1 Trigonometrija

Trigonometrija je del geometrije, ki se ukvarja z reševanjem geometrijskih problemov v ravnini, na krogli ali v prostoru po računski poti, na podlagi zvez, ki obstajajo med sestavinami geometrijskih likov in slik. Za razliko od planimetrije in stereometrije, ki enake probleme rešujeta po konstrukcijski poti. Beseda trigonometrija izhaja iz grški besedi τριγωνον (*trigonon* –trikotnik) in μετρειν (*metrein* – meriti, oz. *metron* – mera. V ožjem pomenu predstavlja trigonometrija računanje trikotnikov in njegovih neznanih sestavin.

Trigonometrijo lahko razdelimo na:

- goniometrijo,
- trigonometrijo v ravnini oz. ravninsko tr.,
- trigonometrijo na krogli oz. sferno tr.

1. Goniometrija izhaja iz grški besedi (*gonia* – kot) in (*metron* – mera), in se torej bavi z računanjem kotov. V širšem pomenu proučuje goniometrija goniometrične in trigonometrične funkcije ter zveze med njimi.
2. Ravninska trigonometrija se bavi z odnosi med elementi v geometrijskih likih v ravnini, predvsem trikotnikih. Probleme vezane za četverokotnik preučuje tetragonometrija, mnogokotnike pa poligonometrija.
3. Sferna trigonometrija se bavi z odnosi med elementi v sfernem trikotniku.

Trigonometrija je del t.i. uporabne matematike in se obširno uporablja v:

- geodeziji,
- astronomiji,
- matematični geografiji,
- navigaciji,
- navtiki itd.

Trigonometrija je zgodovinsko nastala iz geodezije in astronomije; iz praktičnih potreb se je s časom se razvila kot matematična osnova za reševanje astronomskih in zemljemerskih problemov.

1.1 Kratek zgodovinski prikaz razvoja trigonometrije

Ni nam znano, kdaj so se prvič pojavili pojmi ali računske metode, ki jih danes lahko označimo kot trigonometrične. Predpostavimo lahko samo, da začetki trigonometrije segajo tja v čas Orientalne matematike, kulture starih Kitajcev, Babiloncev, Egipčanov itd. Orientalna matematika je nastala kot praktična znanost, ki je omogočala računanje koledarja, upravljanje žetve, organizacijo javnih del in pobiranje davkov. Nedvomno je, da je današnja seksagezimalna razdelitev krožnice nastala v Babilonu in to v zvezi z reševanjem astronomskih problemov. Babilonci so vedeli: "polmer kateregakoli kroga se lahko natančno šestkrat vriše kot tetiva v krog". Pri staroegipčanskih piramidah lahko zasledimo dokaze o poznavanju trigonometrije; vsa gradnja je temeljila na podlagi zvez med koti, smermi, razmerij itd.

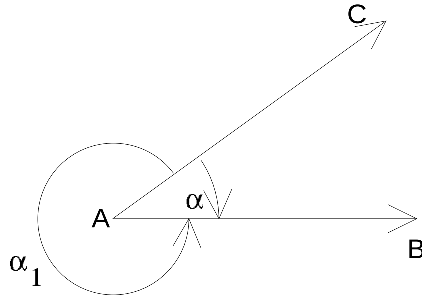
Trigonometrija starih Grkov, kot utemeljiteljev matematike in geometrije v današnjem pomenu, je temeljila bolj na filozofskem pogledu na svet. Geometrija je pri njih bila sredstev logike, čista teoretična znanost. Evklidove "Elemente" (III. st. p.n.š.), po Bibliji drugo najbolj razširjeno in prevajano knjigo na svetu, lahko danes ocenjujemo bolj z logičnega kot praktično-matematičnega stališča. Šele praktično reševanje astronomskih problemov je nakazalo pravo pot k goniometričnim funkcijam in trigonometričnim zvezam. Namreč izkazalo se je, da določenih matematičnih količin, potrebnih v astronomiji, ni možno neposredno izmeriti, pač pa izračunati posredno, prek določenih zvez z neposredno izmerjenimi količinami. Aristarh je III. stoletju p.n.š. izračunal razdalji do Lune in Sonca in je pri tem uporabil goniometrične funkcije. Menelaj in Hiparh (II. st. p.n.š.) sta podala šest oz. dvanajst knjig tetiv, izračunanih s pomočjo kotov. V Ptolemejevem (II. st. n.š.) "Velikem zborniku" oz. bolj znanem pod arabskim imenom "Almagest" je podan pregled celotne grške astronomije in računanja tetiv. Od Evklidovega učenca Arhimeda (III. st. p.n.š.) nam je, za trigonometrijo pomembno, ostalo t.i. Ludolfovo število PI.

