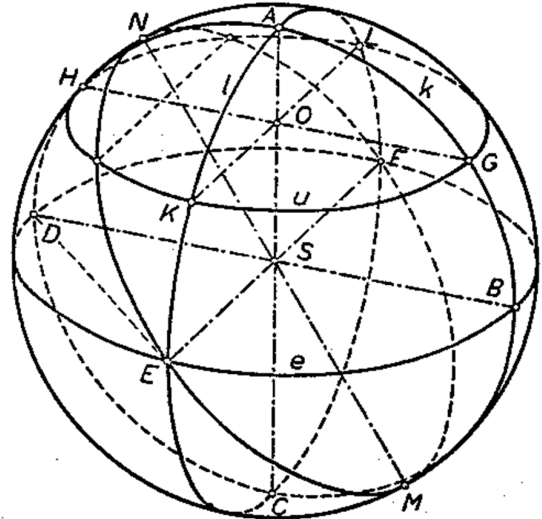


# TRIGONOMETRIJA NA KROGLI

- Sferna trigonometrija se ukvarja z liki na krogli, zlasti z odnosi med elementi v sfernem trikotniku.
- Ime: " σφαιρα " (v grščini krogla)
- Krogla je geometrijsko mesto točk, ki so od stalne točke (središče krogle) oddaljene za stalno razdaljo (polmer krogle).
- Geometrija na krogli ni evklidična.
- Na krogli ni vzporednosti in podobnosti, vsota kotov v trikotniku ni  $180^\circ$ , hipotenuza je lahko krajša od katete...
- Geometrija na krogli je ena od možnih Riemannovih geometrij (Bernhard Riemann, 1826-1866).

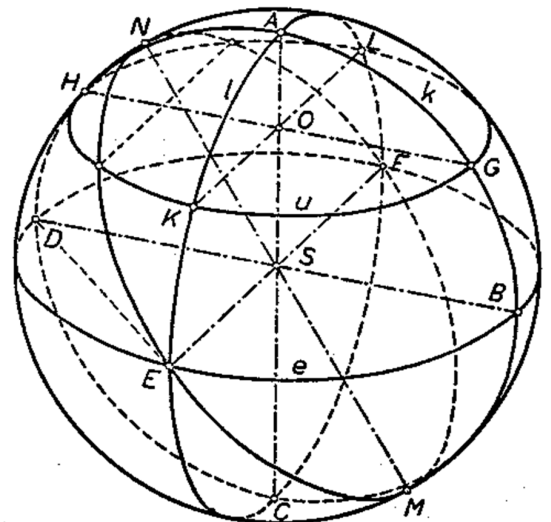


Sl. 1.

1

## GEOMETRIJA NA KROGLI (2)

- Presek ravnine s kroglo je vedno krog.
- Če teče ravnina skozi središče krogle je presek veliki krog, sicer pa mali krog.
- Če premica prebode kroglo je del premice v njej (daljica) tetiva (KL, GH).
- Če poteka ta premica skozi središče krogle, imenujemo tako daljico "premer krogle" – diameter. Dolžina je enaka  $2r$  (EF, MN).
- Za premer krogle je značilno, da sta si točki premera diametralni oz. polarni.
- Skozi dve točki na površju krogle je možno položiti poljubno mnogo ravnin.
- Če točki ne ležita na istem premeru krogle, če nista "protitočki", obstoja natančno ena ravnina, ki teče skozi točki in skozi središče krogle → z dvema točkama na površju krogle (če nista protitočki) je določen en sam veliki krog.



Sl. 1.

2

## GEOMETRIJA NA KROGLI (2)

- "Sferna razdalja" → med dvema točkama na površju krogle je krajši lok velikega kroga skozi ti dve točki.
- Izražamo jo v dolžinskih enotah, če nam je polmer krogle znan, velikokrat pa s središčnim kotom, ki ustreza loku velikega kroga. Tako se izognemo uvedbi polmera v izračun, zato zaključki veljajo za kroglo s poljubnim polmerom.

