Numerično reševanje splošnega sf. trikotnika

- Sferni trikotnik je možno rešiti, če so podani trije elementi. Skupaj obstaja 6 tipov nalog:

I. dane so tri stranice,
II. dani so trije koti,
III. dani sta dve stranici in vmesni kot,
IV. dana je ena stranica in oba priležna kota,
V. dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot,
VI. dana sta dva kota in enemu kotu nasproti ležeča stranica.

Reševanje splošnega sf. trikotnika

- V. in VI. tip naloge.
- Dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot (a, b, α) .
  - z danimi podatki lahko obstajata dve rešitvi, ena rešitev ali nobena rešitev.

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$$

- Dana sta dva kota in enemu kota nasprotna stranica (α, β, a)

$$\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

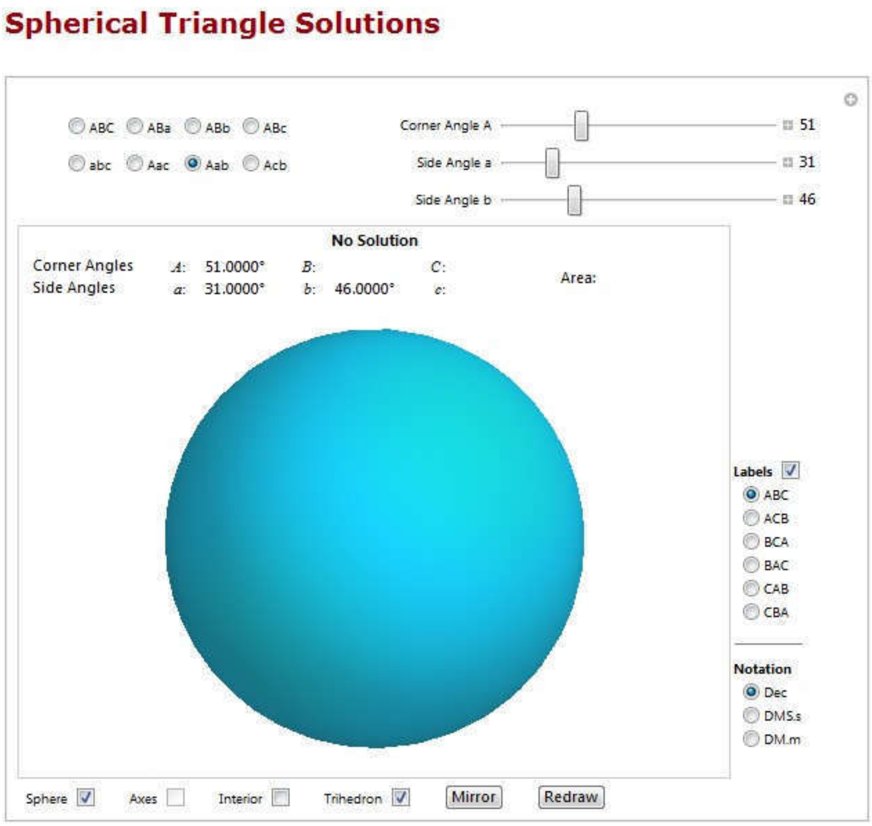
- Dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot: a, b, α.

  Primer 1:

  $a = 31°$, $b = 46°$, $\alpha = 51°$.

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$$

$\sin\beta > 1$!



- Dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot: a, b, α.

  Primer 2: $a = 61°$, $b = 24°$, $\alpha = 40°$.

