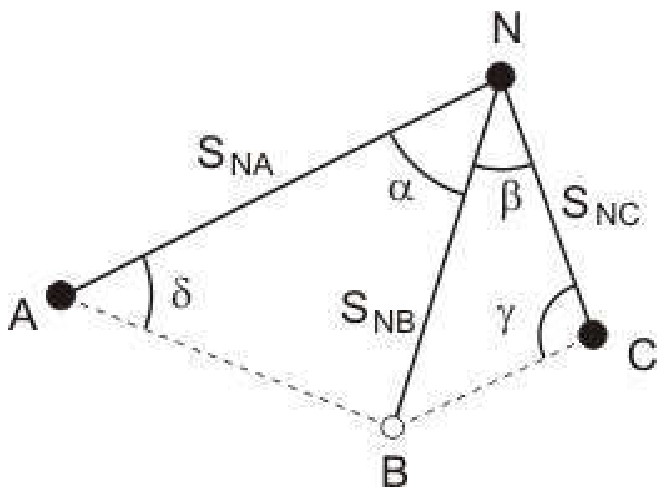
Prehod iz merskega v koordinatni prostor

- Prehod iz merskega v koordinatni prostor ⇒ izračun koordinat geodetskih točk.
- Merski prostor
  - Direktno koordinat nikoli ne merimo! Izpeljemo jih indirektno iz meritev (opazovanj)!
  - Meritve so informacija relativnega položaja več točk (najmanj dveh).

- Primer:
  7 opazovanj:
  S_{NA}, S_{NB}, S_{NC}, α, β, γ, δ
  Za določitev lika ABCN
  zadošča 5 opazovanj!
  Dve opazovanji sta nadštevilni!



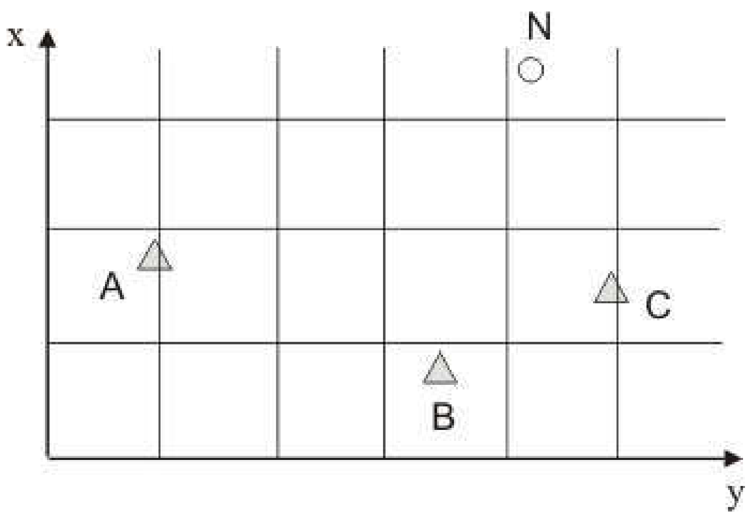
Koordinatni prostor

- Iskane količine so koordinate geodetskih točk!

Koordinate

- Položaji danih točk (A, B, C) so znani (od prej)!

- Iščemo (določamo) koordinate nove točke (N)!



Določanje položaja točk (positioning)

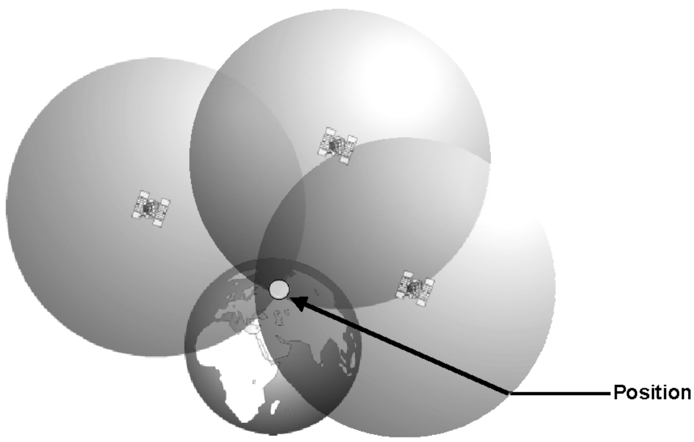
- Različni načini določitve položaja:
  - absolutno določanje položaja;
  - relativno določanje položaja;
  - 3D, 2D, 1D določanje položaja.

- Absolutno določanje položaja:
  - dane koordinate ekstraterestričnih objektov (zvezde, umetni Zemljini sateliti);
  - opravljene meritve do teh objektov (smeri, razdalje);
  - iščemo koordinate opazovališča;
  - potrebujemo 3 vrste koordinatnih sistemov:
    - terestrični (iskane geod. točke);
    - nebesni (zvezde);
    - orbitalni (um. Zemljini sateliti).

Absolutno določanje položaja

- Astronomska opazovanja nam podajo astronomske geografske koordinate (Φ, Λ).
  - Potrebujemo opazovanja do vsaj ene zvezde (ali Sonca). Moramo imeti dostop do točnega časa. Zvezde obravnavamo kot dane točke.