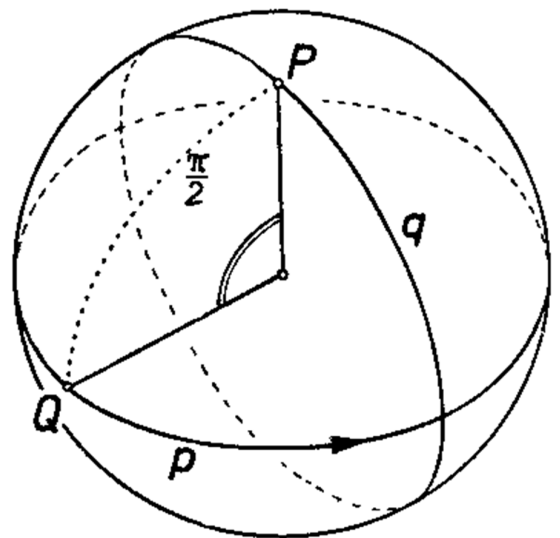
$$l^{\circ} = \frac{R\alpha^{\circ}}{\rho^{\circ}} \quad \text{v stopinjah}$$

$$l' = \frac{R\alpha'}{\rho'} \quad \text{v minutah}$$

$$l'' = \frac{R\alpha''}{\rho''} \quad \text{v sekundah}$$

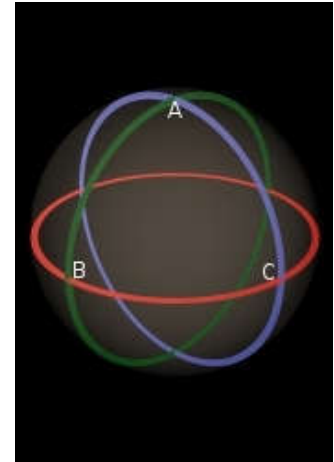
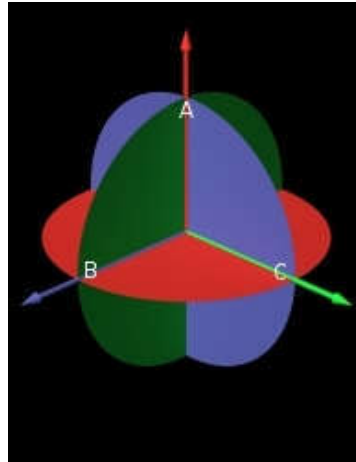
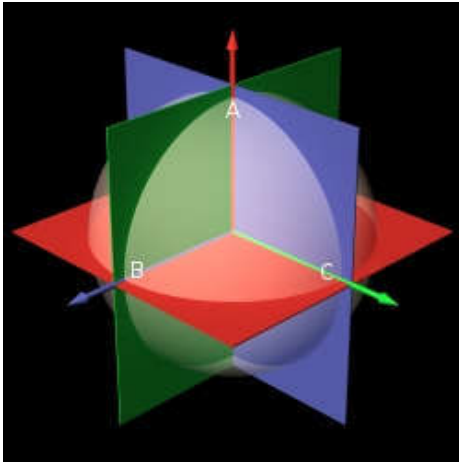
## POL IN POLARA

- Os poljubnega velikega ali malega kroga je tisti premer krogle, ki je pravokoten na ravnino tega kroga. Krajišči premera sta protitočki  $P_1$  in  $P_2$  in se imenujeta "pola".
- Vsakemu krogu ustrezata dva pola, obratno vsakemu polu ustreza en veliki krog.
- Ustrezni veliki krog skozi skozi oba pola imenujemo **polara**.
- Sferna razdalja obeh polov je vedno  $180^{\circ}$ . Sferna razdalja vsakega od obeh polov velikega kroga od poljubne točke na tem krogu je stalna in znaša  $90^{\circ}$ .