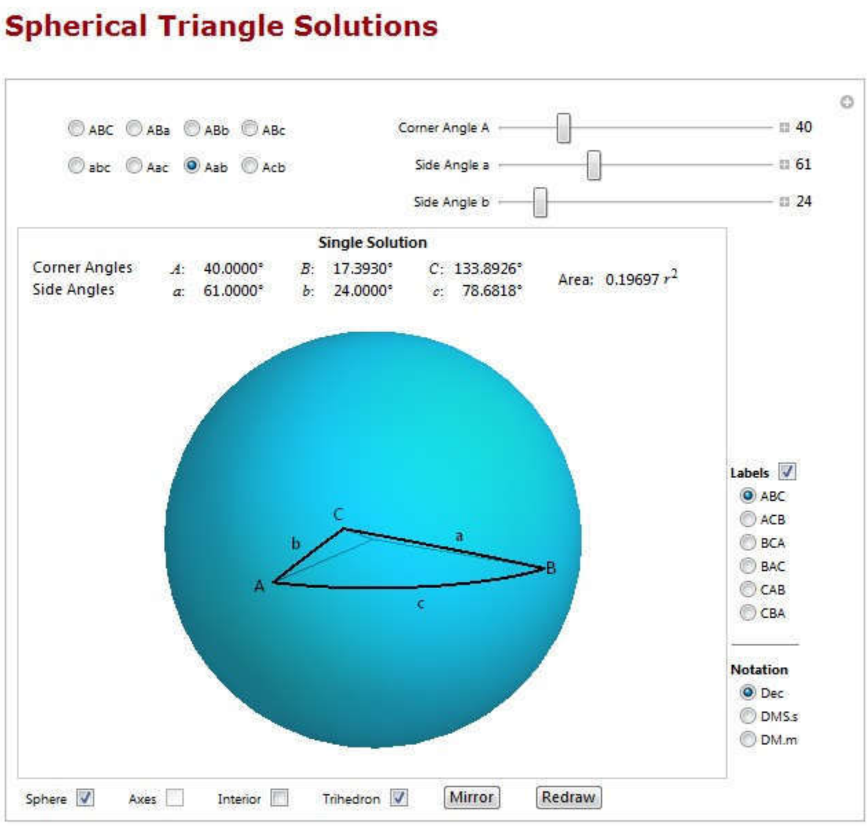
$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$$

$\sin\beta < 1$,

$\beta_1 = 17°$,... ✓

$\cancel{\beta_2 = 163°,...}$

$a > b \Rightarrow \alpha > \beta$



- Dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot: a, b, α.

Primer 3: $a = 33°$, $b = 155°$, $\alpha = 70°$.

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$$

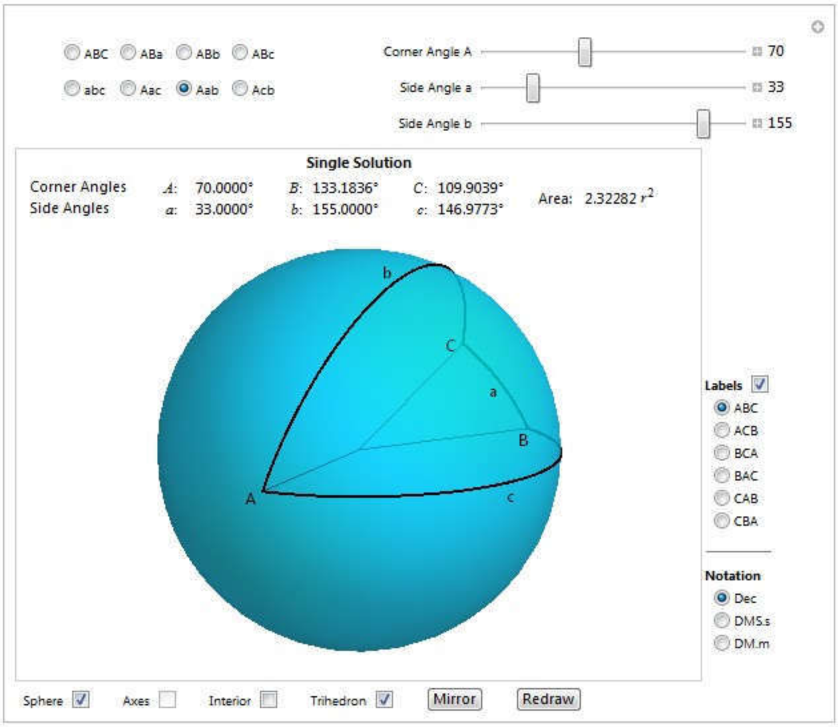
$\sin\beta < 1$,

$\cancel{\beta_1 = 47°,\ldots}$

$\beta_2 = 133°,\ldots$ ✓

$a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

Spherical Triangle Solutions



- Dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot: a, b, α.

Primer 4: $a = 42°$, $b = 69°$, $\alpha = 45°$.