- Opazovanja do um. zemljinih satelitov nam podajo geodetske (elipsoidne koordinate (ϕ, λ, h).
  - potrebujemo opazovanja do vsaj štirih satelitov (3 za položaj, enega za odpravo pogreška ure v sprejemniku).
  - Tirnice satelita so znane.



Relativno določanje položaja

- Relativno določanje položaja pomeni določitev položaja ene točke glede na drugo. Lahko uporabimo:
  - neposredna opazovanja med točkami;
  - posredna opazovanja s točk do ekstraterestričnih objektov;
- Vrsta opazovanj in vrsta iskanih koordinat določajo matematični model določitve položaja (3D, 2D ali 1D).

- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
  - določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
  - določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").

Določanje položaja točk v ravnini

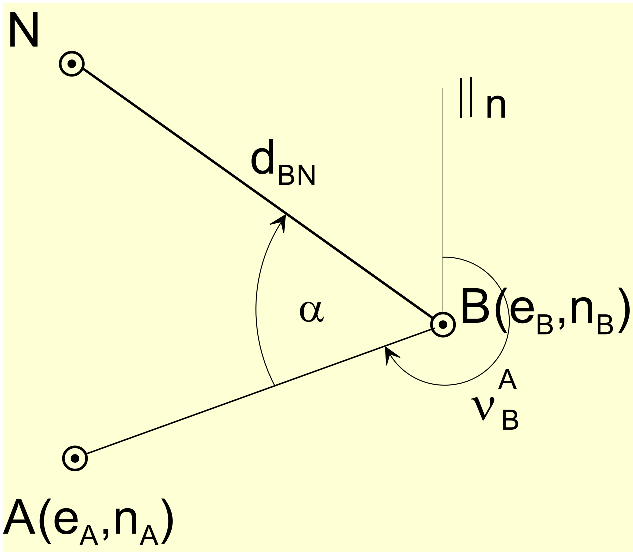
- Načini določitve:
  - polarna izmera (polarni priklep),
  - zunanji urez (angl. "intersection"),
  - notranji urez (angl. "resection"),
  - ločni presek (angl. "lateration")
  - prosto stojišče (angl. "free stationing"),
  - poligon – poligonski vlak (angl. "traverse").

- Dane količine:
  - koordinate danih točk.
- Opazovane količine:
  - smeri (koti) in razdalje.

- Dane točke: točke z znanimi koordinatami!
- Nove točke: točke, katerih koordinate računamo.

Polarna izmera

- Določitev koordinat nove točke s polarno izmero uporabljamo pri detajlni topografski izmeri. Z dane točke opazujemo drugo dano točko (orientacija), ter izmerimo smer in dolžino do nove točke:
- dano: $A\ (e_A, n_A)$, $B\ (e_B, n_B)$
- merjeno: α
- neznano: $N\ (e_N, n_N)$



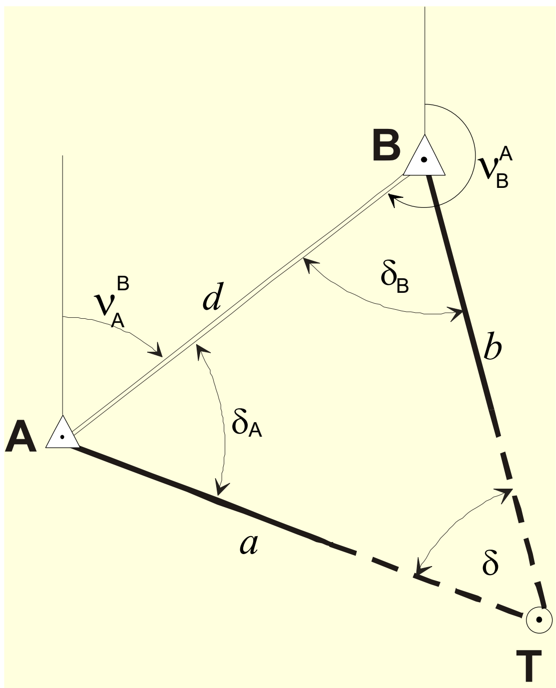
- Postopek:

1. Izračunamo smerni kot iz B na A;
2. izračunamo "orientirano smer" (smerni kot) iz B na N:
   $$\nu_B^N = \nu_B^A + \alpha$$
3. izračunamo koord. razlike od B do N;
4. Izračunamo koordinate točke N.