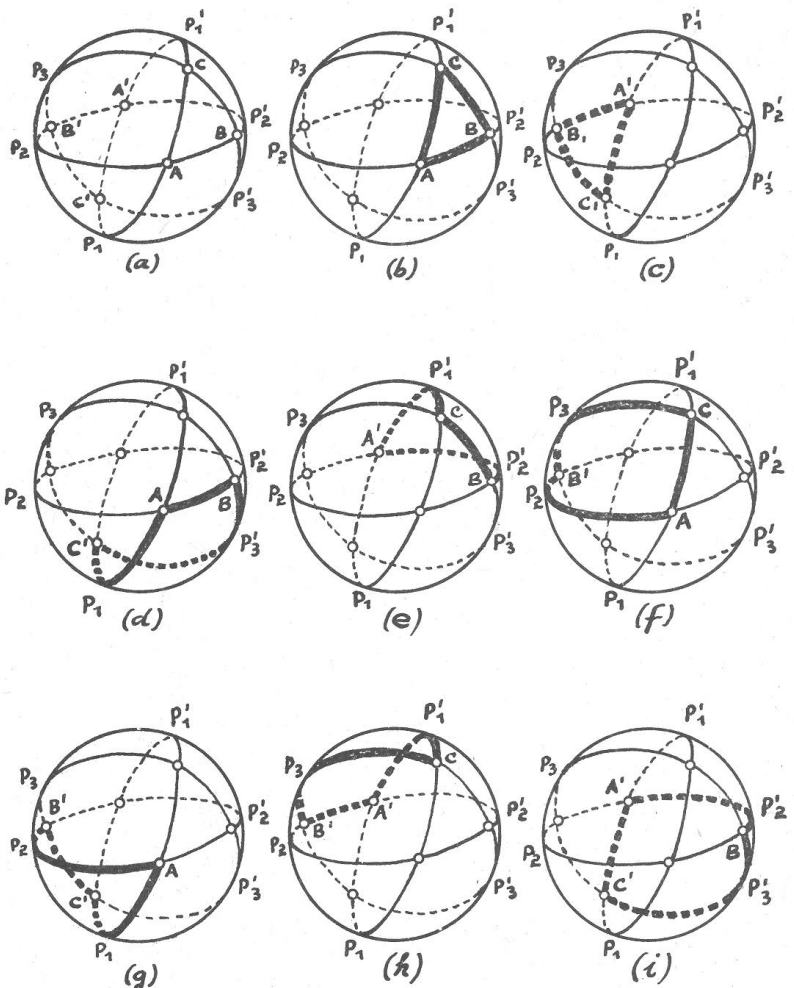
# SFERNI TRIKOTNIK - NASTANEK

- Tri točke na površju krogle (če ne ležijo na istem velikem krogu) določajo tri velike kroge, ki se sekajo.



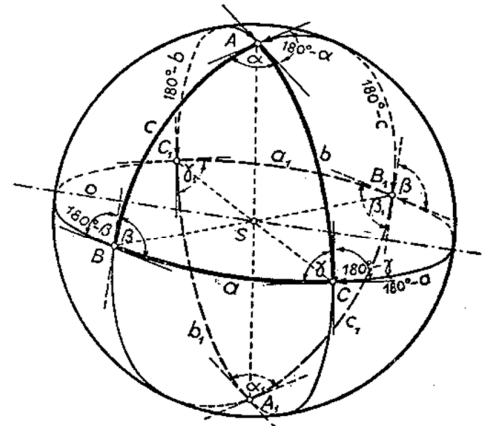
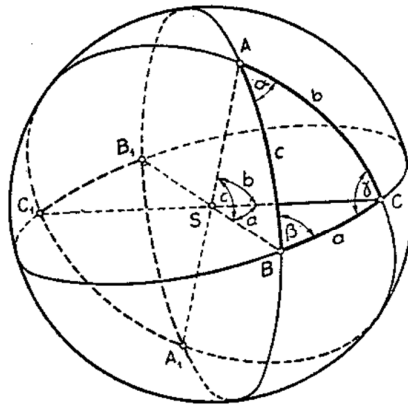
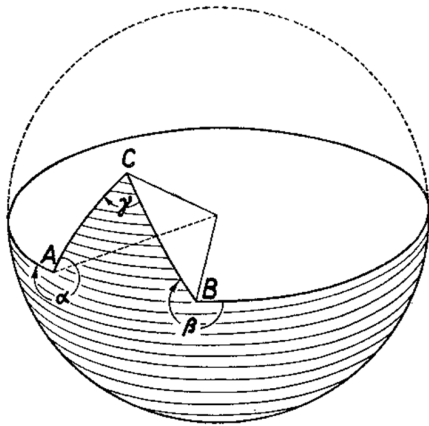
## SFERNI TRIKOTNIK (2)

- Tri točke na površju krogle (če ne ležijo na istem velikem krogu) določajo tri velike kroge, ki se sekajo in tvorijo 8 sfernih trikotnikov.



