d_m \cos\alpha$$

$$r = d_m - d_r = d_m - d_m \cos\alpha$$

$$r = d_m(1 - \cos\alpha)$$

5.3 Trigonometrično višinomerstvo

1. primer:



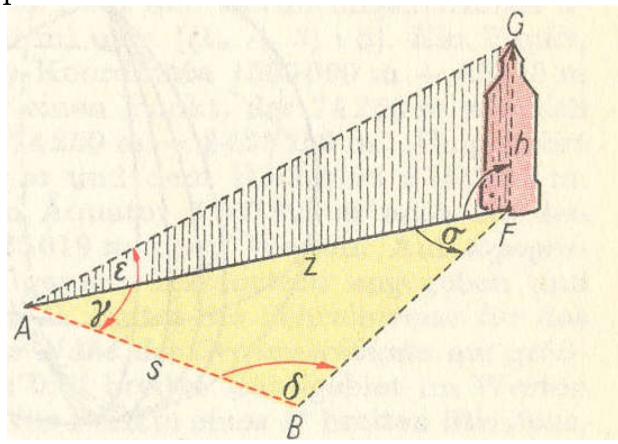
merjeno: α, γ, s
(naklonski kot β)
neznano: h

$$h = x \sin\alpha \qquad \varepsilon = \beta + (180° - \gamma)$$

$$x = s\frac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma} \qquad \sigma = \gamma - \alpha$$

$$x = s\frac{\sin\varepsilon \sin\alpha}{\sin\sigma}$$

2. primer:



merjeno: s, ε, γ, δ
neznano: h

$$\overline{AF} = z \qquad h = z\tan\varepsilon$$

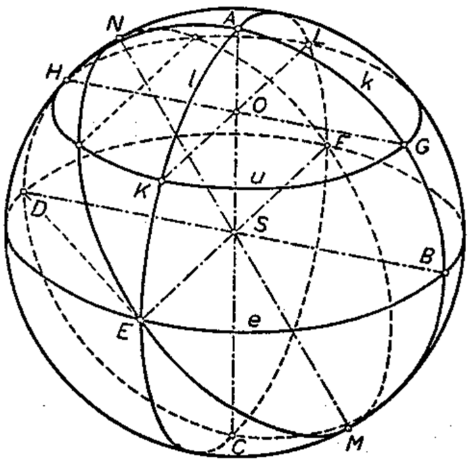
$$z = s\frac{\sin\delta}{\sin\sigma} = s\frac{\sin\delta}{\sin\left[180° - (\gamma + \delta)\right]} = s\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

6 Trigonometrija na krogli

Sferna trigonometrija se ukvarja z liki na krogli, zlasti z odnosi med elementi v sfernem trikotniku, tj. trikotniku na površju krogle. Ime sferna izhaja iz grške besede "sfaira" ($\sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha$) $\rightarrow$ krogla.

6.1 Geometrija na krogli

Krogla je geometrijsko mesto točk, ki so od stalne točke (središče krogle) oddaljene za stalno razdaljo $\rightarrow$ polmer krogle (radij).



Sl. 1.

slika 6.1 : glavne točki in krogi na krogli

Kroglo dobimo če krog zavrtimo okoli enega premera. Geometrija na krogli ne evklidska, na primer na krogli ni vzporednosti in podobnosti, vsota kotov v trikotniku ni 180°, hipotenuza v sfernem trikotniku je lahko krajša od katete itd. Geometrija na krogli je ena od možnih Riemannovih geometrij (B. Riemann, nemški matematik, 1826-1866).

Če prebode premica kroglo je del premice v krogli (tetiva KL). Če poteka del premice skozi središče krogle, imenujemo tako daljico premer krogle (diameter). Dolžina je enaka $2r$ (na sliki EF). Za premer krogle je značilno, da sta si točki premera diametralno nasprotni oz. polarni.

Skozi dve točki na površju krogle je možno položiti poljubno mnogo ravnin.

Presek ravnine z kroglo je vedno krog. Če točki ne ležita na istem premeru krogle, če nista "protitočki", obstoja natančno ena ravnina, ki teče skozi točki in skozi središče krogle. Če poteka ravnina skozi središče krogle je presek t.i. *veliki krog*, v nasprotnem primeru je *mali krog*. Veliki krog na dani krogli ima največji radij in najmanjšo ukrivljenost.

Krogla je simetrično telo in sicer:

- centralno simetrično glede na središče krogle,
- osno simetrično glede na katerikoli premer,
- centralno simetrično gledena katerikoli centralno ravnino.

6.1.1 Sferna razdalja

Sferna razdalja dveh točk na površju krogle je krajši lok velikega kroga skozi ti dve točki (na sliki lok GB). Ta lok predstavlja najkrajšo povezavo med dvema točkama na površju krogle. Sferno razdaljo (l) izražamo v dolžinskih enotah če nam je polmer krogle znan, v nasprotnem primeru pa s središčnim kotom, ki ustreza loku velikega kroga. Tako se izognemu uvedbi polmera v izračunu – zato zaključki veljajo za kroglo s poljubnim polmerom. Zveza med lokom in središčnim kotom.

$$\alpha : 360° = l : 2r\pi$$

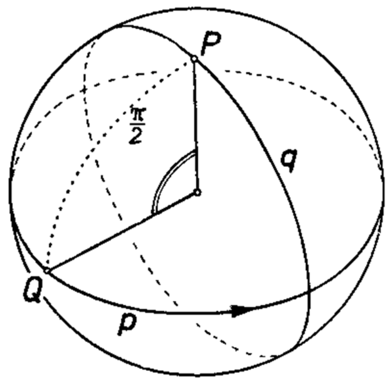
$$l° = \frac{R\alpha°}{\rho°} \quad \text{v stopinjah}$$

$$l' = \frac{R\alpha'}{\rho'} \quad \text{v minutah}$$

$$l'' = \frac{R\alpha''}{\rho''} \quad \text{v sekundah}$$

6.1.2 Pol in polara

Os poljubnega velikega ali malega kroga je tisti premer krogle, ki je pravokoten na ravnino tega kroga. Krajišči premera sta protitočki P_1 in P_2 in se imenujata "pola".

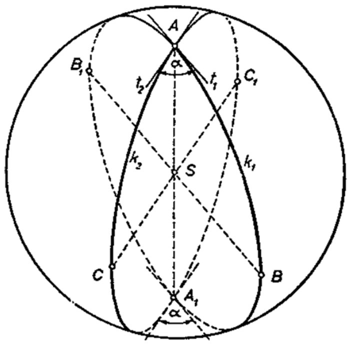


slika 6.2: pol in polara

Sferna razdalja obeh polov je vedno 180°. Sferna razdalja vsakega od obeh polov velikega kroga od poljubne točke na tem krogu je stalna in znaša 90°.

6.1.3 Sferni kot in sferni dvokotnik

Dva velika kroga na krogli se vedno sekata ali snipadata, saj vzporednosti ni! *Sferni kot* je kot med dvema krogoma in je definiran s kotom med tangentama na oba kroga v točki, kjer se sekata. Ni enolično določen! Dogovorno se za sferni kot jemlje vedno kot, ki je manjši od 180°.