Zunanji urez

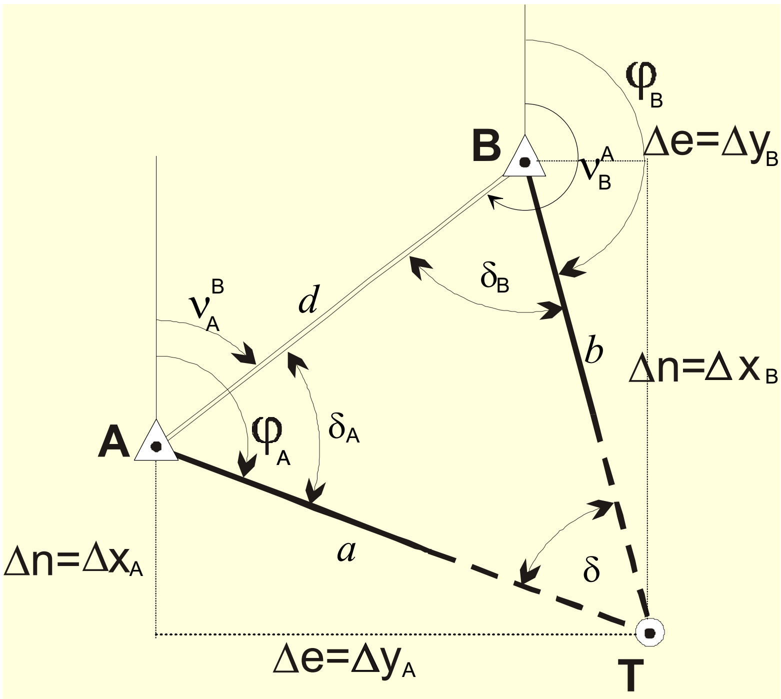
- Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih zunanjih smeri iz dveh danih točk. Zunanja smer je smer z dane točke na novo točko.

- dano: $A\ (e_A, n_A)$, $B\ (e_B, n_B)$
- merjeno: δ_A, δ_B
- neznano: $T\ (e_T, n_T)$



Zunanji urez

- φ_A in φ_B sta orientirani smeri.
- Orientirana smer je kot, ki ga oklepa neka smer z vzoprednico z osjo n.



- Orientirane smeri izračunamo:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \delta_A$$
$$\varphi_B = \nu_B^A - \delta_B$$

- oz. kot δ v oglišču T izračunamo kot:

$$\delta_A = \varphi_A - \nu_A^B$$
$$\delta_B = \nu_B^A - \varphi_B = (\nu_A^B \pm 180°) - \varphi_B$$
$$\delta = \varphi_B - \varphi_A$$

- Računska kontrola je: $\delta_A + \delta_B + \delta = 180°$.

- Da bi izračunali koordinate točke T prvo izračunamo koordinatne razlike med točkami A oz. B in T. Za ta izračun potrebujemo stranice triokotnika a in b.

- iz sinusovega izreka izračunamo stranice trikotnika a in b.

$$\frac{d}{\sin\delta}=\frac{b}{\sin\delta_A} \qquad \frac{d}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin\delta_B}$$

$$b=\frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_A \qquad a=\frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_B$$

- Izračun koordinatnih razlik:

$$\Delta e_A=\Delta y_A=a\sin\varphi_A \qquad \Delta e_B=\Delta y_B=b\sin\varphi_B$$

$$\Delta n_A=\Delta x_A=a\cos\varphi_A \qquad \Delta n_B=\Delta x_B=b\cos\varphi_B$$

- Koordinate točke T so:

$$e_T'=e_A+\Delta e_A^T \qquad n_T'=n_A+\Delta n_A^T$$

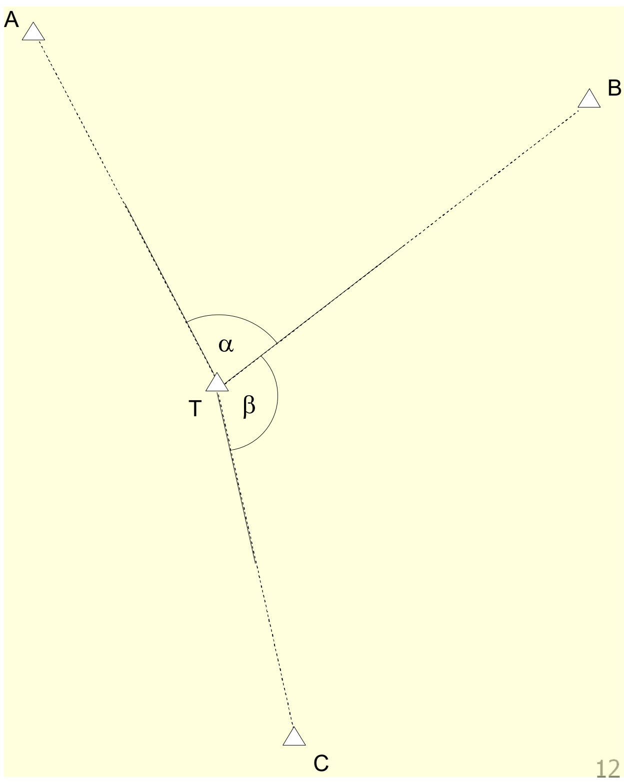
$$e_T''=e_B+\Delta e_B^T \qquad n_T''=n_B+\Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola (koordinati točke T morata biti enaki, če jih računamo s točke A ter s točke B):
- $e_T' = e_T''$ $\qquad$ $n_T' = n_T''$

Notranji urez

- Notranji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih smeri iz nove točke do treh danih točk. Notranja smer je smer iz nove točke na dano točko.