# SFERNI TRIKOTNIK (3)

- "Eulerjev sferni trikotnik" → koti in stranice manjši od  $180^\circ$ .  
(Leonhard Euler, 1707-1783)



- Sferni trikotnik: 3 stranice in 3 koti.

## LASTNOSTI SFERNEGA TRIKOTNIKA

- $b + c \geq 180^\circ$        $\beta + \gamma \geq 180^\circ$   
 $b + c \leq 180^\circ$        $\beta + \gamma \leq 180^\circ$
- $|a - b| < c < |b + a|$   
 $|b - c| < a < |b + c|$   
 $|c - a| < b < |c + a|$
- $a \geq b$        $\alpha \geq \beta$
- $\alpha + \beta < 180^\circ + \gamma$   
 $\beta + \gamma < 180^\circ + \alpha$   
 $\gamma + \alpha < 180^\circ + \beta$
- $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$   
 $d = 360^\circ - (a + b + c)$       sferni "defekt" ("diferenca").
- $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$   
 $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$       sferni "eksces"

## ZVEZE MED ELEMENTI SF. TRIKOTNIKA

- 6 elementov: 3 stranice in 3 koti.
- Osnovni izreki sferne trigonometrije:
  - kosinusni izrek za stranice,
  - kosinusni izrek za kote,
  - sinusni izrek,
  - sinus-kosinusni izreki,
  - kotangensni izreki,
  - funkcije polovičnih kotov,
  - funkcije polovičnih stranic,
  - Delambreove (Mollweidove, Gaussove) enačbe,
  - Napierjeve enačbe.

## KOSINUSNI IZREK ZA STRANICE

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

- Uporaba:
  - če sta dani dve stranici in kot med njimi,
  - če so dane vse tri stranice in iščemo kote;

## KOSINUSNI IZREK ZA KOTE

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

○ Uporaba:

- če sta dana dva kota in priležna stranica,
- če so dani vsi trije koti;

## SINUSNI IZREK

V Eulerjevih sf. trikotnikih so elementi vedno manjši od  $180^\circ$ ; zato so sinusi vedno pozitivni. Vstavimo pod koren in dobimo sinusni izrek:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 c} = \frac{N^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

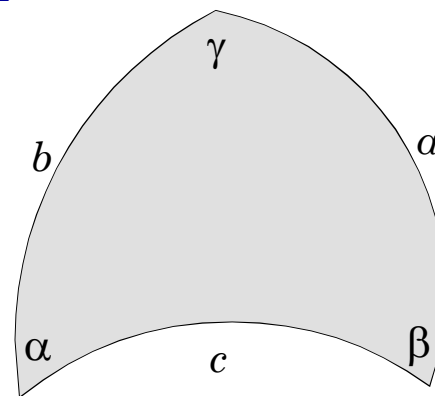
Število:  $K = N \sec a \sec b \sec c$  je za en sferni trikotnik konstantno in se imenuje "konstanta" sfernega trikotnika.

○ Uporaba:

- le izjemoma, saj f-ja *sinus* ne daje enolične rešitve (f-ja *sinus* je v obeh kvadrantih pozitivna).
- če računamo s sinusnim izrekom, preverimo rešitev → nasproti večje stranice leži večji kot in obratno.

## Kotangensni izrek

- Šest elementov sfernega trikotnika lahko napišemo v cikličnem zaporedju  $\alpha\gamma b\alpha c\beta$ . Kotangensni izrek veže štiri elemente v trikotniku: dve stranici, kot, ki ga oklepata in eni stranici nasproti ležeči kot; vsi elementi so v zaporedju, na primer  $\alpha\gamma b\alpha$ , ali  $\beta\alpha\gamma b$ .