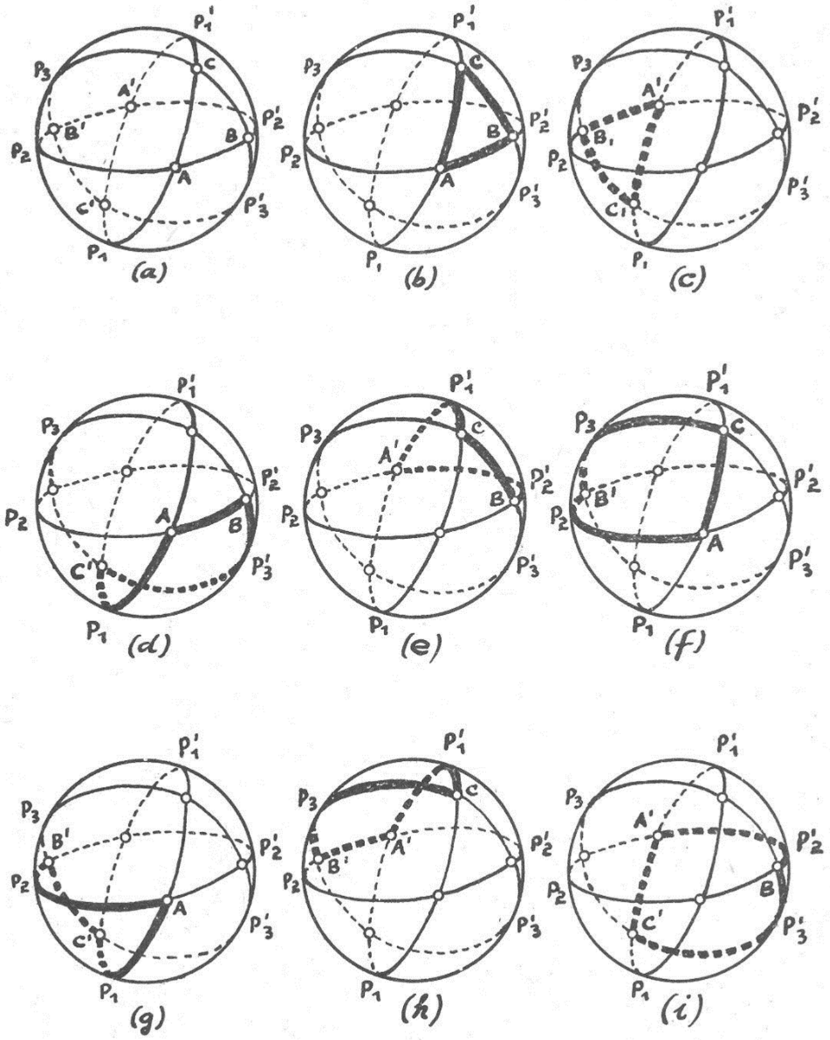
slika 6.3: sferni dvokotnik

Sferni dvokotnik: je z dvema velikima polkrogoma omejen del površja krogle. Oglišči dvokotnika sta protitočki. Stranici dvokotnika sta enaki in znašata 180°. Sferni dvokotnik je enakostraničen in enakokoten lik.
Ploščina sfernega dvokotnika:

$$P = 4\pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}$$

6.2 Sferni trikotnik

Tri točke na površju krogle (če ne ležijo na istem velikem krogu) določajo tri velike kroge, ki se sekajo in tvorijo 8 sfernih trikotnikov.

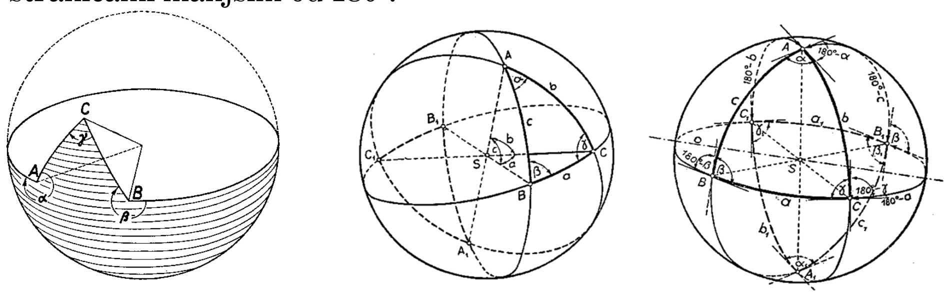


slika 6.4: sferni trikotnik

Vsak sferni trikotnik ima 3 stranice in 3 kote. Stranica sfernega trikotnika ni lok velikega kroga, temveč ustrezni središčni kot.

6.2.1 Eulerjev sferni trikotnik

Za reševanje pride v poštev samo t.i. Eulerjev sferni trikotnik → trikotnik z koti in stranicami manjšim od 180°.



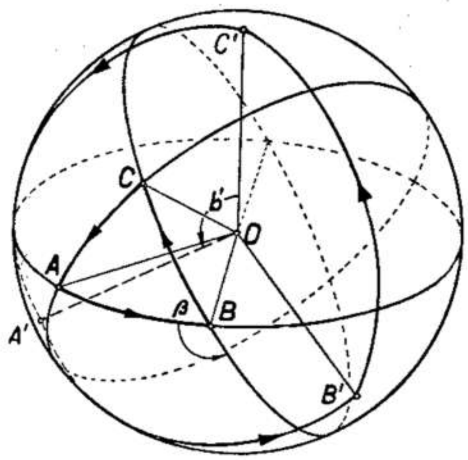
slika 6.5: Ne-Eulerjev in Eulerjev sferni trikotnik

Eulerjev sferni trikotnik je lik na krogli z najkrajšimi spojnicami (loki) treh točk na površju krogle.
Danemu sfernemu trikotniku so:

- sniršni trikotniki (imajo skupno eno oglišče)
- sotrikotniki (imajo skupno eno stranico in dve oglišči).
- protitrikotniki (trikotnik z oglišči, ki so protitočke oglišč danega sfernega trikotnika. Ploščini dveh prtotitrikotnikov sta enaki.

6.2.2 Polarni sferni trikotnik

Danemu sfernemu trikotniku ustreza t.i. *polarni sferni trikotnik*. To je trikotnik z oglišči, ki so poli velikih krogov na katerih ležijo stranice danega trikotnika.



slika 6.6: polarni sferni trikotnik

Polarni sferni trikotnik je tudi Eulerjev sferni trikotnik. Če so elementi danega sfernega trikotnika: a, b, c, α, β, γ, in elementi polarnega sfernega trikotnika: a', b', c', α', β', γ', potem med njimi veljajo naslednje zveze:

$$a' + \alpha = 180° \qquad a + \alpha' = 180°$$

$$b' + \beta = 180° \qquad b + \beta' = 180°$$

$$c' + \gamma = 180° \qquad c + \gamma' = 180°$$

Kot danega sfernega trikotnika in stranica polarnega sfernega trikotnika (ter obratno) sta suplementarna. Za trikotnika je polarnost vzajemna.

6.2.3 Lastnosti sfernega trikotnika

1. Splošno velja: če je v sfernem tikotniku vsota dveh stranic večja, enaka ali manjša od 180°, je hkrati tudi vsota dveh nasproti ležečih kotov večja, enaka ali manjša od 180°.

$$b + c \geq 180° \qquad \beta + \gamma \geq 180°$$

$$b + c \leq 180° \qquad \beta + \gamma \leq 180°$$

2. Vsota dveh stranic je večja od tretje stranice, njihova razlika je pa je manjša.

$$| a - b | < c < | b + a |$$

$$| b - c | < a < | b + c |$$

$$| c - a | < b < | c + a |$$

3. Velja enako kot pri ravninskem trikotniku: večji stranici ustreza večji kot in obratno.

$$a \geq b \qquad \alpha \geq \beta$$

4. Za kote veljajo naslednje zveze:

$$\alpha + \beta < 180° + \gamma$$

$$\beta + \gamma < 180° + \alpha$$

$$\gamma + \alpha < 180° + \beta$$

5. Vsota stranic sfernega trikotnika ima lastnost:

$$0° < a + b + c < 360°$$

$$d = 360° - (a + b + c) \qquad \textit{sferni defekt}$$

6. Vsota kotov sfernega trikotnika ima lastnost:

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180° \qquad \textit{sferni eksces}$$

Glede na kote delimo sferne trikotnike na :

- splošne,
- poševnokote,
- pravokotne sferne trikotnike ($\gamma = 90°$).

Glede na stranice ločimo:

- raznostranične,
- enakostranične,
- dvokrake,
- pravostranične (kvadrantne) sferne trikotnike.

6.3. Zveze med elementi sfernega trikotnika – osnovni izreki sferne trigonometrije

6.3.1 Kosinusni izrek za stranice

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Uporaba kosinusnega izreka za stranice:

- za reševanje splošnega sfernega trikotnika, če sta podani dve stranici in vmesni kot,
- za reševanje splošnega sfernega trikotnika, če so podane vse tri stranice in iščemo kote.

6.3.2 Kosinusni izrek za kote

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$$

Uporaba kosinusnega izreka za kote:

- za reševanje splošnega sfernega trikotnika če je podana stranica in priležna kota,
- za reševanje splošnega sfernega trikotnika če so podani vsi trije koti in iščemo stranice.