- dano: A (e_A, n_A), B(e_B,n_B), C(e_C,n_C)
- merjeno: α, β
- neznano: T (e_T, n_T)



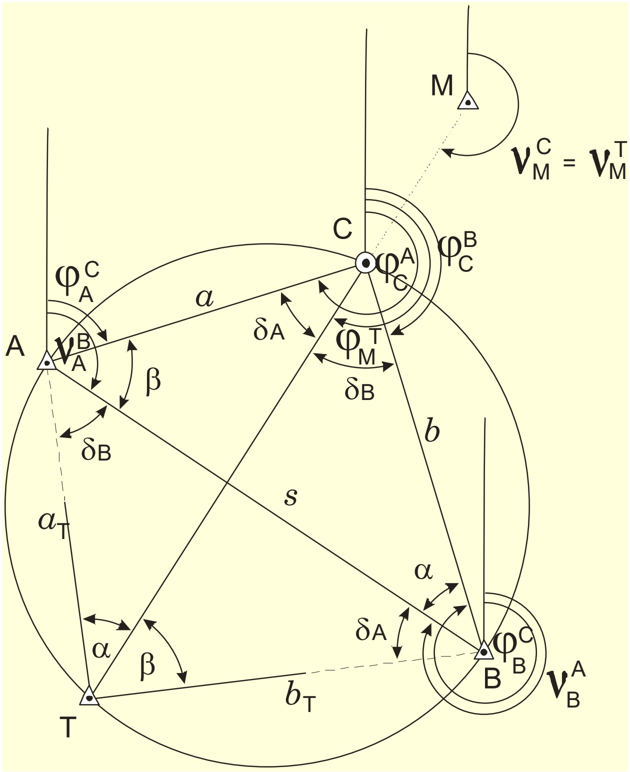
- Obstaja skoraj 100 različnih načinov reševanja notranjega ureza.

- Predstavljena bosta Collinsov in Pothenot (Snelliusov) način.

Notranji urez, rešitev Collinsa

- dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B,X_B), M(Y_M,X_M)
- merjeno: α, β
- neznano: T (Y_T, X_T)

- Skozi točke T, A in B orišemo krog s premerom $m = 2r$.
  Daljica TM seka ta krog v točki C;
  v slavo Collinsa se imenuje Collinsova (pomožna) točka.



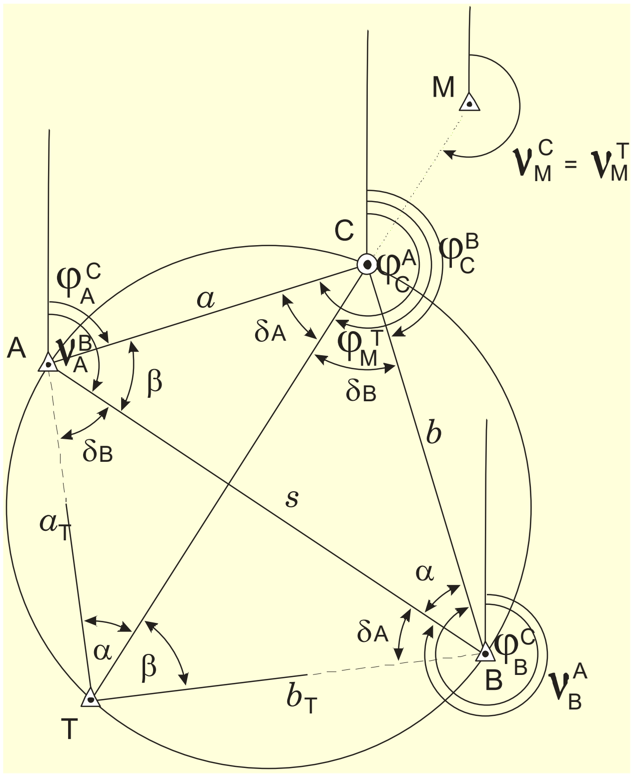
- Izračunamo smerni kot iz A na B:

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B}$$

$$s_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

- Iz smernega kota ν_A^B in kotov α in β izračunamo orientirane smeri s točk A in B na točko C:

- $\varphi_A^C = \nu_A^B - \beta$
- $\varphi_B^C = \nu_B^A + \alpha = \nu_A^B + \alpha + \pi$



- Kontrola:
- $\delta = 180° - (\alpha + \beta) = \varphi_A^C - \varphi_B^C$,
- $\delta = \delta_A + \delta_B$

- Izračun koordinat Collinsove (pomožne) točke $C(y_C,x_C)$ opravimo na osnovi danih koordinat A in B ter orientiranih smeri $\varphi_A{}^C$ in $\varphi_B{}^C$. (Zunanji urez na točko C).