- Na primer za kombinacijo  $\beta\alpha\gamma b$  so: notranji kot  $\gamma$ , notranja stranica  $a$ , zunanji kot  $\beta$ , ter zunanja stranica  $b$ . Potem se kotangensni izrek glasi:

- Kotangens zunanje stranice krat sinus notranje stranice je enak: produktu kosinusa notranje stranice in kosinusa notranjega kota plus produktu kotangensa zunanjega kota in sinusa notranjega kota.**

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot \alpha \sin \gamma$$

$$\cot b \sin c = \cos c \cos \alpha + \cot \beta \sin \alpha$$

$$\cot c \sin b = \cos b \cos \alpha + \cot \gamma \sin \alpha$$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos \beta + \cot \alpha \sin \beta$$

$$\rightarrow \cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$$

$$\cot c \sin a = \cos a \cos \beta + \cot \gamma \sin \beta$$

## IZREKI O POLOVICAH KOTOV - "s" IZREKI

- "s"izreki so obrazci, ki dajejo tangens polovičnega kota. Izvedemo jih iz kosinusnega izreka za stranice.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)} \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)} \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)}$$

$$k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Predznak korena je vedno pozitiven, ker so v Eulerjevih sf. trikotnikih stranice vedno manjše od  $180^\circ$ . Prav tako so vrednosti goniometričnih funkcij pod korenem vedno pozitivne glede na lastnost sfernega trikotnika (2. in 5. lastnost).

- Geometrično pomeni količina  $k$  tangens sfernega polmera  $r$ , sfernemu trikotniku včrtanega kroga:  $k = \tan r$ .
- "s" izreke uporabljamo za izračun neznanih kotov če so podane vse tri stranice. Dobimo enolično rešitev, saj so polovični koti vedno v I. kvadrantu.

## IZREKI O POLOVICAH STRANIC -"σ" IZREKI

- "σ" izreki so obrazci, ki dajejo tangens polovične stranice. Izpeljemo jih iz kosinusnega izreka za kote, od koder izrazimo  $\cos$  stranice...

$$\tan \frac{a}{2} = K \cos(\sigma - \alpha) \quad \tan \frac{b}{2} = K \cos(\sigma - \beta) \quad \tan \frac{c}{2} = K \cos(\sigma - \gamma)$$

$$K = \sqrt{\frac{-\cos \sigma}{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}} \quad \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

- Geometrično pomeni količina  $K$  tangens sfernega polmera  $R$  sfernemu trikotniku očrtanega kroga:  $K = \tan R$ .
- Predznak korena je vedno pozitiven, saj so v Eulerjevem sf. trikotniku stranice vedno manjše od  $180^\circ$ . Glede na lastnost sf. trikotnika:  $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$ , je polovična vsota kotov ( $\sigma$ ) vedno v II. ali v III. kvadrantu. Vrednost funkcije *kosinus* je vedno negativna. Razlike  $(\sigma - \alpha)$ ,  $(\sigma - \beta)$  in  $(\sigma - \gamma)$  so vedno v I. ali v IV. kvadrantu. Zato so kosinusi teh razlik tudi vedno pozitivni.
- "σ" izreke uporabljamo za izračun stranic, če so podani vsi trije koti. Dobimo enolično rešitev saj so polovične stranice vedno v I. kvadrantu

## Napierjeve enačbe (analogije) (1)

- V zgodovini se omenjajo kot Napierjeve analogije (sorazmerja). John Napier (1550-1617) škotski matematik, iznajdel logaritme.
- Ta sistem enačb dobimo s kombinacijo Delambrovih enačb in to z deljenjem ustrezne enačbe iz sistema I., II. in III. z enačbo iz sistema IV., V. in VI.

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{a + b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{a - c}{2}}{\cos \frac{a + c}{2}} \cot \frac{\beta}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{a - c}{2}}{\sin \frac{a + c}{2}} \cot \frac{\beta}{2}$$

$$\tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\cos \frac{b - c}{2}}{\cos \frac{b + c}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\sin \frac{b - c}{2}}{\sin \frac{b + c}{2}} \cot \frac{\alpha}{2}$$



