

Prehod iz merskega v koordinatni prostor

- Prehod iz merskega v koordinatni prostor \Rightarrow izračun koordinat geodetskih točk.
- Merski prostor
 - Direktno koordinat nikoli ne merimo! Izpeljemo jih indirektno iz meritev (opazovanj)!
 - Meritve so informacija relativnega položaja več točk (najmanj dveh).

- Primer:

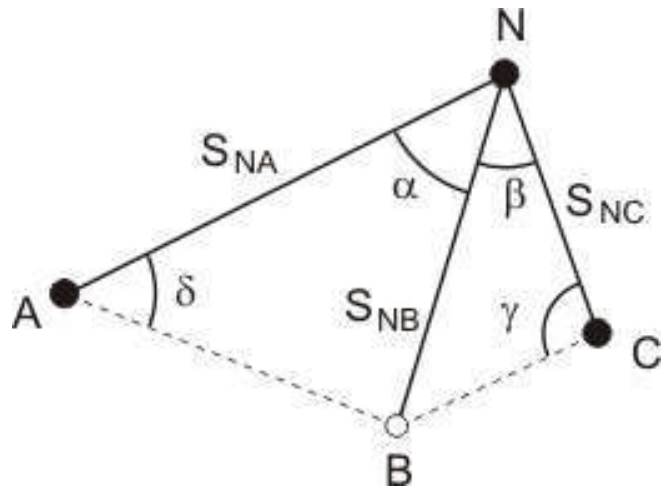
7 opazovanj:

$S_{NA}, S_{NB}, S_{NC}, \alpha, \beta, \gamma, \delta$

Za določitev lika ABCN

zadošča 5 opazovanj!

Dve opazovanji sta nadštevilni!

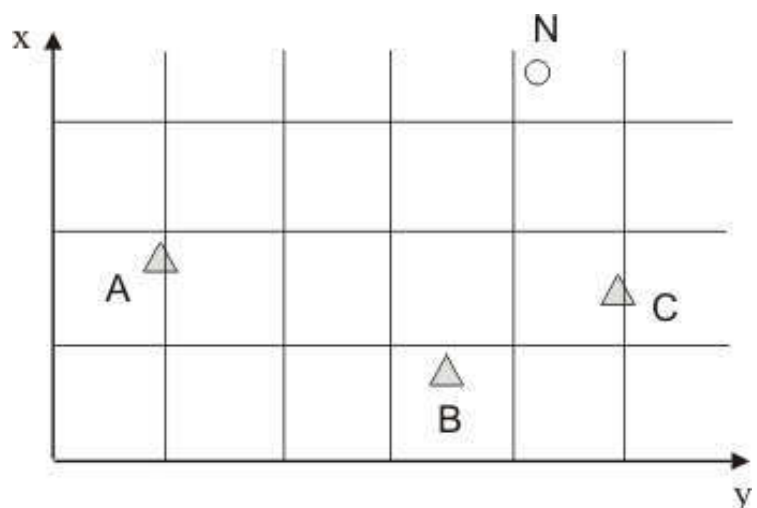


Koordinatni prostor

- Iskane količine so koordinate geodetskih točk!

Koordinate

- Položaji danih točk (A, B, C) so znani (od prej)!
- Iščemo (določamo) koordinate **nove točke** (N)!

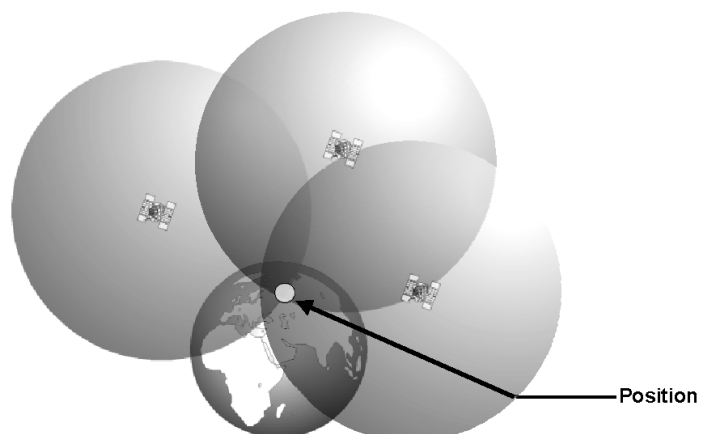


Določanje položaja točk (positioning)