Kod edini nadaljevalci dela starih Grkov so se v srednjem veku izkazali Arabci. Čeprav niso imeli takšnih imen kot Grki, so podpirali splošni napredek znanosti. Na podlagi starogrške in staroindijske matematike so trigonometrijo v veliki meri nadgradili in uspeli zedinit račun in konstrukcijo geometrije. V XI. st. so v Evropo, preko Španije prinesli znake za števila, ki jih danes uporabljamo. Sama beseda *algebra* izhaja iz arabščine. Od sanskrtske besede *djiva* (tetiva) je nastal sprva arabski *djaib* (prevoj), ki ga je Plato do Tivolija prevedel v latinščino kot *sinus*. Na zahodu je sinus dolgo imenovan *sinus primus* kosinus pa *sinus secundus*. Šele leta 1623 je Günther uvedel današnji cosinus, ki pa izhaja iz sanskrtske besede *kotidjiva* (dopolnilni sinus). Al Battani je prvi uvedel zvezi cotangens, Abul Wefa pa zvezo tangensa, seveda še v zelo obširni in dokaj nerazumljivi obliki. Persijcu Nassirju Eddinu Tusi (XIII. st) gre zasluga, da je postala podoba trigonometričnih obrazcev, več ali manj, podobna današnjim. Njemu pripisujejo tudi iznajdbo sinusovega stavka.

Prek Arapcev je prišla trigonometrija v Evropo. Pomembni so prevodi klasičnih matematičnih rokopisov Regiomontana (XV. stoletje). Preporod znanosti v Evropi v času renesanse, zlasti iznajdba logaritmov v XVII. stoletju (Napier in Byrgi) je dala razvoju goniometrije in trigonometrije novi zagon. K temu je prispevala tudi prva praktično izvedena triangulacija, XVII. st. Nizozemec Willebrord Snell. V XVIII. st. je Leonhard Euler opravil obsežno reformo trigonometrije in goniometrije ter podal bolj skladno obliko obrazcev, ki se je z manjšimi spremembami ohranila do danes.

2 Pojem kota

Smer, kateri je določena smer gibanja imenujemo *orientirana smer*. Smer gibanja lahko označimo z puščico ali dvema točkama. Vzemimo sedaj dve orientirane smeri, z izhodiščem v točki A. Orientirane smeri sta ponazorjeni s poltrakoma AC in AB (slika 1).



slika 2.1: kot

Kot je razlika dveh smeri in se meri z velikostjo vrtenja enega poltraka do preklopa z drugim poltrakom. Na ta način dobimo lahko dva kota α in α_1, ki sta v smislu definicije kota enaka. Na primer, če je podana ena smer AB in kot α, s tem še ni določen položaj druge smeri. Da bi odpravili to dvoumnost moramo podati smer vrtenja enega poltraka, da bi tega dovedli do preklopa z drugim poltrakom. To je stvar dogovora. Tako je v matematiki sprejeta levosučna smer (v nasprotnem smislu vrtenja urinega kazalca), v geodeziji pa je dogovorno izbran desnosučno vrtenje (v smislu vrtenja urinega kazalca). Vedno je dogovorna smer vrtenja pozitivna, obratna pa negativna.

V geodeziji je torej kot α pozitiven, kot α_1 pa negativen in velja:

$$\alpha + \alpha_1 = 0.$$

2.1 Merjenje kotov

Obstajata dve različni meri kotov:
1. kotna mera,
2. ločna mera.

2.2 Kotna mera

Mera velikosti kota je vrtenje smeri; samo vrtenje pa merimo z razdelitvijo krožnice na določeno število delov. Obstajata dva načina (sistema) razdelitve krožnice:
- seksagezimalni sistem
- centezimalni sistem

2.2.1 Seksagezimalni sistem

Osnovna enota sistema ustreza razdelitvi krožnice na 360 delov. Enota je *stopinja*, ki je razdaljen na 60 *minut*, ta pa še na 60 *sekund*. Označujemo jih:

$1^{o} = 60'$
$1' = 60''$
$1^{o} = 3600''$

V tem sistemu pišemo kote kot troimensko število: $217^{o}\ 28'\ 50''$.

Ta sistem je najstarejši in je bil znan že starim Babiloncem (menili so da leto ima 360 dni). Imena minute in sekunde izhajajo iz latinskih besed:

- "partes minutae primae" (manjši deli prvega reda)
- "partes minutae secundae" (manjši deli drugega reda).