- Prvo izračunamo stranici trikotnika a in b.

$$m = 2 \bullet r = \frac{s}{\sin \delta}$$

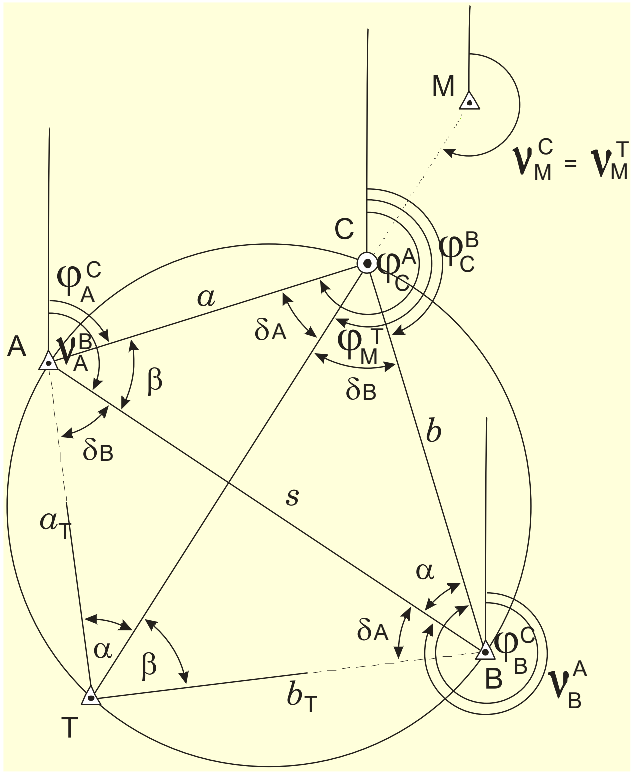
$$a = \overline{AC} = m \sin \alpha \qquad b = \overline{BC} = m \sin \beta$$

$$\Delta y_A^C = a \sin \varphi_A^C \qquad \Delta x_A^C = a \cos \varphi_A^C$$

$$\Delta y_B^C = b \sin \varphi_B^C \qquad \Delta x_B^C = b \cos \varphi_B^C$$

$$y_C = y_A + \Delta y_A^C = y_B + \Delta y_B^C$$

$$x_C = x_A + \Delta x_A^C = x_B + \Delta x_B^C$$



- Sedaj imamo določen položaj točke C. Zanima nas položaj točke T. Prvo izračunamo smerni kot s točke M na novo točko C:

$$\tan \nu_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{\Delta Y_M^C}{\Delta X_M^C}$$

- Z njegovo pomočjo izračunamo lahko orientirane smeri na novo točko T.

$\delta_A = \varphi_C{}^A - \nu_M{}^C$ $\qquad$ $\delta_B = \nu_M{}^C - \varphi_C{}^B$

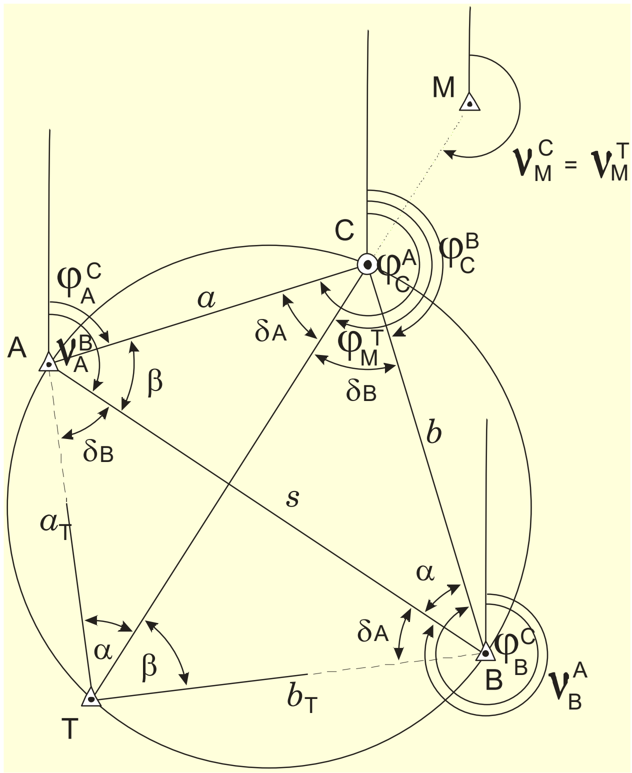
$\varphi_A{}^T = \nu_A{}^B + \delta_A$

$\varphi_B{}^T = \nu_B{}^A - \delta_B$

- Izračunamo potem stranici a_T in b_T:

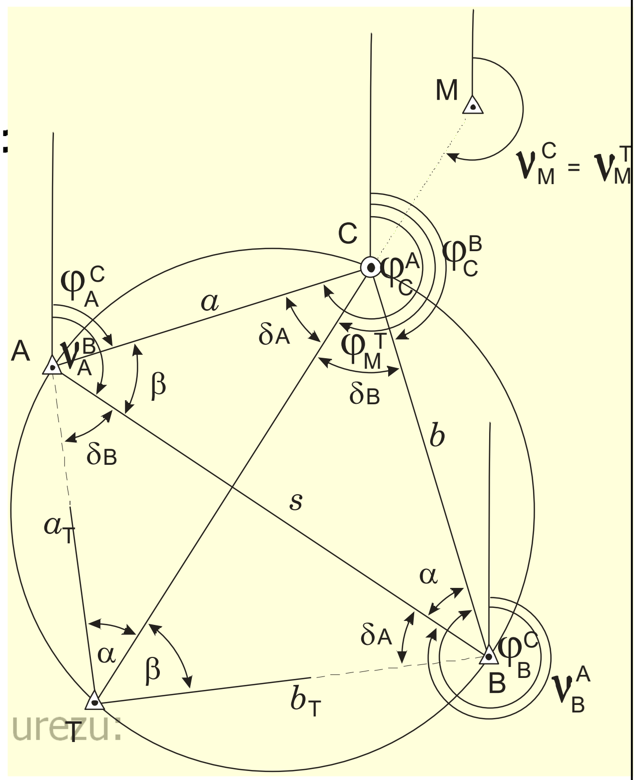
$$a_T = \overline{AT} = m \sin \delta_B$$