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$$

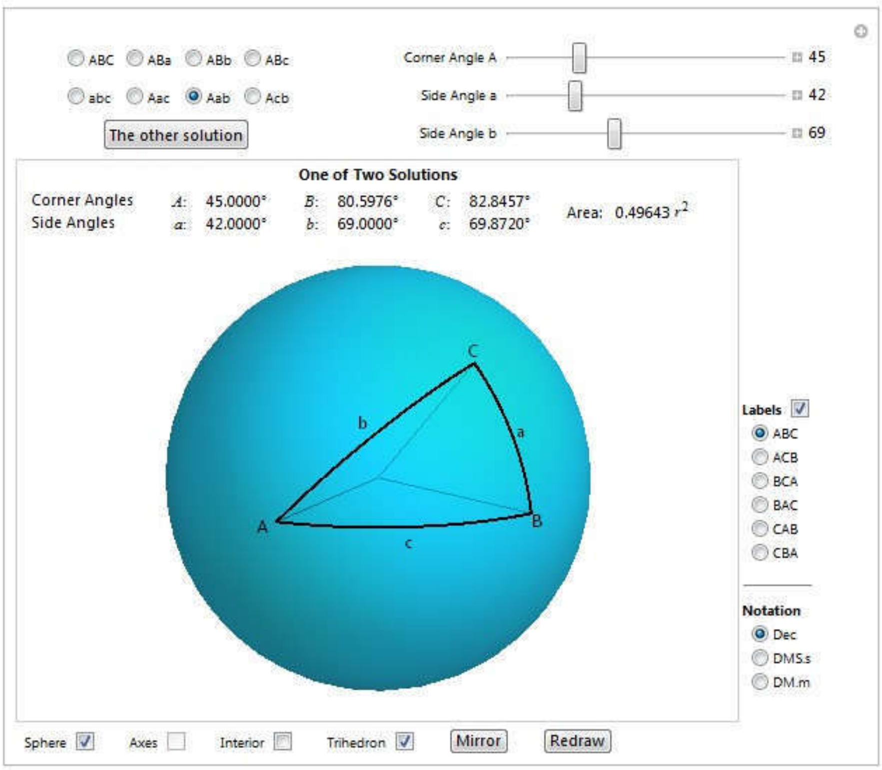
$\sin\beta < 1$,

$\beta_1 = 81°,\ldots$ ✓

$\beta_2 = 99°,\ldots$ ✓

$a < b \Rightarrow \alpha < \beta_1 \quad \alpha < \beta_2$

Spherical Triangle Solutions



- Dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot: a, b, α.

  Primer 5: $a = 31°$, $b = 40°$, $\alpha = 159°$.

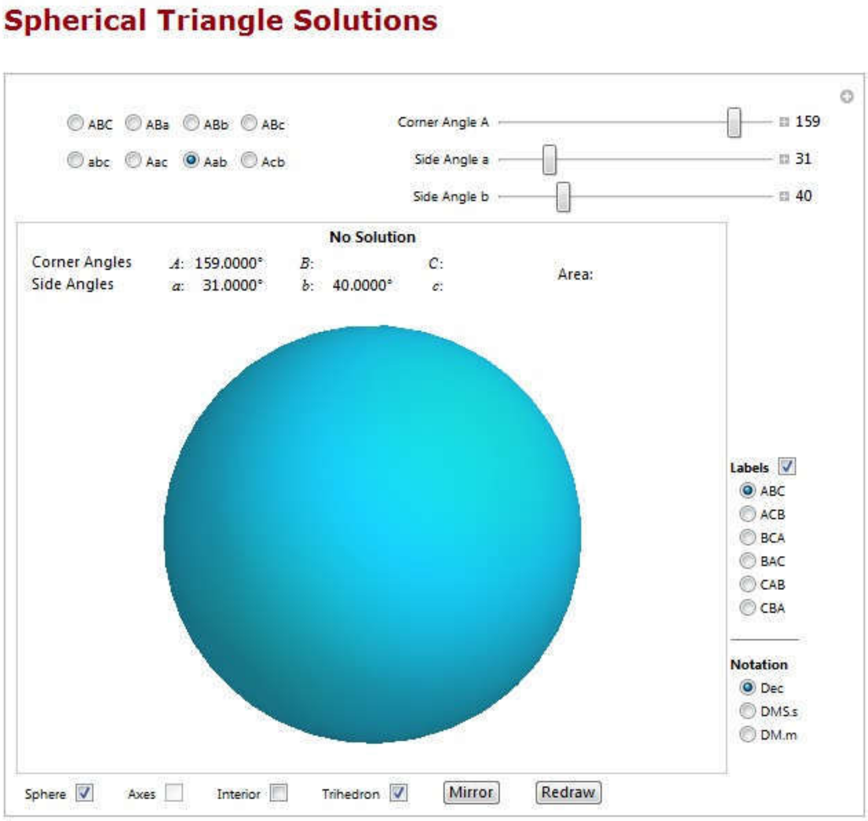
$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$$