Obstaja enostavna povezava s časovnim enotam:

$24^{h} = 360^{o}$
$1^{h} = 15^{o}$
$1^{m} = 15'$
$1^{s} = 15''$

Slaba stran sistema je pretvorba stopinj, minut in sekund v decimalne dele stopinj.

Sekunde oz. minute se spremenijo v decimalne dele minut oz. stopinj tako, da jih delimo s 60. Spreminjati začnemo pri sekundah:

$54^{o}\ 39'\ 27'' \rightarrow \quad 27'' : 60 = 0{,}45'$
$39{,}45 : 60 = 0{,}6575^{o} \rightarrow 54^{o}{,}6575$

2.2.2 Centezimalni sistem

Osnovna enota sistema ustreza razdelitvi krožnice na 400 delov in se imenuje *grad.* Manjše enote so dekadne. Grad vsebuje 100 centezimalnih minut (*centigradov)*, le-ta pa 100 centezimalnih sekund (*centicentigradov*). Označujemo jih:

$1^{g} = 100^{c}$
$1^{c} = 100^{cc}$
$1^{g} = 100000^{cc}$

V tem sistemu pišemo kote kot decimalno število:

$217{,}8937^{g} = 217^{g}\ 89^{c}\ 37^{cc}$.

V praksi se vse bolj srečujemo z imenom *gon* namesto grada. Manjša enota je *miligon* (tisoči del gona), oznaka mg.

1g = 1000mg

Centezimalni sistem se je prvič pojavil v pisani obliki v XV stoletju vendar sta prava začetnika sistema Francoza Gelibrand in Lagrange (1783). V uporabi je od konca francoske revolucije 1789. V Nemčiji vpeljali sistem v geodezijo že leta 1937.

Pogostokrat se seksagezimalni sistem imenuje stari, centezimalni pa novi sistem. Tako obstaja tudi pri klasičnih geodetskih instrumentih razdelitev krogov na eden oz. drugi sistem. Z novimi elektronskimi instrumenti težave okoli sistema odpadejo.

Pretvorba iz enega v drugi sistem se opravi preko razmerja:

$$90^o = 100^g$$

kar nam da:

$$S^o = \frac{9}{10} C^g \qquad C^g = \frac{10}{9} S^o$$

$$1° = \frac{10}{9} 1^g = 1{,}11111^g \qquad 1^g = \frac{9^o}{10} 0{,}9°$$

$$1' = 1^c{,}85185 \qquad 1^g = 54' = 3240''$$

$$1'' = 3{,}0864^{cc} \qquad 1^c = 32{,}4''$$

$$1^{cc} = 0{,}324''$$

$$1'' = 0{,}3086 mg$$

$$1 mg = 3{,}24''$$

Zgled za pretvorbo:

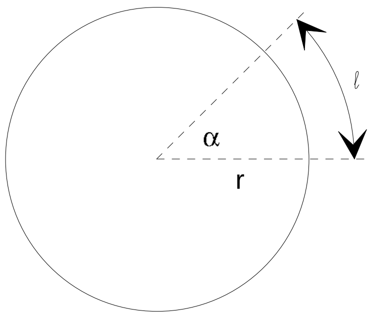
$15^o\ 32'\ 27'' = 15{,}5408333$

$15{,}5408333 \times 10/9 = 17{,}2676$ ($17^o\ 26^c\ 76^{cc}$)

$17{,}2676 \quad \times 9/10 = 15{,}54084 = 15^o\ 32'\ 27''$

2.2.3 Ločna mera

Imenuje se tudi analitična mera. Izhajamo iz dejstva, da se središčni koti na isti krožnici izražajo z njim pripadajočimi loki (slika 2.2). Razmerje dveh kotov ni odvisno od enote s katero merimo kote. Naj neki kot vsebuje α enot kotne mere, in pravi kot (90^o) vsebuje R istih enot. Velja da je razmerje med kotom α in polnem kotu 4R, enako kakor razmerje med pripadajočem lokom l in obodom kroga $2r\pi$.



slika 2.2: lok kot mera kota

$$\alpha : 4R = l : 2r\pi$$

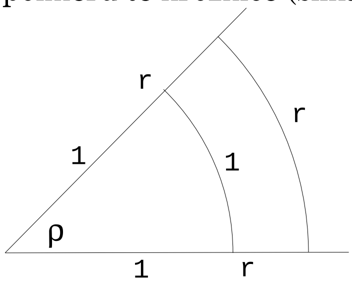
$$\alpha = \frac{4Rl}{2\pi r} = \frac{2Rl}{r\pi} = \frac{2R}{\pi}\frac{l}{r}$$

$2R/\pi$ je konstanta in je torej vsak kot, ne glede na enoto s katero merimo, odvisen samo od razmerja l/r. To razmerje je neimenovano število in je odvisno samo od od kota α.