$$b_T = \overline{BT} = m \sin \delta_A$$



- S pomočjo stranic in orientiranih smeri na točko T izračunamo koordinatne razlike:

$$\Delta y_A^T = a_T \sin\varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T = a_T \cos\varphi_A^T$$
$$\Delta y_B^T = b_T \sin\varphi_B^T \qquad \Delta x_B^T = b_T \cos\varphi_B^T$$



- Na koncu izračunamo koordinati točke T:

$$Y_T' = A_A + \Delta y_A^T \qquad X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$
$$Y_T'' = Y_B + \Delta y_B^T \qquad X_T'' = X_B + \Delta x_B^T$$

- Zadnja kontrola je enaka kot pri zunanjem urezu:

$$Y_T' = Y_T'' \qquad X_T' = X_T''$$

- Collinsov način je dejansko "dvojni" zunanji urez. Prvo doliočitev točke C, potem določitev točke T.

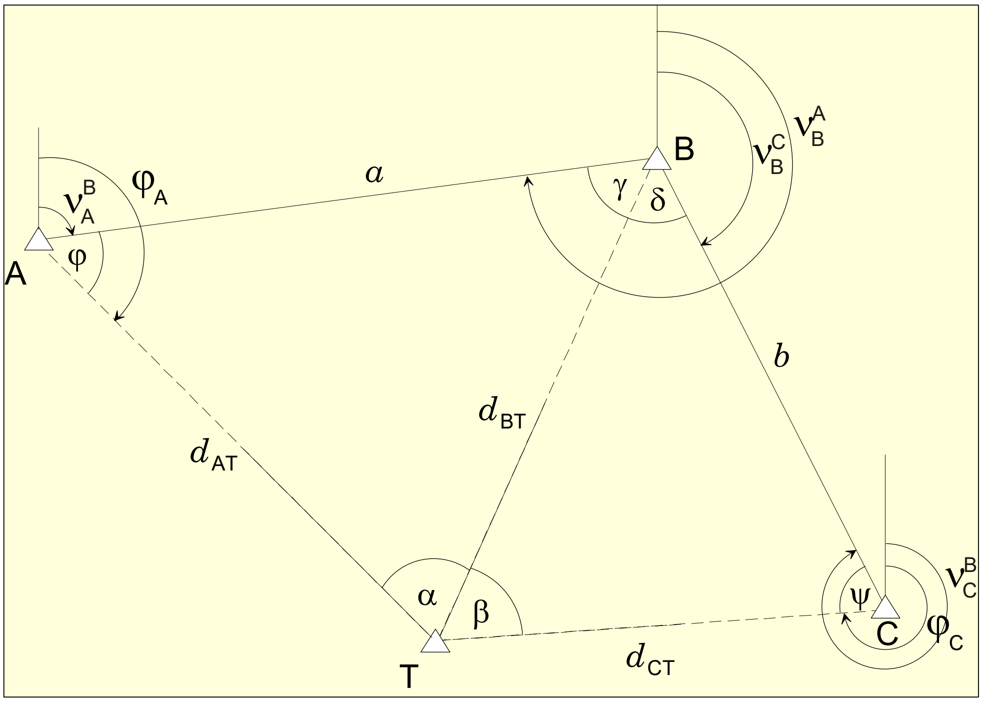
- Rešitve ni, če je tangens smernega kota ν_M^C nič:

$$\tan\nu_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{0}{0}$$

- oz., če točki M in C sovpadata. Potem vse tri dane točke in iskana točka (T) ležijo na istem krogu. Naloga ima neskončno rešitev.

- Opomba: središčna točka M bi naj bila čim bolj oddaljena od kroga skozi točke A, B in T.