- Različni načini določitve položaja:
 - absolutno določanje položaja;
 - relativno določanje položaja;
 - 3D, 2D, 1D določanje položaja.
- Absolutno določanje položaja:
 - dane koordinate ekstraterestričnih objektov (zvezde, umetni Zemljini sateliti);
 - opravljene meritve do teh objektov (smeri, razdalje);
 - iščemo koordinate opazovališča;
 - potrebujemo 3 vrste koordinatnih sistemov:
 - terestrični (iskane geod. točke);
 - nebesni (zvezde);
 - orbitalni (um. Zemljini sateliti).

Absolutno določanje položaja

- Astronomska opazovanja nam podajo astronomske geografske koordinate (Φ, Λ).
 - Potrebujemo opazovanja do vsaj ene zvezde (ali Sonca). Moramo imeti dostop do točnega časa. Zvezde obravnavamo kot dane točke.
- Opazovanja do um. zemljinih satelitov nam podajo geodetske (elipsoidne koordinate (ϕ, λ, h)).
 - potrebujemo opazovanja do vsaj štirih satelitov (3 za položaj, enega za odpravo pogoška ure v sprejemniku).
 - Tirnice satelita so znane.



Relativno določanje položaja

- Relativno določanje položaja pomeni določitev položaja ene točke glede na drugo. Lahko uporabimo:
 - neposredna opazovanja med točkami;
 - posredna opazovanja s točk do ekstraterestričnih objektov;
- Vrsta opazovanj in vrsta iskanih koordinat določajo matematični model določitve položaja (3D, 2D ali 1D).

- Pri nalogah relativnega določanja položaja se srečamo z dvema posebnima nalogama:
 - določitev položaja druge točke glede na prvo, na osnovi znanih smeri in razdalje (1. geodetska naloga - "direct solution");
 - določitev smeri in razdalje med točkama, če so znane koordinate obeh točk (2. geodetska naloga – "inverse solution").

Določanje položaja točk v ravnini

- Načini določitve:
 - polarna izmera (polarni priklep),
 - zunanji urez (angl. "intersection"),
 - notranji urez (angl. "resection"),
 - ločni presek (angl. "lateration")
 - prosto stojišče (angl. "free stationing"),
 - poligon – poligonski vlak (angl. "traverse").

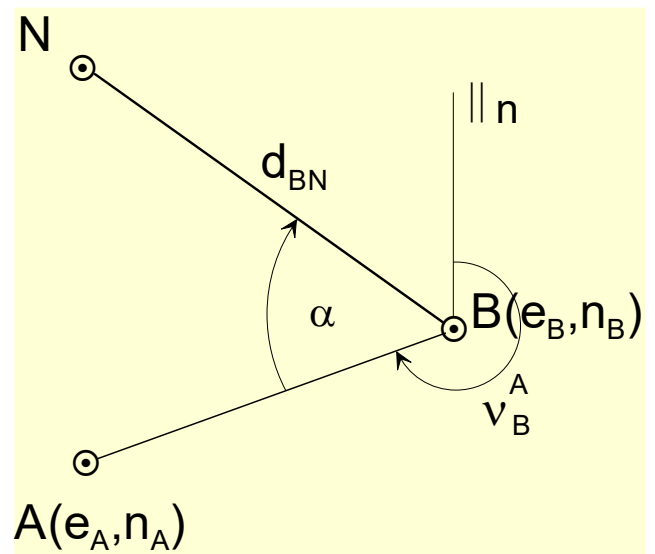
- Dane količine:
 - koordinate danih točk.
- Opazovane količine:
 - smeri (koti) in razdalje.