Nas zanima kot, za katerega je razmerje l/r enako 1.

$$l / \mathrm{r} = 1$$

Ta kot se se imenuje *radian* in je enak ρ=2R/π. Radian je središčni kot, ki na katerikoli krožnici ustreza loku enakemu polmeru te krožnice (slika 3).



slika 2.3: radian

Radian se lahko izrazi izrazi v stopinjah, minutah in sekundah za vsako kotno mero. To nam ponazarja tabela 1. Tabela 1 nam omogoča tudi prehod iz ločnih mer v kotne mere in obratno.

$$\alpha = \frac{2R}{\pi} \alpha\,(\mathrm{rad})$$

$$\alpha^{o} = \frac{180^{o}}{\pi} \alpha\,(\mathrm{rad}) \qquad \alpha^{g} = \frac{200^{g}}{\pi} \alpha\,(\mathrm{rad})$$

$$\alpha(\mathrm{rad}) = \frac{\pi}{2R} \alpha$$

$$\alpha(\mathrm{rad}) = \frac{\pi}{180^{o}} \alpha^{o} \qquad \alpha\,(\mathrm{rad}) = \frac{\pi}{200^{g}} \alpha^{g}$$

Splošno velja:

$$\alpha(\mathrm{rad}) = \alpha(rad) = \frac{\alpha^{o}}{\rho^{o}} = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha''}{\rho''}$$

$$\alpha^{o} = \alpha(\mathrm{rad})\rho^{o} \;....$$

Enota	Seksagezimalna razdelba		Centezimalna razdelba	
^{o} in ^{g}	$\frac{180^{o}}{\pi}$	$\rho^{o}=57^{o},29578$	$\frac{200^{g}}{\pi}$	$\rho^{g}=63^{g},6620$
’ in ^{c}	$\frac{180^{o}.60}{\pi}$	ρ’=3437’,75	$\frac{200^{g}.100}{\pi}$	$\rho^{c}=6366^{c},20$
“ in ^{cc}	$\frac{180^{o}.3600}{\pi}$	ρ“=206264,8”	$\frac{200^{g}.100000}{\pi}$	$\rho^{cc}=636620^{cc}$

Tabela 2.1: prehod iz ločne v kotno mero in radiane

2.2.4 Dolžina loka

Na krogu s polmerom *r*, središčni kot α radianov ustreza loku dolžine *l*:

$$l = r \times \alpha \qquad \alpha(rad) = \frac{l}{r}$$

dolžina loka = radij × središčni kot

Povdarimo, da sta *l* in *r* lahko izražena v poljubnih merskih dolžinskih enotah; ni pomembno katerih, vendar morata biti v enakih.

$$\alpha : 360° = l : 2r\pi$$

2.3 Dolžinske merske enote

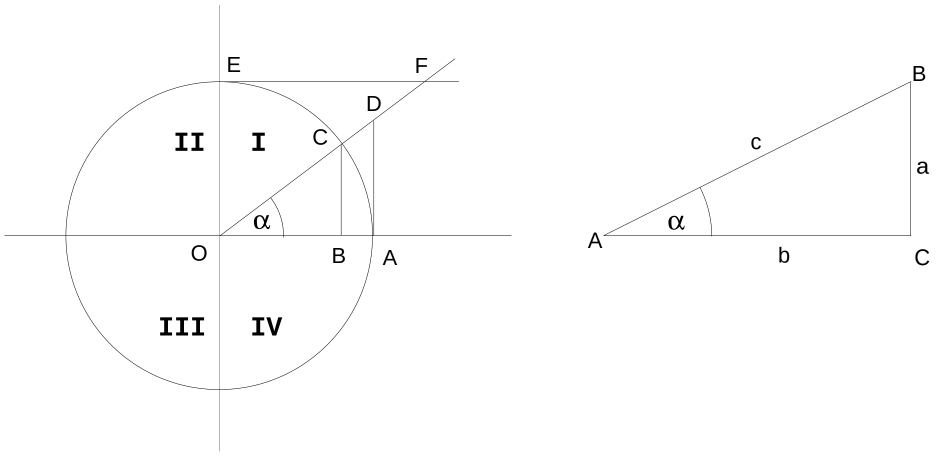
Osnovna enota za dolžino v SI sistemu merskih enot je *meter*. Manjše enoto so decimeter (dm), centimeter (cm), milimeter (mm), mikron (μ). Večje enote so hektometer (hm), kilometer (km).