6.3.3 Sinusni izrek

Vzemimo prvo enačbo iz kosinusniega izreka za stranice in jo izrazimo kot:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

kvadriramo:

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b\cos^2 c - 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

levo in desno stran odštejemo od 1:

$$1-\cos^2\alpha = 1-\frac{\cos^2 a + \cos^2 b\cos^2 c - 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2 b\sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b\cos^2 c + 2\cos b\cos c\cos a}{\sin^2 b\sin^2 c}$$
$$\sin^2 b = 1-\cos^2 b \qquad \sin^2 c = 1-\cos^2 c$$

$$\sin^2\alpha = \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b\cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b\cos^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b\cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

Števec na desni strani mora biti popoln kvadrat določenega izraza:

$$1-\cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a\cos b\cos c = N^2$$

$$\sin^2\alpha = \frac{N^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \quad /:\sin^2 a$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{N^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

če ponovimo enak postopek za drugi dve enačbi kosinusnega izreka, dobimo:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{N^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$
$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c} = \frac{N^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Vse tri enačbe imajo enako desno stran:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c} = \frac{N^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

V Eulerjevih sf. trikotnikih so elementi vedno manjši od 180°; zato so sinusi vedno pozitivni. Vstavimo pod koren in dobimo sinusni izrek:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

Število

$$K = \frac{N}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

je konstantno za en sferni trikotnik in se imenuje "konstanta" sfernega trikotnika.

Sinusni izrek se uporablja le izjemoma ker ne daje enolične rešitve. Vrednost funkcije sinus je v obeh kvadrantih pozitivna, tako da dobimo dve rešitvi za kot. Če ga le uporabljamo moramo rešitev obvezno preveriti s pomočjo lastnosti sfernega trikotnika (3. lastnost).

6.3.4 Sinus-kosinusni izrek

Vzemimo prve dve enačbi kosinusnega izreka za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta$$

Vstavimo prvo enačbo ($\cos a$) v drugo:

$$\cos b = \cos c(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha) + \sin a \sin c \cos\beta$$

oz.

$$\cos b = \cos^2 c \cos b + \cos c \sin b \sin c \cos\alpha + \sin a \sin c \cos\beta$$

Namesto $\cos^2 c$ pišemo $1 - \sin^2 c$ in dobimo:

$$\cos^2 c \cos b = \cos b(1 - \sin^2 c) = \cos b - \cos b \sin^2 c$$

celoten izraz se potem glasi:

$$\cos b = \cos b - \cos b \sin^2 c + \cos c \sin b \sin c \cos\alpha + \sin a \sin c \cos\beta$$
$$0 = -\cos b \sin^2 c + \cos c \sin b \sin c \cos\alpha + \sin a \sin c \cos\beta$$

delimo desno stran z sin$c$:

$$0 = -\cos b \sin c + \cos c \sin b \cos\alpha + \sin a \cos\beta$$

oz:

$$\sin a \cos\beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha$$

S ciklično permutacijo elementov dobimo celo skupino obrazcev:

$$\begin{aligned}
\sin a \cos\beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha \\
\sin a \cos\gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha \\
\sin b \cos\gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta \\
\sin b \cos\alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta \\
\sin c \cos\alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma \\
\sin c \cos\beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma
\end{aligned}$$

Obrazci vežejo pet elementov v sfernem trikotniku: tri stranice in dva kota. Uporablja se za kontrolo izračuanih elementov trikotnika.

6.3.5 Polarni sinus-kosinusni izrek

S polarnostjo dobimo iz sinus-kosinusnega izreka t.i. polarni sinus-kosinusni izrek. Če v prejšnjih obrazcih vstavimo ustrezno elemente polarnega sfernega trikotnika dobimo polarni sinus-kosinusni izrek.

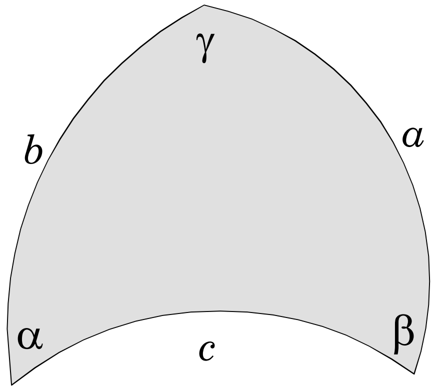
$$\begin{aligned}
\sin\alpha \cos b &= \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma \cos a \\
\sin\alpha \cos c &= \cos\gamma \sin\beta + \sin\gamma \cos\beta \cos a \\
\sin\beta \cos c &= \cos\gamma \sin\alpha + \sin\gamma \cos\alpha \cos b \\
\sin\beta \cos a &= \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cos b \\
\sin\gamma \cos a &= \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos c \\
\sin\gamma \cos b &= \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha \cos c
\end{aligned}$$

6.3.6 Kotangesni izrek

Šest elementov sfernega trikotnika lahko napišemo v cikličnem zaporedju $a\gamma b\alpha c\beta$.

Kotangensni izrek veže štiri elemente v trikotniku: dve stranici, kot, ki ga oklepata in eni stranici nasproti ležeči kot; vsi elementi so v zaporedju, na primer $a\gamma b\alpha$, ali $\beta a\gamma b$.

Na primer za kombinacijo $\beta a\gamma b$ so: notranji kot γ, notranja stranica a, zunanji kot β, ter zunanja stranica b.



Potem se kotangensni izrek glasi:

Kotangens zunanje stranice krat sinus notranje stranice je enak: produkt kosinusa notranje stranice krat kosinus notranjega kota plus produkt kotangensa zunanjega kota krat sinus notranjega kota.

$$\begin{aligned}
\cot a \sin b &= \cos b \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma \\
\cot b \sin c &= \cos c \cos\alpha + \cot\beta \sin\alpha \\
\cot c \sin b &= \cos b \cos\alpha + \cot\gamma \sin\alpha \\
\cot a \sin c &= \cos c \cos\beta + \cot\alpha \sin\beta \\
\cot b \sin a &= \cos a \cos\gamma + \cot\beta \sin\gamma \\
\cot c \sin a &= \cos a \cos\beta + \cot\gamma \sin\beta
\end{aligned}$$

S polarnostjo ne dobimo novih izrazov. Kotangensni izrek je sam sebi polaren.

6.3.7 Izreki o polovicah kotov ("*s*" izreki)

Osnovni obrazci, ki smo jih izvedli omogočajo rešitev splošnega sfernega trikotnika, če so podani trije njegovi elementi. U praksi se uporabljajo še drugi obrazci, ki so bili izpeljani v času ko se je računalo z logaritmičnimi tablicami, saj osnovni obrazci za logaritmičen izračun niso primerni. Ti obrazci se uporabljajo še danes, saj so v nekaterih primerih celo hitrejši od osnovnih obrazcev.

"S" izreki so obrazci, ki dajejo tangens polovičnega kota. Izvedemo jih iz kosinusnega izreka za stranice od koder izrazimo izraz za kosinus kota. Tukaj podajamo samo končno obliko obrazcev:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

Predznak korena je vedno pozitiven, ker so v Eulerjevih sf. trikotnikih stranice vedno manjše od 180°. Prav tako so vrednosti goniometričnih funkcij pod korenom vedno pozitivne glede na lastnost sfernega trikotnika (2. in 5. lastnost).

Obrazce lahko napišemo v malo spremenjeni obliki. Uvedimo okrajšavo:

$$k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

Potem se izreki o polovicah kotov glasijo:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)}$$

Geometrično pomeni količina k tangens sfernega polmera r sfernemu trikotniku včrtanega kroga $k = \tan r$.

"S" stavke uporabljamo za izračun neznanih kotov če so podane vse tri stranice. Dobimo enolično rešitev saj so polovični koti vedno v I. kvadrantu.

6.3.8 Izreki o polovicah stranic ("σ" izreki)

Izreke o polovicah stranic izpeljemo iz kosinusnega izreka za kote, od koder izrazimo kosinus stranice. "σ" izreki so obrazci, ki dajejo tangens polovične stranice.