Notranji urez, rešitev Pothenot – Snellius



- dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B,X_B), C(Y_C,X_C)
- merjeno: α, β
- neznano: T (Y_T, X_T)

- Iz danih točk A, B in C najprej izračunamo smerne kote in dolžine stranic:

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad \tan \nu_C^B = \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C} = \frac{\Delta Y_C^B}{\Delta X_C^B}$$

$$a = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$
$$b = \sqrt{(Y_B - Y_C)^2 + (X_B - X_C)^2}$$

- Da lahko izračunamo orientirane smeri (smerne kote) iz danih (A in C) na novo točko:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \varphi \qquad \varphi_C = \nu_C^B - \psi$$

  potrebujemo kota φ in ψ!
- Ta dobimo iz četverokotnika ABCT in s pomočjo trigonometričnih zvez:
- Polovična vsota kotov φ in ψ je enaka: $\frac{\varphi + \psi}{2} = 180° - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$
- Polovično razliko pa dobimo prek fiktivnega kota μ:

$$\tan\frac{\varphi - \psi}{2} = \tan\frac{\varphi + \psi}{2}\cot\left(45° + \mu\right)$$

- Izračunamo stranice iz nove do danih točk A in C:

$$d_{AT} = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\left[180° - (\alpha+\varphi)\right] = \frac{a}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\varphi)$$

$$d_{CT} = \frac{b}{\sin\beta}\sin(\beta+\psi)$$

- S pomočjo stranic in orientiranih smeri na točko T izračunamo koordinatne razlike:

$$\Delta y_A^T = d_{AT}\sin\varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T = d_{AT}\cos\varphi_A^T$$

$$\Delta y_C^T = d_{CT}\sin\varphi_C^T \qquad \Delta x_C^T = d_{CT}\cos\varphi_C^T$$

- Na koncu izračunamo koordinati točke T:

$$Y_T\,' = A_A + \Delta y_A^T \qquad X_T\,' = X_A + \Delta x_A^T$$

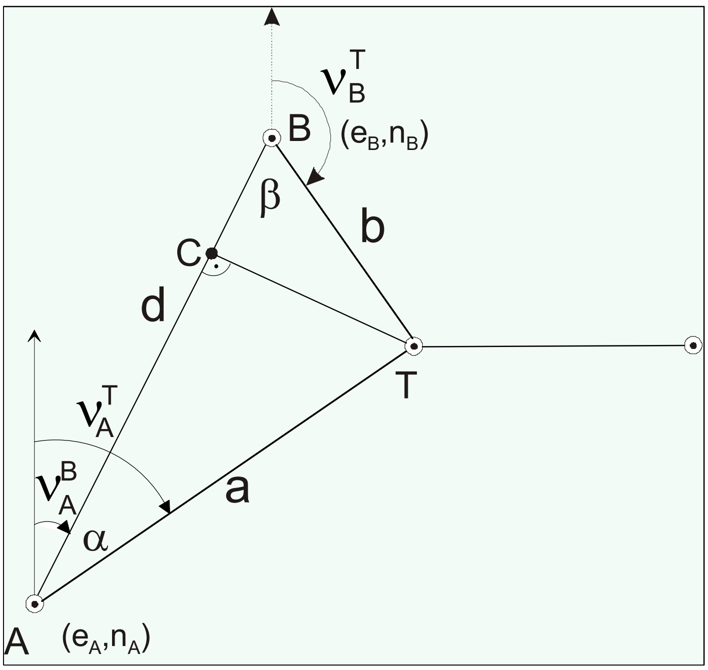
$$Y_T\,'' = Y_C + \Delta y_C^T \qquad X_T\,'' = X_C + \Delta x_C^T$$

Ločni presek

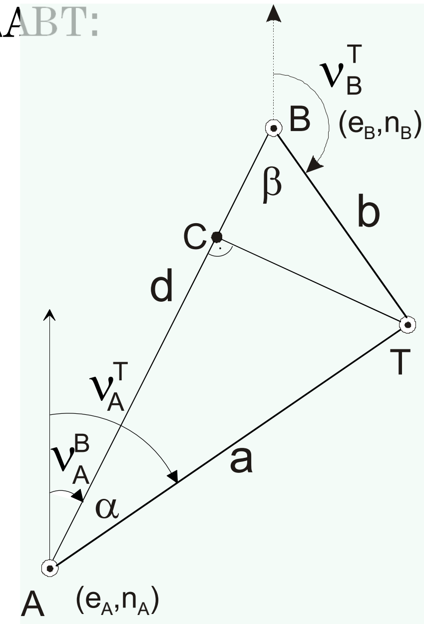
- Ločni presek je postopek za izračun koordinat točke s pomočjo merjenih razdalj od dveh (treh) danih točk do nove točke.

- merjeno: a, b
- dano: A (e_A,n_A), B (e_B, n_B)
- neznano: T (e_T, n_T)

- Ločni presek lahko izračunamo na dva načina.



- 1. način (trigonometrični):
- Iz kosinusovega izreka izračunamo kote v trikotniku ΔABT:



$$a^2 = d^2 + b^2 - 2db\cos\beta$$
$$b^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2da}$$
$$\cos\beta = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2db}$$

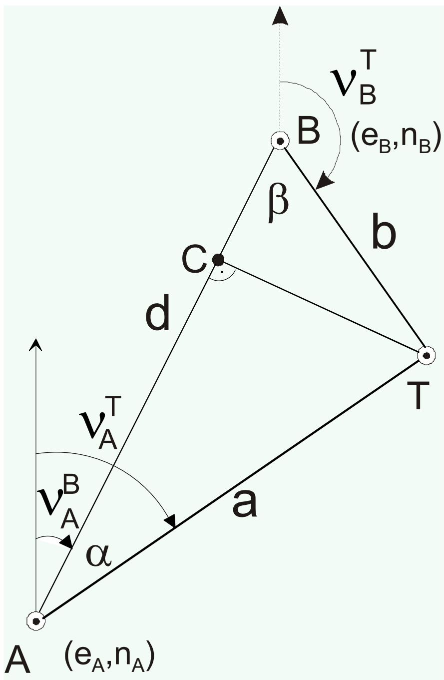
- kontrola je: $d = a\cos\alpha + b\cos\beta$

- Zatem izračunamo smerne kote stranic trikotnika a in b:

$$\nu_A{}^T = \nu_A{}^B + \alpha$$
$$\nu_B{}^T = \nu_B{}^A - \beta$$

- Smerni kot $\nu_A{}^B$ izračunamo iz koordinat danih točk A in B.