Dolžinske merske enote:		Površinske mere:
1 meter = več različnih definicij: 1/10000000 dolžine meridiana, ki gre skozi Pariz, 1650763.73 valovnih dolžin EMV sevanja Kriptona 86 pri prehodu med različnimi stanji pot svetlobe v vakuumu v 1/299792438 sekunde **1 km, 1 dm, 1 cm, 1 mm, 1μm, 1 nm** Stare dolžinske mere: **1 seženj** =1.896484 m **1 čevelj** = 1/ 6 sežnja = 0.316081 m **1 palec** = 1 / 12 čevlja = 0.026340 m **1 črta** = 1 / 12 palca = 0.002195 m **1 poštna milja** = 4000 sežnjev = 7.585936 km		**1 m^2** **1 a** = 100 m^2 **1 ha** = 100 a = 10000 m^2 **1 km^2** =1000000 m^2
angloameriške merske enote za dolžino: 1 yard čevelj (foot) palec, col (inch) milja (US) UK morska milja medn. morska milja	 1yd = 0,9144m 1' =0,3048m 1" = 2,54cm 1mi = 1 609,344m (1m=1760yd) 1 n.mi. (UK) = 1 853, 18 m 1 n.mi. = 1 852,0 m	in^2 = 6,4516 10^{-4} m^2 (točno) ft^2 = 9,2903 10^{-2} m^2 (točno) yd^2 = 0,836127 m^2 jutro (acre) 1 ac = 4 046,86 m^2 mi^2 = 2,589 988 m^2

Tabela 2.2: SI in angloameriške dolžinske enote

3. Goniometrične funkcije

Goniometrične funkcije kota α opredelimo lahko s pomočjo trigonometričnega kroga (polmer kroga, R=1), ali pa s pomočjo pravokotnega trikotnika (za ostre kote). Kot α merimo od nepremičnega polmera OA do premičnega polmera OC nasprotno vrtenju urinega kazalca (slika 4).



slika 3.1 definicija goniometričnih funkcij

V pravokotnem trikotniku obstajajo trije elementi: hipotenuza in dve kateti. Med njimi lahko postavimo šest sorazmerij, od teh so tri neposredne in tri posredne. Neposredne so sinus, kosinus in tangens, posredne pa kotangens, sekans in kosekans.

$\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$ $\quad \tan\alpha = AD = \frac{a}{b}$ $\quad \cot\alpha = EF = \frac{b}{a}$

$sc\alpha = OD = \frac{c}{b}$ $\quad \csc\alpha = OF = \frac{c}{a}$

Funkcijam pripisujemo določen predznak odvisno od tega, v katerem kvadrantu trigonometričnega kroga leži premični polmer OC. Razpredelnica nam poda predznak vseh goniometričnih funkcij.

kvadrant	velikost kota	sin	cos	tan	ctg
I	od 0° do 90°	+	+	+	+
II	od 90° do 180°	+	–	–	–
III	od 180° do 270°	–	–	+	+
IV	od 270° do 360°	–	+	–	–

Preglednica 3.1: predznak goniom. funkcij glede na kvadrant kota

Meja spreminjanja:
sinus in kosinus: od –1 do +1;
tangens in kotangens: od – ∞ do + ∞.

Definicija goniometričnih funkcij se nanaša na katerikoli kot, ne samo na ostre kot je predstavljeno na sliki. Če je kot negativen prevedemo funkcijo na funkcijo pozitivnega kota po obrazcih:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$$

Če se kot nahaja $90° < \beta < 360°$, prevedemo goniometrično funkcijo na funkcijo ostrega kota po obrazcih za prevedbo, glej preglednico 4.2.

Preglednica 3.2: prevedba goniometrične funkcije poljubnega kota na funkcijo ostrega kota

funkcija	$\beta=90\pm\alpha$	$\beta=180\pm\alpha$	$\beta=270\pm\alpha$	$\beta=360-\alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\beta$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\beta$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

3.1 Osnovni goniometrični obrazci

3.1.1 Funkcije enega kota

Osnovne odnose med funkcijami dobimo lahko s pomočjo Pitagorinega teorema, tako da preuredimo razmerja med strancami pravokotnega trikotnika.