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

$$\tan\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\gamma)}} \qquad \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}}$$

Predznak korena je vedno pozitiven, saj so v Eulerjevem sf. trikotniku stranice vedno manjše od 180°. Glede na lastnost sf. trikotnika $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$, je polovična vsota kotov (σ) vedno v II. ali III. kvadrantu. Vrednost funkcije kosinus je vedno negativna. Razlike (σ–α), (σ–β) in (σ–γ) so vedno v I. ali IV- kvadrantu. Zato so kosinusi teh razlik tudi vedno pozitivni.

Z uvedbo okrajšave:

$$K = \sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

dobijo obrazci enostavnejšo obliko:

$$\tan\frac{a}{2} = K\cos(\sigma-\alpha) \quad \tan\frac{b}{2} = K\cos(\sigma-\beta) \quad \tan\frac{c}{2} = K\cos(\sigma-\gamma)$$

Geometrično pomeni količina K tangens sfernega polmera R sfernemu trikotniku očrtanega kroga $K = \tan R$.

"σ" stavke uporabljamo za izračun stranic, če so podani vsi trije koti. Dobimo enolično rešitev saj so polovične stranice vedno v I. kvadrantu.

6.3.9 Delambrove (Mollweidove, Gaussove) enačbe

Te enačbe izvedemo s pomočjo adicijskih enačb ravninske trigonometrije in s pomočjo stavkov o polovicah kotov. Izpeljali so jih neodvisno J. B. Delambre (1749-1822), C.B. Mollweid (1774-1825) in C.F. Gauss (1777-1855).

Skupaj imamo 12 Delambrovih enačb:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \qquad I.$$

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{b}{2}=\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{\beta}{2} \qquad \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{b}{2}=\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{\beta}{2} \qquad II.$$

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{a}{2}=\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad III.$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad IV.$$

$$\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{b}{2}=\cos\frac{a+c}{2}\sin\frac{\beta}{2} \qquad \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{b}{2}=\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{\beta}{2} \qquad V.$$

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{a}{2}=\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{a}{2}=\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \qquad VI.$$

Vsaka enačba vsebuje vseh 6 elementov sfernega trikotnika, kar pomeni, da z njimi trikotnika, podanega s tremi elementi ni mogoče rešiti. V praksi služijo Delambrove enačbe za kontrolo izračunanih elementov, teoretično pa za izpeljavo Napierjevih in L'Huilierjeve enačbe.

6.3.10 Napierjeve enačbe (analogije)

V zgodovini se omenjajo kot Napierjeve analogije (sorazmerja). John Napier (1550-1617), je bil škotski matematik; najbolj znan je po iznajdbi logaritmov.

Napierjeve enačbe dobimo s kombinacijo Delambrovih enačb in to z deljenjem ustrezne enačbe iz sistema I., II. in III z enačbo iz sistema IV., V. in VI.

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{a-c}{2}}{\cos\frac{a+c}{2}}\cot\frac{\beta}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a-c}{2}}{\sin\frac{a+c}{2}}\cot\frac{\beta}{2}$$

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2} \qquad \tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{a-c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}\tan\frac{b}{2} \qquad \tan\frac{a+c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\tan\frac{b}{2}$$

$$\tan\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}\tan\frac{a}{2} \qquad \tan\frac{b-c}{2}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\tan\frac{a}{2}$$

Uporaba:

- podani dve stranici in vmesni kot,
- podana dva kota in priležna stranica,
- podani dve stranici in nasprotna kota (iščemo 3. stranico).

Funkcija tangens je zelo občutljiva in vedno daje enolično rešitev.
Za zgornji sistem enačb velja, da če je: $a>b \Rightarrow \alpha>\beta$. V primeru, da je $a<b$ ter $\alpha<\beta$ enačbe dobijo obliko: $b-a$ in $\beta-\alpha$.

6.3.11 L'Huilierjeva enačba ("Lilie")

Simon Lhuilier (tudi S. L'Huilier) 1750-1840, švicarski matematik. Njegova enačba omogoča izračun sfernega ekscesa ε, če nam niso znani vsi trije koti sfernega trikotnika.

- znane vse tri stranice:

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

- znani dve stranici in vmesni kot:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma}$$

s ciklično izmenjavo dobimo še dve enačbi z ostalimi elementi sfernega trikotnika.

- za pravokotni sferni trikotnik L'Huilierjeva enačba se glasi ($\gamma = 90°$, a, b kateti):

$$\tan\frac{\varepsilon}{2}=\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}$$

6.3.12 Ploščina sfernega trikotnika

Površina sfernega trikotnika je premosorazmerna velikosti sfernega ekscesa:

$$P = (\alpha + \beta + \gamma - 180°)\frac{\pi R^2}{180°} = \frac{\varepsilon R^2 \pi}{180°}$$

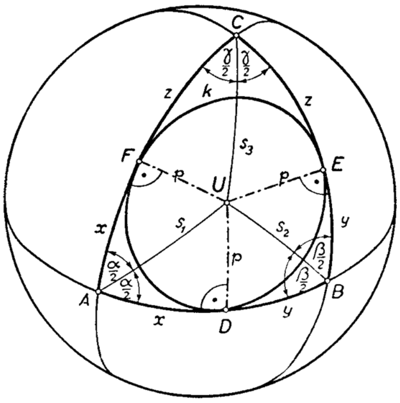
$$P = \frac{\varepsilon° R^2}{\rho°} = \frac{\varepsilon' R^2}{\rho'} = \frac{\varepsilon'' R^2}{\rho''} = \varepsilon_{rad} R^2$$

$$P_{KR} = 4\pi R^2$$

$$P_\Delta = \frac{R^2\pi}{180°}\varepsilon° = \frac{4\pi R^2}{180°.4}\varepsilon° = \frac{P_{KR}}{720°}\varepsilon°$$

6.3.13 Polmera vrčrtane in očrtane krožnice

Včrtani krog sfernega trikotnika je tisti mali krog na krogli, ki se dotika stranic trikotnika. Pol P včrtanega kroga ima od stranic a, b in c enako sferno razdaljo $\Rightarrow$ sferni polmer r trikotniku včrtanega kroga. U je presečišče simetral kotov.

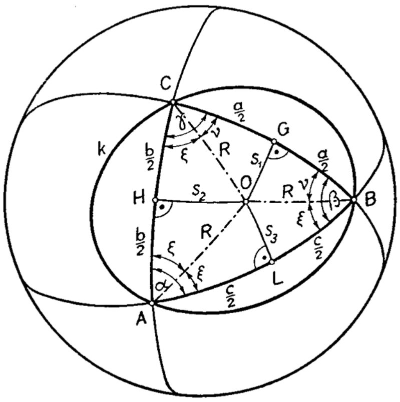


slika 6.7: včrtan krog

$$\tan r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} = k$$

$$\tan r = \frac{\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Očrtani krog sfernega trikotnika je tisti krog na krogli, ki poteka skozi ogljišča A, B, C. Pol O očrtanega kroga ima od ogljišč trikotnika enako sferno razdaljo $\Rightarrow$ sferni polmer R trikotniku očrtanega kroga. O je presečišče simetral stranic trikotnika.



slika 6.8: očrtan krog

$$\tan R = \sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}} = K$$

$$\cot R = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}$$

6.4 Reševanje splošnega sfernega trikotnika

Sferni trikotnik je možno rešiti, če so podani trije elementi. Skupaj obstaja 6 tipov nalog:

1. dane so tri stranice,
2. dani so trije koti,
3. dani sta dve stranici in vmesni kot,
4. dana je ena stranica in oba priležna kota,
5. dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot,
6. dana sta dva kota in enemu kotu nasproti ležeča stranica.

Naloge I.in II., III. in IV. ter V. in VI. so med seboj polarne.