- Dane točke: točke z znanimi koordinatami!
- Nove točke: točke, katerih koordinate računamo.

Polarna izmera

○ Določitev koordinat nove točke s polarno izmero uporabljamo pri detajlni topografski izmeri. Z dane točke opazujemo drugo dano točko (orientacija), ter izmerimo smer in dolžino do nove točke:

- dano: $A(e_A, n_A), B(e_B, n_B)$
- merjeno: α
- neznano: $N(e_N, n_N)$



○ Postopek:

1. Izračunamo smerni kot iz B na A;
2. izračunamo "orientirano smer" (smerni kot) iz B na N:

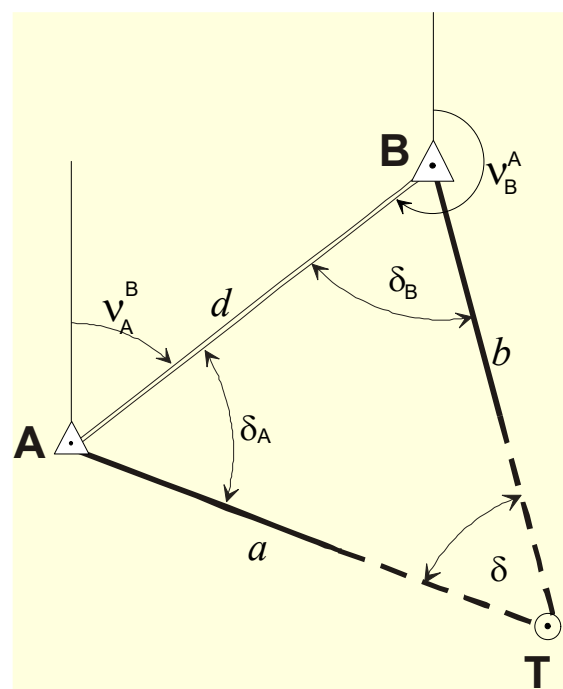
$$v_A^N = v_B^A + \alpha$$

3. izračunamo koord. razlike od B do N;
4. Izračunamo koordinate točke N.

Zunanji urez

○ Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznanne točke na osnovi opazovanih zunanjih smeri iz dveh danih točk. **Zunanja smer** je smer z dane točke na novo točko.

- dano: $A(e_A, n_A), B(e_B, n_B)$
- merjeno: δ_A, δ_B
- neznano: $T(e_T, n_T)$



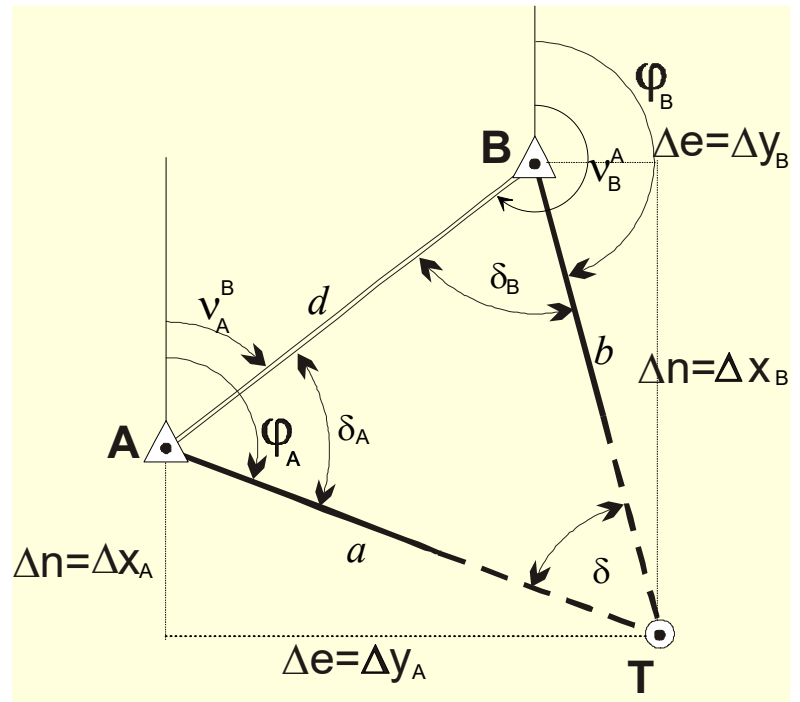
Zunanji urez

- φ_A in φ_B sta orientirani smeri.
- **Orientirana smer** je kot, ki ga oklepa neka smer z vzoprednico z osjo n.