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$$

$$1 + (b/a)^2 = (c/a)^2 \qquad (a/b)^2 + 1 = (c/b)^2$$

Od tod sledijo iskane zveze:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

3.1.2 Funkcije vsote in razlike kotov

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

3.1.3 Funkcije polovičnega kota

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

3.1.4 Vsota in razlika funkcij

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\sin\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \cot\alpha\pm\cot\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

3.1.5 Funkcije dvojnega kota

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

3.1.6 Produkt funkcij

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

3.1.7 Potence funkcij

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-2\cos 2\alpha) \qquad \sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

3.2 Razvoj goniometričnih funkcij v MacLaurinovo vrsto

Funkcijo $y=f(x)$, ki je zvezna in ima odvode za $x=a$, lahko v mnogih primerih izrazimo v obliki vsote potenčne vrste, dobljene po Taylorjevem obrazcu:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)$$

za $a=0$ dobimo poseben primer te vrste, t.i. MacLaurinovo vrsto:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad \sin x \approx x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad \cos x \approx 1$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots \qquad \tan x \approx x$$

$$\cot x = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \ldots\right]$$

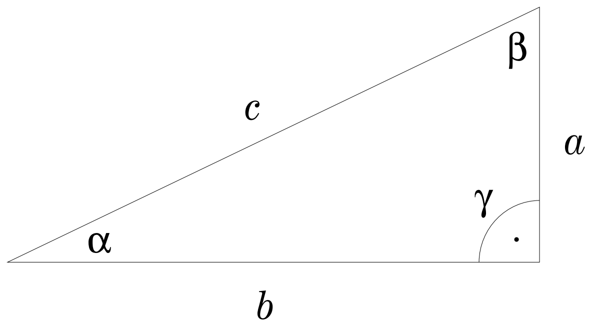
Op: Kot x je vedno podan v ločni meri! Če je kot podan v kotni meri, ga pretvorimo v ločno mero:

$$\alpha'' = \frac{\alpha''}{\rho''}$$

Trigonometrija v ravnini

Pravokotni trikotnik

a, b kateti
c hipotenuza



Osnovne zveze v pravokotnem trikotniku:

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta$$
$$b = c\sin\beta = c\cos\alpha$$
$$a = b\tan\alpha = b\cot\beta$$

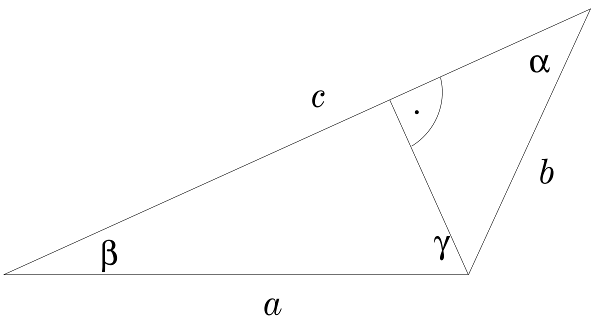
Reševanje pravokotnega trikotnika:

Pravokotni trikotnik je določen z dvema elementoma. Obstaja $\binom{5}{2} = 10$ možnih kombinacij, vendar vse niso medsebojno neodvisne. En ostri kot določa tudi drugega, tako da obstajajo 4 neodvisne naloge:

3. dani c, a — hipotenuza in kateta (c, b)
4. dani a, b — kateti
5. dani c, α — hipotenuza in en kot (c, β)
6. dani a, α — kateta in kot (a, β), (b, α), (b, β)

Potrebno je preveriti če dani elementi omogočajo enolično rešitev. Mora biti izpolnjeno: $\alpha + \beta = 90°$, ter $a < c$, $b < c$ in $c^2 = a^2 + b^2$.

Poševni trikotnik



R – polmer očrtanega kroga
r – polmer včrtanega kroga
$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Stavki, ki veljajo za poševni trikotnik

Sinusni izrek

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Kosinusni izrek

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Tangensni izrek

Iz sinusnega izreka velja:

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ To lahko napišemo v obliki:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$ iz česar sledijo enačbe tangensnega izreka:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

Mollweidove enačbe

Iz sinusnega izreka velja:

$$\left\{\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right\} \oplus \left\{\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right\}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Vrnimo se zopet na sinusni izrek:

$$\left\{\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right\} \ominus \left\{\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right\}$$

Z enakim postopkom kot zgoraj dobimo:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Izrek o polovičnem kotu

$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ upoštevajoč enačbo za polmer včrtanega kroga (glej spodaj) se izrek o polovičnih kotih lahko napiše v obliki:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{(s-c)}$$

Heronov obrazec

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ploščina trikotnika

$$P=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\tfrac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$P=\frac{abc}{4R} \qquad P=s.r$$

Polmer očrtanega kroga

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Polmer včrtanega kroga

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Reševanje splošnega trikotnika

Trikotnik je možno rešiti, če so podani 3 elementi. Skupaj obstaja 4 tipa nalog, glede na to kateri elementi so podani.