6.4.1 I. tip naloge

dani: a, b, c
neznano: α, β, γ
pogoji za rešljivost: $0° < a+b+c < 360°$, $b+c>a$, $b+a>c$, $a+c>b$
Rešitev je možna na dva načina.
A.
Kosinusni izrek za stranice, izrazimo neznani kot:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

B.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)}$$

Prvi preizkus:

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$$

$$\sin s = \frac{k}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}$$

6.4.2 II. tip naloge

dani: α, β, γ
neznano: a, b, c
pogoji za rešljivost: $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$,
$\gamma + \beta < 180° + \alpha$, $\gamma + \alpha < 180° + \beta$, $\alpha + \beta < 180° + \gamma$
Rešitev je možna na dva načina.
A.
Kosinusni izrek za kote, izrazimo neznano stranico:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$
$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

B.

$$\tan\frac{a}{2} = K\cos(\sigma-\alpha) \quad \tan\frac{b}{2} = K\cos(\sigma-\beta) \quad \tan\frac{c}{2} = K\cos(\sigma-\gamma)$$

1. preizkus:

$$(\sigma-\alpha) + (\sigma-\beta) + (\sigma-\gamma) = \sigma$$

2. preizkus

$$-\cos\sigma = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}{K}$$

6.4.3 III. tip naloge

dano: a, b, γ
neznano: c, α, β
pogoj rešljivosti: elementi manjši od 180°
Celovita in enolična rešitev s pomočjo Napierjevih enačb. Kota izračunamo:

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2} \qquad \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

Stranico c lahko izračunamo na več načinov:

- kosinusni izrek za stranice:

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$$

- Delambrove enačbe:

$$\sin\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\cos\frac{\gamma}{2} \quad \text{ali} \quad \sin\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\gamma}{2} \quad \text{ali} \quad \cos\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}$$

V Eulerjevem sf. trikotniku je vedno c < 180°, torej je $c/2$ < 90°. Obe enačbi za $c/2$ dajeta enolično rešitev.

Preizkus: večkratna določitev stranice c.

6.4.4 IV. tip naloge

dano: c, α, β
neznano: a, b, γ
pogoji za rešljivost: elementi manjši od 180°
Celovita in enolična rešitev s pomočjo Napierjevih enačb. Stranici izračunamo:

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2} \qquad \tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

Kot γ lahko izračunamo na več načinov:

- kosinusni izrek za kote

$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$$

- Delambrove enačbe:

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\sin\frac{c}{2} \quad \text{ali} \quad \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\cos\frac{c}{2}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\sin\frac{c}{2} \quad \text{ali} \quad \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cos\frac{c}{2}$$

V Eulerjevem sf. trikotniku je vedno $\gamma < 180°$, torej je $\gamma/2 < 90°$. Obe enačbi za $\gamma/2$ daljeta enolično rešitev.

Preizkus: večkratna določitev kota γ.

6.4.5 V. tip naloge

dano: a, b, α
neznano: c, β, γ
pogoji za rešljivost: elementi manjši od 180°

Glede na vrednost danih podatkov lahko obstajata dve rešitvi, ena rešitev ali nobena rešitev.

Z danimi elementi lahko izračunamo samo kot β iz sinusnega izreka:

$$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$$

Glede na vrednost funkcije *sinus* lahko nastopijo trije slučaji.

$\sin\beta > 1$ rešitve ni, trikotnik z danimi elementi ne obstaja.

1. $\sin\beta = 1$ sledi da je $\beta = 90°$, sf. trikotnik je pravokoten in stranica b je hipotenuza.

2. $\sin\beta < 1$. Imamo dve rešitvi za kot β, $\beta = \beta_1$ in $\beta_2 = 180° - \beta_1$, pri tem obstajata dve možnosti:

c) danim podatkom ustreza ena sam rešitev (trikotnik) s kotom $\beta = \beta_1$ ali $\beta = \beta_2$. Za izračun γ in c uporabimo Napierjeve enačbe.

d) Danim podatkom ustrezata dva trikotnika ali noben trikotnik. Če obstajata dva trikotnika ima prvi kot β_1, drugi pa kot β_2. Za ostale elemente, kot γ in stranico c, dobimo po dve vrednosti. Izračunamo jih s pomočjo Napierjevih enačb.

Obstoj dveh, ene ali nobene rešitve ugotovimo iz lastnosti sfernega trikotnika.

Zaključek:

- Če je stranica (a), kateri nasproten kot je podan (α) bližje 90° kakor druga stranica (b), obstaja ena sama rešitev za kot β. Izračunani kot β in njemu nasprotan stranica (b) sta istovrstna (oba ostra, oba topa).
- Če pa je stranica (b), kateri nasproten kot računamo (β) bližje 90° kakor stranica (a), katere nasprotni kot je podan (α), obstajate dve možnosti:
  - dve rešitvi, če sta dana elementa (a, α) istovrstna,
  - nobena rešitev, če sta dana elementa (a, α) raznovrstna.

6.4.6 VI. tip naloge

dano: a, β, α
neznano: γ, b, c
pogoji za rešljivost: elementi manjši od 180°

Glede na vrednost danih podatkov lahko obstajata dve rešitvi, ena rešitev ali nobena rešitev.

Z danimi elementi lahko izračunamo samo stranico b iz sinusnega izreka:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

Glede na vrednost funkcije *sinus* lahko nastopijo trije slučaji.

1. $\sin b > 1$ rešitve ni, trikotnik z danimi elementi ne obstaja.

sin$b$ = 1 sledi da je $b = 90°$, sf. trikotnik je pravostraničen (kvadranten). Rešujemo ga z enačbami za pravostraničen trikotnik.

2. sin$b$ < 1. Imamo dve rešitvi za stranico b, $b=b_1$ in $b_2 = 180° - b_1$, pri tem obstajata dve možnosti:

a) danim podatkom ustreza ena sam rešitev (trikotnik) s stranico $b = b_1$ ali $b = b_2$. Za izračun γ in c uporabimo Napierjeve enačbe.

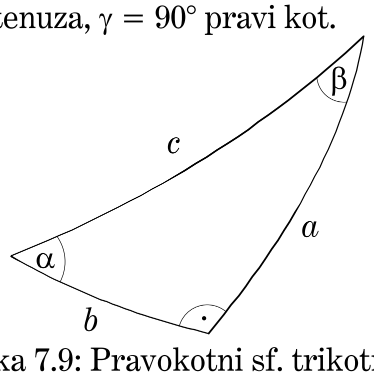
b) Danim podatkom ustrezata dva trikotnika ali noben trikotnik. Če obstajata dva trikotnika ima prvi stranico b_1, drugi pa stranico b_2. Za ostale elemente, kot γ in stranico c, dobimo po dve vrednosti. Izračunamo jih s pomočjo Napierjevih enačb.

Obstoj dveh, ene ali nobene rešitve ugotovimo iz lastnosti sfernega trikotnika.
Zaključek:

- Če je dani kot α, kateremu nasprotna stranica je podana (a), bližje 90° kakor drugi kot (β), obstaja ena sama rešitev za stranico b. Izračunana stranica b in njemu nasprotni kot (β) sta istovrstna (oba ostra, oba topa).
- Če pa je dani kot (β), kateremu nasprotno stranico računamo (b) bližje 90° kakor kot (α), kateremu nasprotna stanica je podana (a), obstajata dve možnosti:
  - dve rešitvi, če sta dana elementa (a, α) istovrstna,
  - nobena rešitev, če sta dana elementa (a, α) raznovrstna.

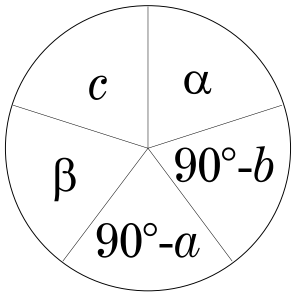
6.5 Pravokotni sferni trikotnik

Pravokotni sferni trikotnik je tisti trikotnik, ki ima en kot (γ) enak 90°. Njegovi elementi so: a, b kateti, c hipotenuza, $\gamma = 90°$ pravi kot.



slika 7.9: Pravokotni sf. trikotnik

Za pravokotni sf. trikotnik veljajo vse enačbe kot za splošni sf. trikotnik, samo moramo upoštevati, daje $\gamma=90°$. Označimo elemente pravokotnega sfernega trikotnika na obodu poljubnega kroga v istem smislu kot si sledijo v trikotniku. Pri tem izpustimo pravi kot γ, in postavimo na ustrezni mesti namesto katet njihove komplemente. Vsega skupaj imamo 5 elementov, izmed katerih ima vsak dva sosednja in dva nasprotna elementa.