## Napierjeve enačbe (analogije) (2)

$$\tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2}$$

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} \tan \frac{c}{2}$$

$$\tan \frac{a-c}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha+\gamma}{2}} \tan \frac{b}{2}$$

$$\tan \frac{a+c}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha+\gamma}{2}} \tan \frac{b}{2}$$

$$\tan \frac{b-c}{2} = \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}} \tan \frac{a}{2}$$

$$\tan \frac{b+c}{2} = \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}} \tan \frac{a}{2}$$

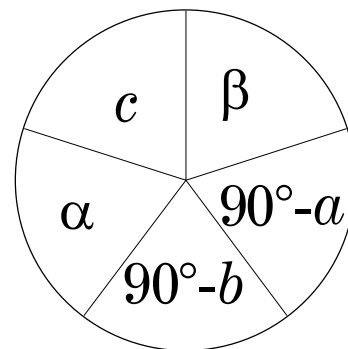
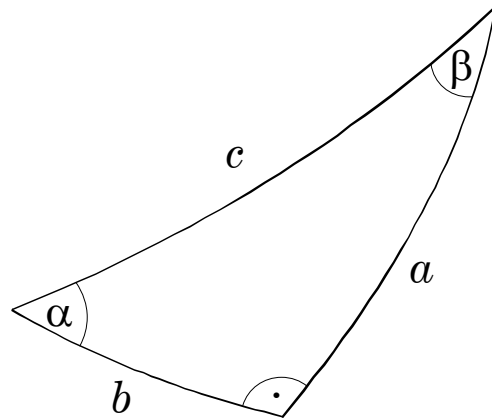
- Funkcija tangens je zelo občutljiva in enačba daje enolično rešitev.
- Za zgornji sistem enačb velja, če je:  $a > b \Rightarrow \alpha > \beta$ . V primeru, da je  $a < b$  ter  $\alpha < \beta$  enačbe dobijo obliko:  $b-a$  in  $\beta-\alpha$ .

## Numerično reševanje splošnega sf. trikotnika

- Sferni trikotnik je možno rešiti, če so podani trije elementi. Skupaj obstaja 6 tipov nalog:
  - I. dane so tri stranice,
  - II. dani so trije koti,
  - III. dani sta dve stranici in vmesni kot,
  - IV. dana je ena stranica in oba priležna kota,
  - V. dani sta dve stranici in eni stranici nasproti ležeči kot,
  - VI. dana sta dva kota in enemu kotu nasproti ležeča stranica.

## Pravokotni sf. trikotnik (1)

- Pravokotni sferni trikotnik je tisti trikotnik, ki ima en kot ( $\gamma$ ) enak  $90^\circ$ . Njegovi elementi so:  $a$ ,  $b$  kateti,  $c$  hipotenuza,  $\gamma = 90^\circ$  pravi kot.
- Označimo elemente pravokotnega sf. trikotnika na obodu poljubnega kroga v istem smislu kot si sledijo v trikotniku. Pri tem izpustimo pravi kot  $\gamma$ , in postavimo na ustrezni mesti namesto katet njihove komplemente. Vsega skupaj imamo 5 elementov, izmed katerih ima vsak dva sosednja in dva nasprotna elementa.



## Pravokotni sf. trikotnik (2)

- J. Napier je združil vseh deset obrazcev za pravokotni sferni trikotnik v enem pravilu, (Napierjevo pravilo):
- "Kosinus vsakega elementa je enak produktu sinusov nasprotnih elementov, ali pa produktu kotangensov sosednjih elementov."

$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta$$

$$\cos c = \sin(90^\circ - a) \sin(90^\circ - b) = \cos a \cos b$$

$$\cos \beta = \cot c \cot(90^\circ - a) = \cot c \tan a$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \sin(90^\circ - b) = \sin \alpha \cos b$$

$$\cos(90^\circ - a) = \sin a = \cot \beta \cot(90^\circ - b) = \cot \beta \tan b$$