- S pomočjo smernih kotov izračunamo koordinatne razlike od A in B do točke T:



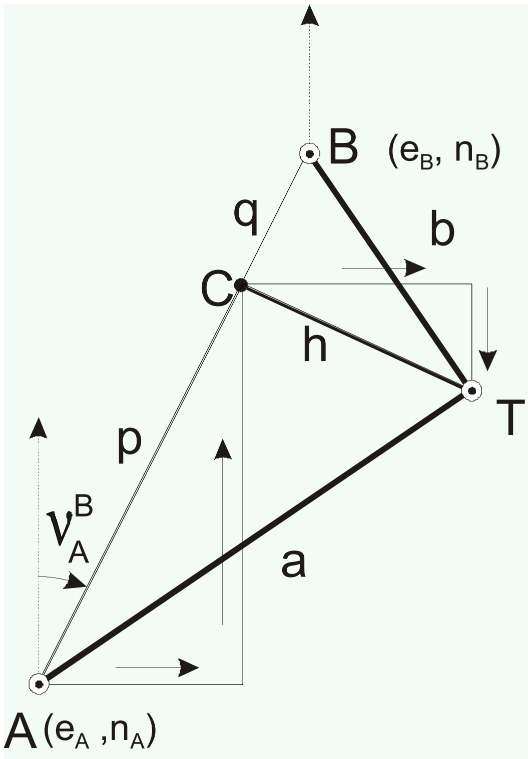
$$\Delta e_A^T = a\sin\nu_A^T \qquad \Delta n_A^T = a\cos\nu_A^T$$
$$\Delta e_B^T = b\sin\nu_B^T \qquad \Delta n_B^T = b\cos\nu_B^T$$

$$e_T{}' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T{}' = n_A + \Delta n_A^T$$
$$e_T{}'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T{}'' = n_B + \Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola:

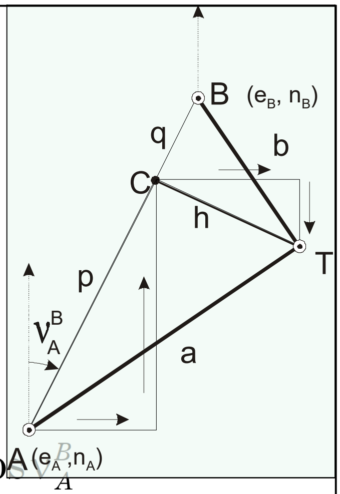
$$e_T{}' = e_T{}'' \qquad n_T{}' = n_T{}''$$

- 2. način (geodetski):
- Način računanja je enak izračunu koordinat linijskih točk. Tukaj računamo delne koordinatne razlike od točk A (B) do točke C (vznožje višine h) ter naprej od točke do nove točke T.
- h je višina v trikotniku ΔABT;
- p, q projekciji stranic a in b na stranico d;
- Zveza med projekcijami ter višino in stranicami:



$$h^2 = b^2 - q^2$$
$$h^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$
$$a^2 - b^2 = (p+q)(p-q) \qquad (p+q) = d$$

$$\frac{a^2 - b^2}{2d} = \frac{p-q}{2}$$
$$\frac{d}{2} = \frac{p+q}{2}$$



- Projekciji p in q lahko izračunamo iz zgornjih zvez:

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$$
$$q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$$

- Če je točka z desne strani daljice AB (velja da je $h \oplus$):

$$e_T' = e_A + p \sin \nu_A^B + h \cos \nu_A^B \qquad e_T' = e_B - q \sin \nu_A^B + h \cos \nu_A^B$$
$$n_T' = n_A + p \cos \nu_A^B - h \sin \nu_A^B \qquad n_T'' = n_B - q \cos \nu_A^B - h \sin \nu_A^B$$

- Če je točka z leve strani daljice AB (velja da je $h \ominus$):

$$e_T' = e_A + p \sin \nu_A^B - h \cos \nu_A^B \qquad e_T' = e_B - q \sin \nu_A^B - h \cos \nu_A^B$$
$$n_T' = n_A + p \cos \nu_A^B + h \sin \nu_A^B \qquad n_T'' = n_B - q \cos \nu_A^B + h \sin \nu_A^B$$

- Zadnja kontrola:

$$e_T{}' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T{}' = n_A + \Delta n_A^T$$
$$e_T{}'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T{}'' = n_B + \Delta n_B^T$$