J. Napier je združil vseh deset obrazcev za pravokotni sferni trikotnik v enem pravilu, (Napierjevo pravilo):
"*Kosinus vsakega elementa je enak produktu sinusov nasprotnih elementov, ali pa produktu kotangensov sosednjih elementov.*"

$$\cos c = \cot\alpha\cot\beta$$
$$\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b) = \cos a\cos b$$

$$\cos\beta = \cot c\cot(90° - a) = \cot c\tan a$$
$$\cos\beta = \sin\alpha\sin(90° - b)\sin\alpha\cos b$$

$$\cos(90° - a) = \sin a = \cot\beta\cot(90° - b) = \cot\beta\tan b$$
$$\cos(90° - a) = \sin a = \sin c\sin\alpha$$

$$\cos(90° - b) = \sin b = \cot(90° - a)\cot\alpha = \tan a\cot\alpha$$
$$\cos(90° - b) = \sin b = \sin\beta\sin c$$

$$\cos\alpha = \cot(90° - b)\cot c = \tan b\cot c$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - a)\sin\beta = \cos a\sin\beta$$

6.5.1 Lastnosti pravokotnega sfernega trikotnika

1. Kateta in njej nasprotni kot sta vedno istovrstna.
2. Kateta je manjša od kota, ki ji leži nasproti, če sta oba kota manjša od 90° in večja od njega, če sta oba večja od 90°.
3. Hipotenuza je po velikosti vedno med kateto in suplementom katete.
4. Hipotenuza je manjša od 90°, če sta obe kateti istovrstni.
5. Hipotenuza je večja od 90°, če sta obe kateti raznovrstni.
6. Pravokotni sf. trikotnik ima lahko 1,2, 3 prave kote.
7. Hipotenuza je enaka 90°, če je ena od katet enaka 90°.
8. V pravokotnem sf. trikotniku velja:

$$90° < \alpha + \beta < 270°$$

6.5.2 Numerično reševanje pravokotnega sfernega trikotnika

Obstaja 6 primerov, nalog glede na dane elemente:

Dano: hipotenuza in ena kateta (c, a) ali (c, b).

Dano: obe kateti (a, b).

Dano: hipotenuza in en kot (c, α) ali (c, β).

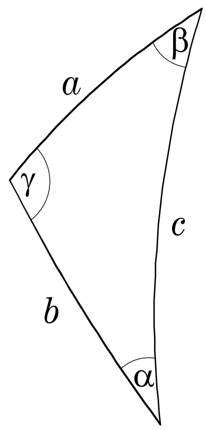
Dano: kateta in kot na njej (a, β) ali (b, α).

Dano: oba kota (α, β).

Dano: kateta in njej nasprotni kot (a, α) ali (b, β).

6.6 Pravostranični (kvadrantni) sferni trikotnik

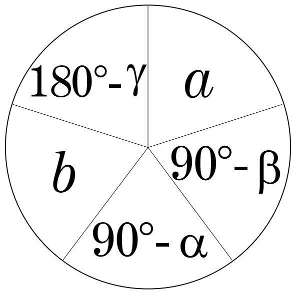
Pravostranični sferni trikotnik je tisti, ki ima eno stranico (c) enako 90°. Njegovi elementi so: a, b nekvadrantni stranici in koti α, β in γ.



slika 7.10: pravostranični sferni trikotnik

Pravostranični sf. trikotnik je polarni trikotnik pravokotnemu (in obratno).

Označimo elemente kvadrantnega sf. trikotnika na obodu poljubnega kroga v istem smislu kot si sledijo v trikotniku. Pri tem izpustimo kvadrantno stranico c, zamenjamo kot, ki je nasproti kvadrantne stranice z njegovim suplementom (γ–180°) in namesto ostalih dveh kotov pišemo njihove komplemente (α–90°), (β–90°). Vsega skupaj imamo 5 elementov, izmed katerih ima vsak dva sosednja in dva nasprotna elementa.



Napierjevo pravilo za kvadrantni sf. trikotnik je enako in se glasi:
"*Kosinus vsakega elementa je enak produktu sinusov nasprotnih elementov, ali pa produktu kotangensov sosednjih elementov.*"

$$\cos(180° - \gamma) = \cot b \cot a \qquad \cos\gamma = -\cot b \cot a$$
$$\cos(180° - \gamma) = \sin(90° - \alpha)\sin(90° - \beta) \qquad \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos b = \cot(180° - \gamma)\cot(90° - \alpha) \qquad \cos b = -\cot\gamma\tan\alpha$$
$$\cos b = \sin a \sin(90° - \beta) \qquad \cos b = \sin a \cos\beta$$

$$\cos(90° - \alpha) = \cot b \cot(90° - \beta) \qquad \sin\alpha = \cot b \tan\beta$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin(180° - \gamma)\sin a \qquad \sin\alpha = \sin\gamma\sin a$$

$$\cos(90° - \beta) = \cot(90° - \alpha)\cot a \qquad \sin\beta = \tan\alpha\cot a$$
$$\cos(90° - \beta) = \sin b \sin(180° - \gamma) \qquad \sin\beta = \sin b \sin\gamma$$

$$\cos a = \cot(180° - \gamma)\cot(90° - \beta) \qquad \cos a = -\cot\gamma\tan\beta$$
$$\cos a = \sin b \sin(90° - \alpha) \qquad \cos a = \sin b \cos\alpha$$

6.6.1 Lastnosti kvadrantnega sfernega trikotnika

9. Nekvadrantna stranica in njej nasproten kot sta vedno istovrstna.
10. Nekvadrantna stranica je večja od nasprotnega kota, kadar sta oba manjša od 90° in manjša od nasprotnega kota kadar sta večja od 90°.
11. Kot, ki leži nasproti kvadrantne stranice je po velikosti vedno med vrednostjo ostala dva kota in njihovih suplementov.
12. Kot, ki leži nasproti kvadrantni stranici je večji od 90°, če sta ostala dva kota ali nekvadrantni stranici istovrstni.
13. Kvadrantni trikotnik ima lahko 1,2 ali 3 kvadrantne stranice.
14. Za vsoto nekvadrantnih stranic velja:

$$90° < a + b < 270°$$

6.6.2 Reševanje kvadrantnega sfernega trikotnika

Obstaja 6 primerov, nalog glede na dane elemente:

Dano: kota nasproti nekvadrantnim stranicam (α, β).

Dano: kot nasproti kvadrantni stranici in kot nasproti nekvadrantni stranici (γ, α) ali (γ, β).

Dano: obe nekvadrantni stranici (a, b).

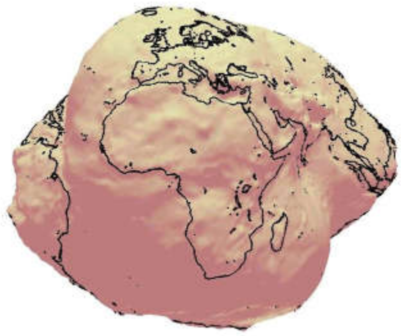
Dano: nekvadrantna stranica in kot nasproti drugi nekvadrantni stranici (a, β) ali (b, α).

Dano: nekvadrantna stranica in kot nasproti kvadrantni stranici (a, γ) ali (b, γ).

Dano: nekvadrantna stranica in njej nasprotni kot (a, α) ali (b, β).

7 Uporaba sferne trigonometrije v geodeziji

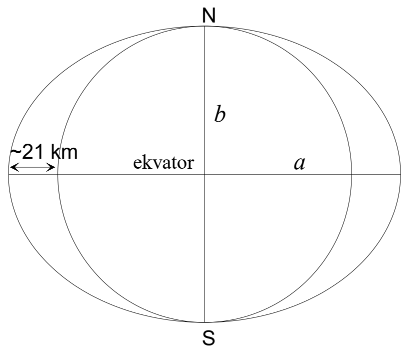
Sferna trigonometrija se uporablja v geodeziji vedno takrat ko obravnavamo Zemljo kot kroglo. Kot nam je znano Zemlja ni pravilne geometrijske oblike. Najboljši približek za obliko Zemlje je *geoid*, ekvipotencialna* ploskev zemljinega težnostnega polja. Geoid nam ponazarja srednja gladina svetovnih oceanov v mislih podaljšana pod celinami. To je t.i. ničelna nivojska ploskev z nadmorsko višino nič. Vendar je geoid fizikalna ploskev, ki je pripraven za proučevanje Zemljinega težnostnega polja, ni pa pripraven za podajanje položaja točk na Zemlji. Prav tako se geoida ne da izraziti z enostavnimi matematičnimi enačbami.



slika 7.1 : geoid

Za izračun položaja točk na Zemlji uporabljamo matematično točno definirano telo → *rotacijski elipsoid*. Rotacijski elipsoid nastane če elipso zavrtimo okoli njene male polosi (b). Zemlja ima obliko rotacijskega elipsoida zaradi svojega vrtenja okoli svoje vrtilne osi, sploščenost Zemljinega eliposida pa je zelo majhna. Razlika med polmerom na ekvatorju in na polih znaša okoli 21 km, kar je le 1/3 % povprečnega polmera Zemlje.