1. tip naloge

dano: a, b, c (vse tri stranice)
neznano: α, β, γ
Za izračun neznanih kotov je najboljše uporabiti izrek o polovičnih kotih:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{(s-c)}$$

2. tip naloge

dano: b, c, α (dve stranici in vmesni kot)
neznano: β, γ, a
Neznana kota lahko izračunamo s pomočjo tangensnega izreka, katerega napišemo v malo spremenjeni obliki:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b+c}{b-c}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\beta-\gamma}{2}, \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta-\gamma}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

stranico a laho izračunamo iz sinusnega izreka:

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

3. tip naloge

dano: a, b, α (dve stranici in kot nasproti ene izmed njih)
neznano: β, γ, c

Z danimi elementi lahko izračunamo edino kot β prek sinusnega izreka:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

Pri tem lahko nastopijo trije primeri:

$\sin\beta > 1$, ne obstaja realna vrednost za β. Ni rešitve, trikotnik s takšnimi elementi ne obstaja.

$\sin\beta = 1$, $\Rightarrow$ $\beta = 90°$ Trikotnik je pravokoten.

$\sin\beta < 1$,

obstajata dve rešitvi za kot β: β_1 in $\beta_2 = 180° - \beta_1$.

a) $a > b$ potem mora biti tudi $\alpha > \beta$

iz sinusnega izreka sledi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha > \sin\beta \quad \Rightarrow$$ Kot α je bližje 90° kakor kot β.

Ne glede na to, ali je dani kot α v I. ali II. kvadrantu, je rešitev vedno samo ena $\beta = \beta_1$. Nasproti danemu kotu leži večja stranica.

b) $a < b$ potem mora biti tudi $\alpha < \beta$

iz sinusnega izreka sledi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta \quad \Rightarrow$$ Kot β je bližje 90° kakor kot α.

1. dani kot α je v I. kvadrantu in obe rešitvi $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ zadoščajo pogoju $\alpha < \beta$.
2. dani kot α je v II. kvadrantu in nobena rešitev $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ ne zadošča pogoju $\alpha < \beta$. Ni rešitve za trikotnik z danimi elementi.

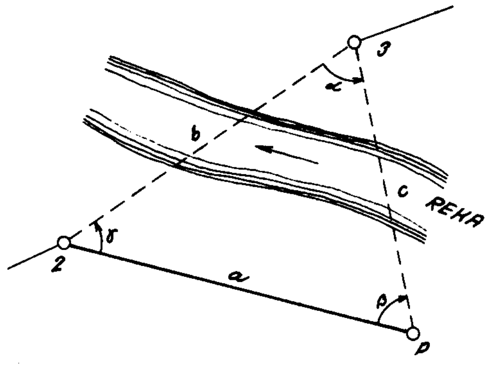
4. tip naloge

dano: a, α, β (stranica in priležna kota)
neznano: γ, b, c
Pogoj rešljivosti: $\alpha + \beta < 180°$
Kot γ dobimo iz lastnosti trikotnika: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
Obe neznani stranici lahko izračunamo iz sinusnega izreka:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow b \qquad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c$$

Uporaba v geodeziji

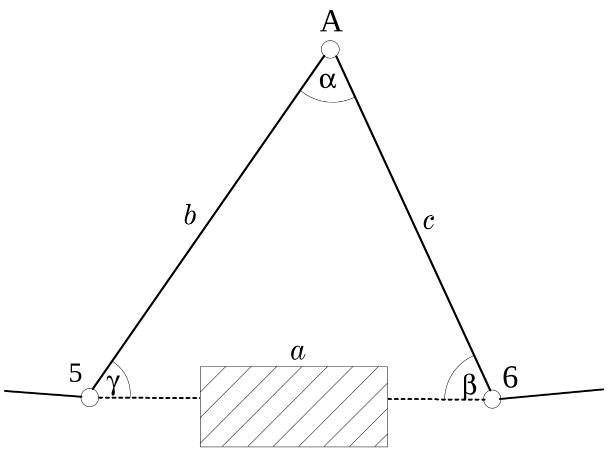
Izračun dolžine med dvema nedostopnima točkama



merjeno: a, α, β, γ
neznano: b, c

sinusni izrek:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$



merjeno: α, b, c
neznano: a
Kosinusni izrek; tangensni izrek + sinusni izrek:

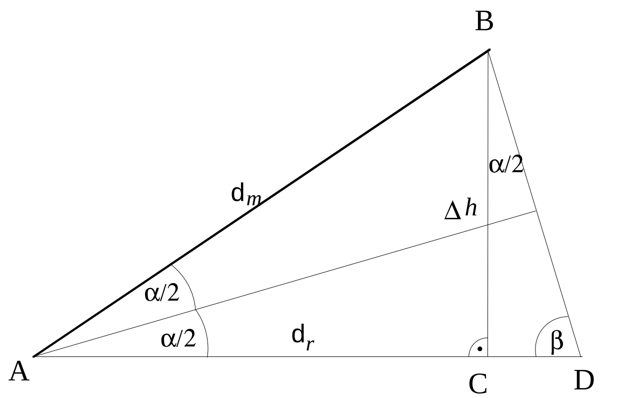
$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\beta}{2}}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Redukcija poševno merjenih razdalj na horizont



d_{m}	merjena razdalja
d_{r}	reducirana razdalja
Δh	višinska razlika

r redukcija
ABD enakokraki trikotnik

rešitev s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$d_m^2 = d_r^2 + \Delta h^2$$
$$d_r = \sqrt{d_m^2 - \Delta h^2}$$

Tako dobimo vrednost reducirane dolžine neposredno (pri tem moramo poznati višinsko razliko med točkama A in B.

Če želimo izračunati vrednost redukcije lahko računamo na več načinov, tim pa so odvisni od količin, ki so nam na voljo.

7. trikotnik △BCD je pravokoten:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\Delta h} \qquad \Rightarrow \qquad r = \Delta h \tan\frac{\alpha}{2}$$

kot α lahko izračunamo iz trikotnika △ABC:

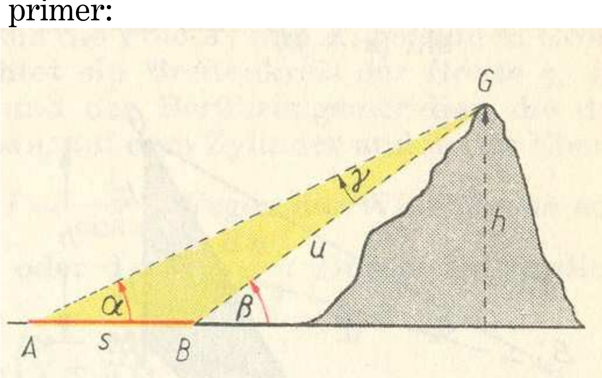
$$\sin\alpha = \frac{\Delta h}{d_m}$$
$$d_r = d_m - r$$

8. če smo izmerili višinski (vertikalni kot α) izračunamo reducirano razdaljo:

$$\cos\alpha = \frac{d_r}{d_m} \qquad \Rightarrow \qquad d_r = d_m \cos\alpha$$
$$r = d_m - d_r = d_m - d_m\cos\alpha$$
$$r = d_m(1 - \cos\alpha)$$

Trigonometrično višinomerstvo

1. primer:



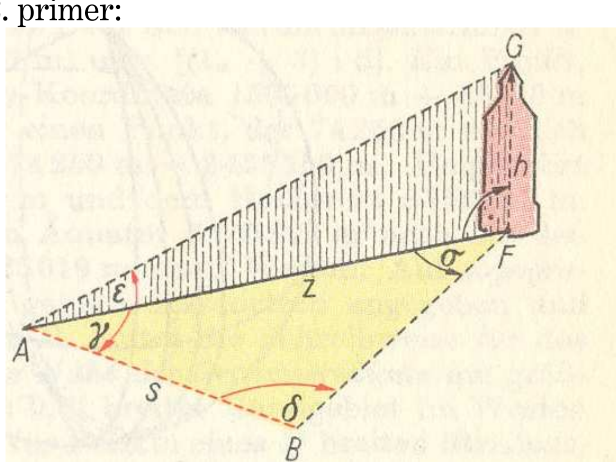
merjeno: α, γ, s
(naklonski kot β)
neznano: h

$$h = x \sin\alpha \qquad \varepsilon = \beta + (180° - \gamma)$$

$$x = s\frac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma} \qquad \sigma = \gamma - \alpha$$

$$x = s\frac{\sin\varepsilon \sin\alpha}{\sin\sigma}$$

2. primer:



merjeno: s, ε, γ, δ
neznano: h

$$\overline{AF} = z \qquad h = z \tan\varepsilon$$

$$z = s\frac{\sin\delta}{\sin\sigma} = s\frac{\sin\delta}{\sin[180° - (\gamma + \delta)]} = s\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$