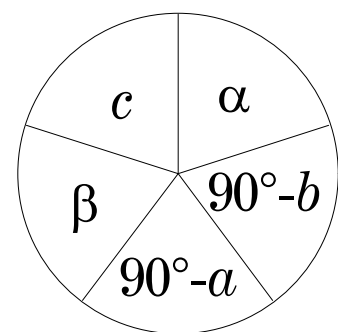
$$\cos(90^\circ - a) = \sin a = \sin c \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ - b) = \sin b = \cot(90^\circ - a) \cot \alpha = \tan a \cot \alpha$$

$$\cos(90^\circ - b) = \sin b = \sin \beta \sin c$$

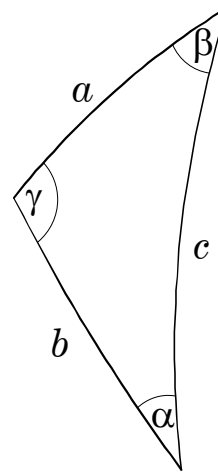
$$\cos \alpha = \cot(90^\circ - b) \cot c = \tan b \cot c$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - a) \sin \beta = \cos a \sin \beta$$

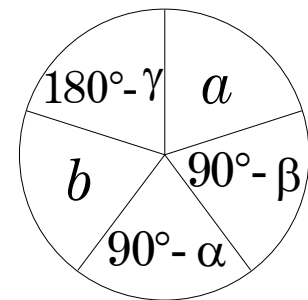


## Pravostranični (kvadrantni) sf. trikotnik (1)

- Pravostranični sferni trikotnik je tisti, ki ima eno stranico ( $c$ ) enako  $90^\circ$ . Njegovi elementi so:  $a, b$  nekvadrantni stranici in koti  $\alpha, \beta$  in  $\gamma$ .



- Označimo elemente kvadrantnega sf. trikotnika na obodu poljubnega kroga v istem smislu kot si sledijo v trikotniku. Pri tem izpustimo kvadrantno stranico  $c$ , zamenjamo kot, ki je nasproti kvadrantne stranice z njegovim suplementom ( $180^\circ - \gamma$ ) in namesto ostalih dveh kotov pišemo njihove komplemente:  $(90^\circ - \alpha)$ ,  $(90^\circ - \beta)$ . Vsega skupaj imamo 5 elementov, izmed katerih ima vsak dva sosednja in dva nasprotna elementa.



## Pravostranični (kvadrantni) sf. trikotnik (2)

- Napierjevo pravilo za kvadrantni sf. trikotnik je enako in se glasi:
- "Kosinus vsakega elementa je enak produktu sinusov nasprotnih elementov, ali pa produktu kotangensov sosednjih elementov."

$$\cos(180^\circ - \gamma) = \cot b \cot a$$

$$\cos(180^\circ - \gamma) = \sin(90^\circ - \alpha) \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\cos b = \cot(180^\circ - \gamma) \cot(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos b = \sin a \sin(90^\circ - \beta)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cot b \cot(90^\circ - \beta)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(180^\circ - \gamma) \sin a$$

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cot(90^\circ - \alpha) \cot a$$

$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin b \sin(180^\circ - \gamma)$$

$$\cos a = \cot(180^\circ - \gamma) \cot(90^\circ - \beta)$$

$$\cos a = \sin b \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \gamma = -\cot b \cot a$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos b = -\cot \gamma \tan \alpha$$

$$\cos b = \sin a \cos \beta$$

$$\sin \alpha = \cot b \tan \beta$$

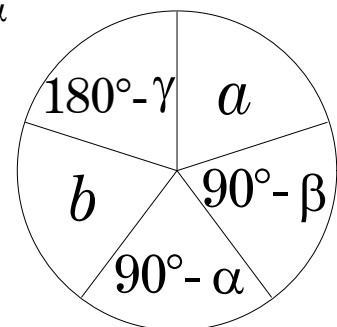
$$\sin \alpha = \sin \gamma \sin a$$

$$\sin \beta = \tan \alpha \cot a$$

$$\sin \beta = \sin b \sin \gamma$$

$$\cos a = -\cot \gamma \tan \beta$$

$$\cos a = \sin b \cos \alpha$$



# Uporaba sf. trigonometrije v geodeziji

- Zemlja – krogla
- Geografske koordinate na Zemlji-krogli:
  - Lok na vzporedniku in lok na meridianu.
  - Ortodroma in loksodroma.
  - Prva in druga geodetska naloga.
  - Izračun sferne razdalje dveh točk na Zemlji – krogli.
  - Sferna razdalja dveh točk na istem vzporedniku.