Dimenzije Zemljinega rotacijskega elipsoida so bile v zgodovini geodezije večkrat določene in to pri različnih predpostavkah, iz različnih opazovanj in po različnih metodah. Vsaka nova merska tehnika oz. nova metoda izračuna je omogočila določitev dimenzij z višjo natančnostjo.



sliks 7.2: razmerje med rotacijskim elipsoidom in kroglo

* ekvipotencialna ali nivojska ploskev je ploskev na kateri je potencial konstanten

Zaradi majhne sploščenosti smemo Zemljin elipsoid včasih, za določene namene in manj zahtevne izračune, zamenjati s kroglo. Največkrat aproksimiramo Zemljin elipsoid s kroglo, ki ima enako prostornino kot Zemljin elipsoid.

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi a^2 b}{3}$$

Elipsoid GRS 80 ("Geodetic Reference System 1980") je eden od najnovejših mednarodno sprejetih referenčnih sistemov na globalni ravni. Dimenzije elipsioda GRS 80 so:

- a = 6378,137 km
- b = 6356,752 km
- $1/f$ = 298,2572

Parametri krogle izpeljani iz zgornjih dimenzij so:

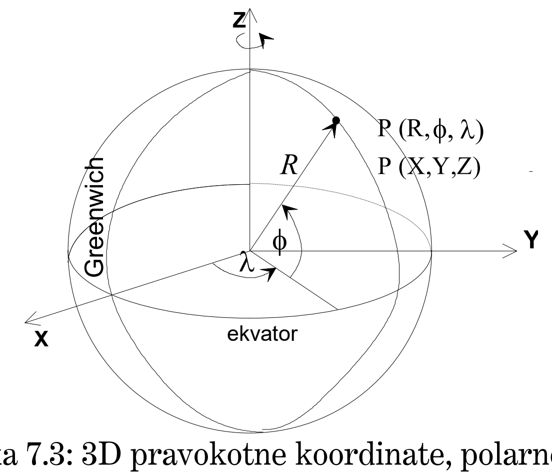
- R =6 371 000,684 m,
- o = 40 030,178 km,
- dolžina loka 1° na velikem krogu: l = 111,195 km,
- navtična (morska) milja: dolžina loka 1' na ekvatorju; l = 1,852 km

7.1 Koordinate na Zemlji – krogli

Izhodišče tridimenzionalnega pravokotnega kartezičnega koordinatnega sistema postavimo v središče Zemlje-krogle s polmerom R. Položaj točke P na površju krogle lahko podamo s kartezičnimi koordinatami (X, Y, Z), ali s krogelnimi (sfernimi) polarnimi koordinatami (R, ϕ, λ).

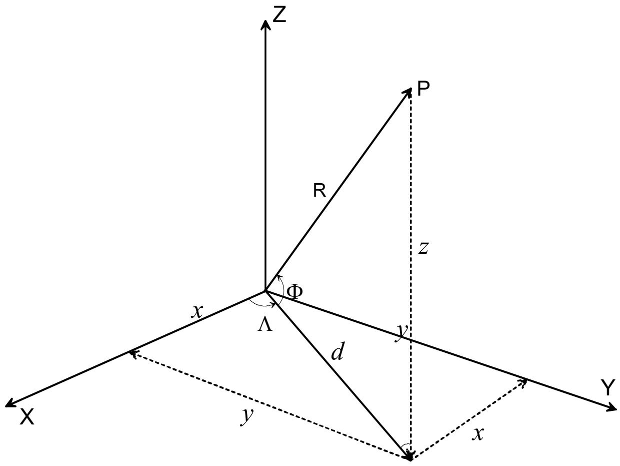
Polarne krogelne koordinate so:

- radij vektor R,
- krogelna širina ϕ,
- krogelna dolžina λ



slika 7.3: 3D pravokotne koordinate, polarne krogelne koordinate in geografske koordinate na Zemlji-krogli

7.1.1 Pretvorba med pravokotnimi in polarnimi krogelnimi koordinatami



slika 7.4: pretvorba med pravokotnimi in polarnimi krogelnimi koordinatami

Pretvorba iz sistema (R, ϕ, λ) v sistem (X , Y, Z) je podan z enačbo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$

Pretvorba iz sistema (X , Y, Z) v sistem (R, Φ, Λ) je podan z enačbo:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\frac{Z}{d};\arctan\frac{Z}{R} \\ \arctan\frac{Y}{X} \\ \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \end{bmatrix} \qquad d=\sqrt{Y^2+X^2}$$

d je pomožna količina in je diagonala pravokotnika s stranicami enakimi koordinatam X, Y točke P.

7.2 Geografske koordinate na Zemlji – krogli

N krogli R=konst. je točka enolično določena samo z dvema kotnima koordinatama: krogelno širino ϕ in krogelno dolžino λ. Če je ta krogla s konstantnim polmerom Zemlja, so ti dve koordinati: Φ *geografska (zemljepisna) širina* in Λ *geografska (zemljepisna) dolžina*.

Rotacijska os Zemlje seka kroglo v dveh protitočkah: severnemu (P_N) i južnemu polu (P_S). Geografska širina je sferna razdalja točke od ekvatorja, računano v ravnini meridiana. Geografska širina je tudi kot v ravnini meridiana med radij vektorjem točke P in ravnino ekvatorja. Štejemo jih severno in južno od ekvatorja od 0° do +90° oz. od 0° do –90°. Oznaka je N ("north", severne geografske širine) in S ("south", južne geografske širine). Ekvator je veliki krog na Zemlji-krogli in je presečišče Zemlje-krogle z ravnino, ki poteka skozi središče krogle in je pravokotna na Zemljni rotacijsko os. Meridiani (poldnevniki) so veliki krogi na Zemlji-krogli, so presečišče Zemlje-krogle z ravninami, ki potekajo skozi središče krogle in skozi oba pola.

Geografska dolžina točke je njena sferna razdalja od začetnega Greenwiškega meridiana, računano v ravnini ekvatorja. Geografska dolžina točke P je tudi kot med ravninami izhodiščnega meridiana in meridiana točke P. Geograske dolžine štejemo vzhodno in zahodno od izhodiščnega Greenwiškega meridiana od 0° do 180°. Oznake so E ("east", vzhodne geografske dolžine) oz. W ("west", zahodne geografske dolžine).

Vzporedniki (širinski krogi) so mali krogi na Zemlji-krogli, ki so vzporedni z ekvatorjem. Vsi kraji na istem vzporedniku imajo enako geografsko širino. Vsi kraji na istem meridianu imajo enako geografsko dolžino.

Koordinate točke, ki je podana z geografskimi koordinatami zapišemo:

T:	ϕ:	N 45° 24' 16",3	λ:	E 14° 56' 33",7
		+ 45° 24' 16",3		– 14° 56' 33",7

Kaj je pozitivno oz. negativno je stvar dogovora.