$\sin\beta < 1$,

$\cancel{\beta_1 = 27°,\ldots}$

$\cancel{\beta_2 = 153°,\ldots}$

$a < b \Rrightarrow \alpha < \beta_1 \quad \alpha < \beta_2$



L'Huilierjeva enačba

- Simon Lhuilier ali S. L'Huilier (izg. "Lilie") 1750-1840, švicarski matematik. Njegova enačba omogoča izračun sfernega ekscesa ε, če nam niso znani vsi trije koti sfernega trikotnika.

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}$$

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma}$$

- Pravokotni sferni trikotnik ($\gamma = 90°$, a, b kateti):

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}$$

Ploščina sfernega trikotnika

- Ploščina sfernega trikotnika je premosorazmerna velikosti sfernega ekscesa:

$$P = (\alpha + \beta + \gamma - 180°)\frac{\pi R^2}{180°} = \frac{\varepsilon° R^2 \pi}{180°}$$

$$P = \frac{\varepsilon° R^2}{\rho°} = \frac{\varepsilon' R^2}{\rho'} = \frac{\varepsilon'' R^2}{\rho''} = \varepsilon_{rad} R^2$$

$$P_{KR} = 4\pi R^2$$

$$P_{\Delta} = \frac{R^2\pi}{180°}\varepsilon° = \frac{4\pi R^2}{180°.4}\varepsilon° = \frac{P_{KR}}{720°}\varepsilon°$$

Primerjava trigonometrije na krogli z Evklidsko geometrijo

- Kdaj lahko zamenjamo računanje sfernega trikotnika z ravninskim?
- Primer 1:
  - sferni trikotnik s tremi pravi koti ⇒ stranice so tudi enake. Dolge so (kosinusni izrek za kote):

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

$$\cos 90° = -\cos 90°\cos 90° + \sin 90°\sin 90°\cos a$$

$$\cos a = 0 \qquad \Rightarrow \quad a = 90° \text{ ali } \frac{\pi}{2}$$

  na enak način lahko izračunamo tudi stranici b in c, ki sta tudi $\pi/2$.

  - Podoben "enakostranični" trikotnik v ravnini (stranice dolge $\pi/2$) bo imel vse tri kote enake 60°.
  - Zaključek: pri primerjavi kotov je razlika med "geometrijami" velika!

Mali "sferni" trikotniki na površini Zemlje

- Primer 2: primerjajmo ploščini dveh trikotnikov na površini Zemlje:
  - enakostranični sferni trikotnik in enakostranični trikotnik v ravnini s stranicami dolgimi 60 km (le-te ustrezajo kotu 0°,5396).
    Koti sfernega trikotnika so:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos a \cdot \cos a}{\sin a \cdot \sin a} = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\sin^2 a} = 0,499988913264$$

    kot α = 60°,0007334899
  - Ploščina je enaka:

$$P = \frac{R^2\pi}{180°}\varepsilon = \frac{6371^2\pi}{180°} \cdot 0°,0022004696 = 1558,863\,\mathrm{km}^2$$

  - Izračunajmo ploščino trikotnika v ravnini z elementi a = 60 km, α = 60°,0007334899 $\Rightarrow$ P = 1558,857 km^2 .

- Obe ploščini se razlikujeta za 0,0007 % ploščine sfernega trikotnika.

- V geodeziji lahko rešujemo trikotnik v ravnini namesto sfernega. Pogoj za to je, da je sferni eksces ε < 10"!
- To je enako pogoju velikosti stranic a < 60 km oz. pogoju:

$$\frac{a}{R_Z} < \frac{1}{100}$$

- takšne trikotnike imenujemo "mali sferni trikotniki"!

- Legendrovo pravilo iz leta 1787 dokazuje, da lahko sferni trikotnik obravnavamo in rešujemo kot ravninski trikotnik z istimi dolžinami stranic, če kote tega trikotnika zmanjšamo za tretjino sfernega ekscesa.