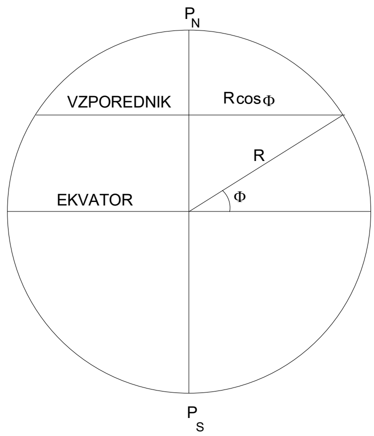
7.2.1 Lok na vzporedniku in meridianu

Vsi meridiani na Zemlji-krogli imajo enak polmer, ta je enak polmeru krogle. Vsi vzporedniki (ker so mali krogi), imajo manjši polmer. Polmer vzporednika z geografsko širino Φ lahko enostavno izračunamo iz zveze v pravokotnem trikotniku:

$$R_\Phi = R\cos\phi$$

Obseg vzporednika je potem:

$$O_\phi = 2R_\phi\pi = 2R\pi\cos\phi$$

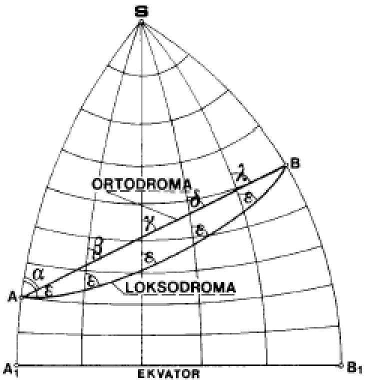


slika 7.5: polmer vzporednika

7.3 Pojem ortodrome in loksdrome

Najkrajša krivulja med dvema točkama na poljubni ploskvi se imenuje *geodetska linija (krivulja)*. Na krogli je geodetska linija lok velikega kroga, ki poteka skozi dve točki na površju krogle. V navigaciji, geodeziji in kartografiji se ta lok imenuje *ortodroma* (iz grščine "ortos" = pravi in "dromos" = pot).

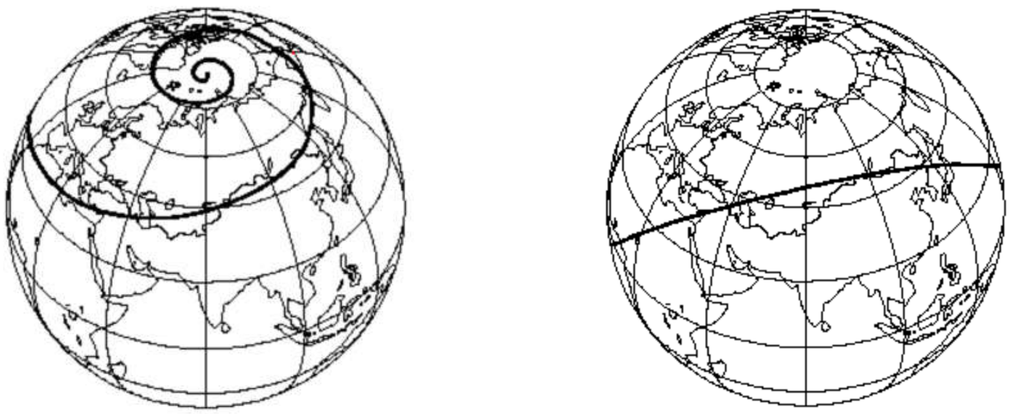
Če smatramo Zemljo za kroglo, je ortodroma najkrajša pot med dvem mestoma na Zemlji (slika 8.6).



slika 7.6: ortodroma in loksodroma

Ortodroma seka vsak meridian pod drugim kotom. To pomeni, če plujemo po ortodromi moramo neprestano spreminjati kurz oz. azimut v katerem naše plovilo (letalo) pluje, kar je praktično nemogoče. Da bi se izognili temu problemu se v navtiki pluje po loksodormi.

Loksodroma (iz grščine "loksos" = poševen) je na krogli krivulja, ki seka vse meridiane pod enakim kotom. Ladja ki pluje po loksodromi ima prednost konstantnega kurza in pomanjkljivost daljše poti. Loksodroma je prostorska krivulja, ki se polu neprestano približuje, a ga nikdar ne doseže. Med dvema točkama na Zemlji-krogli je poljubno mnogo loksodrom, V poštev pride le tista, ki pripelje iz ene v drugo točko v manj kot v enem zavoju.



slika 7.7 : loksdroma in ortodroma n aZemlji-krogli

Poseben primer loksodrome na Zemlji so ekvator, vsi meridiani in vsi vzporedniki. Vzporedniki so loksodrome z kurzom 90° oz. 270°.

Plovba po ortodromi zahteva stalno menjavo kurza, kar je skoraj nemogoče. Na krajše razdalje (do tisoč kilometrov) se v praksi skoraj vedno pluje po loksodromi, saj je razlika med dolžino ortodromne in loksodromne poti reda velikosti 2 km (1 morska milja).

7.3 Osnovni geodetski nalogi na Zemlji-krogli

Obstajata dve osnovni geodetski nalogi: prva in druga geodetska naloga (v angleščini "direct and inverse geodetic problem"). Na krogli predstavlja reševanje geodetskih nalog dejansko reševanje splošnega sfernega trikotnika – *navtičnega sfernega trikotnika*.

elementi navtičnega sfernega trikotnika:

$a = 90^\circ - \phi_B$
$b = 90^\circ - \phi_A$
D – ortodromna razdalja
$\gamma = |\lambda_B - \lambda_A|$
$\alpha = A_{AB}$
$\beta = 360^\circ - A_{BA}$

7.3.1 Prva geodetska naloga

Podano je: točka T_A s svojimi geografskimi koordinatami, ortodromna razdalja od točke T_A do točke T_B in azimut A_{AB} do točke T_B. Potrebno je izračunati geografske koordinate točke T_B; torej:

Dano: T_A (ϕ_A,λ_A), D_{AB}, A_{AB}.
Išče se: T_B (ϕ_B,λ_B)

Reševanje prve geodetske naloge pomeni reševanje splošnega sfernega trikotnika (III. tip naloge). Če je dani azimut v mejah med 0° in 180°, je to notranji kot v navtičnem trikotniku. Potem iskana točka T_B leži vzhodno od točke T_A. V primeru da je dani azimut v mejah med 180° in 360° je to zunanji kot v oglišču (dana točka) in je dejansko dana točka T_B (skladno z našim označevanjem). Iskana točka leži zahodno od dane točke.

Ker je ortodromna razdalja D_{AB} podana v dolžinskih enotah, jo moramo pretvoriti v kotne enote:

$$D^\circ = \frac{D_{\mathrm{km}} 180^\circ}{\pi R_{\mathrm{km}}}$$

Stranico a izračunamo po kosinusniem stavku za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos D + \sin b \sin D \cos \alpha$$

$$(b = 90^\circ - \phi_A \,,\ A_{AB} = \alpha)$$

$$a = 90^\circ - \phi_B \ \Rightarrow\ \phi_B = 90^\circ - a$$

Kota β in γ izračunamo s pomočjo Napier-jevih enačb:

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-D}{2}}{\cos\frac{b+D}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-D}{2}}{\sin\frac{b+D}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\gamma = \Delta\lambda \ \Rightarrow\ \lambda_B = \lambda_A \pm \Delta\lambda$$

Pri izbiranju oznak točk (dana, iskana) moramo upoštevati velikost danega azimuta. Oznake si nato ustrezno priredimo. Enako velja za predznak $\pm\Delta\lambda$. Če je dani azimut $A < 180^\circ$, $\Delta\lambda$ prištejemo, če pa je dani azimut $A > 180^\circ$, $\Delta\lambda$ odštejemo. Izjeme nastopajo če sta točki na različnih straneh Greenwiškega meridiana, oz. datumske meje.

7.3.2 Druga geodetska naloga

Podano sta točki T_A in T_B s svojimi geografskimi koordinatami (ϕ_A,λ_A), (ϕ_B,λ_B). Potrebno je izračunati ortodromno razdaljo med točkama D_{AB} in oba azimuta.

Dano: $T_A\ (\phi_A,\lambda_A)$, $T_B\ (\phi_B,\lambda_B)$
Išče se: D_{AB}, A_{AB}, A_{BA}.

(V mednarodni literaturi je naloga znana kot "inverse problem".)

Reševanje druge geodetske naloge pomeni reševanje splošnega sfernega trikotnika (III. tip naloge).

Razdaljo D izračunamo s pomočjo kosinusniega stavka za stranice:

$$\cos D = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

$$(a = 90^\circ - \phi_B \,,\ b = 90^\circ - \phi_A \,,\ \gamma = |\Delta\lambda|)$$

Izračunano razdaljo D_{AB} izrazimo v dolžinskih enotah:

$$D_{km} = \frac{\pi R_{km}}{180^\circ} D^\circ$$

Kota α in β dobimo s pomočjo Napier-jevih enačb:

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Azimuta sta: $A_{\mathrm{AB}} = \alpha$, $A_{\mathrm{BA}} = 360^{\circ} - \beta$.