- Orientirane smeri izračunamo:

$$\varphi_A = v_A^B + \delta_A$$

$$\varphi_B = v_B^A - \delta_B$$



- oz. kot δ v oglišču T izračunamo kot:

$$\delta_A = \varphi_A - v_A^B$$

$$\delta_B = v_B^A - \varphi_B = (v_A^B \pm 180^\circ) - \varphi_B$$

$$\delta = \varphi_B - \varphi_A$$

- Računska kontrola je: $\delta_A + \delta_B + \delta = 180^\circ$.
- Da bi izračunali koordinate točke T prvo izračunamo koordinatne razlike med točkami A oz. B in T. Za ta izračun potrebujemo stranice trikotnika a in b .

- iz sinusovega izreka izračunamo stranice trikotnika a in b .

$$\frac{d}{\sin \delta} = \frac{b}{\sin \delta_A}$$

$$\frac{d}{\sin \delta} = \frac{a}{\sin \delta_B}$$

$$b = \frac{d}{\sin \delta} \sin \delta_A$$

$$a = \frac{d}{\sin \delta} \sin \delta_B$$

- Izračun koordinatnih razlik:

$$\Delta e_A = \Delta y_A = a \sin \varphi_A$$

$$\Delta e_B = \Delta y_B = b \sin \varphi_B$$

$$\Delta n_A = \Delta x_A = a \cos \varphi_A$$

$$\Delta n_B = \Delta x_B = b \cos \varphi_B$$

- Koordinate točke T so:

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T$$

$$n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T$$

$$n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

- zadnja kontrola (koordinati točke T morata biti enaki, če jih računamo s točke A ter s točke B):

$$e_T' = e_T'' \quad n_T' = n_T''$$

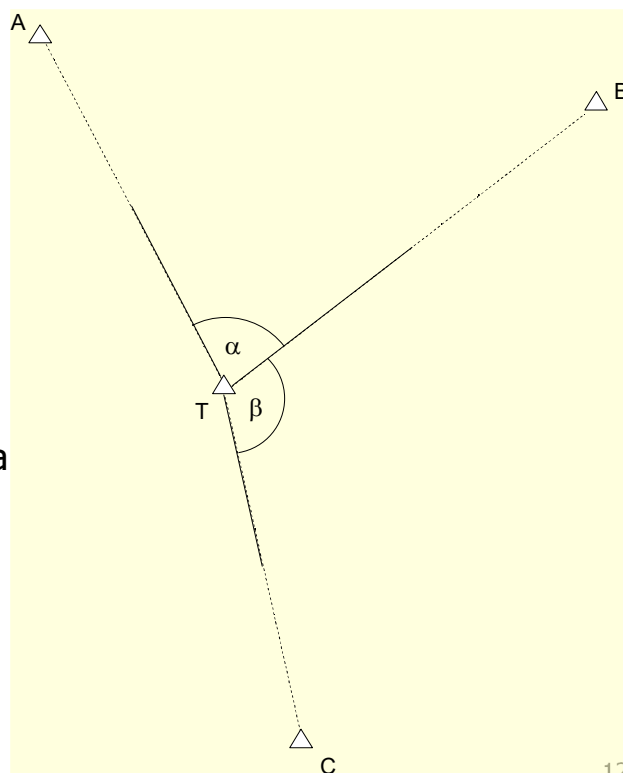
Notranji urez

- Notranji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih smeri iz nove točke do treh danih točk. **Notranja smer** je smer iz nove točke na dano točko.

- dano: $A(e_A, n_A), B(e_B, n_B), C(e_C, n_C)$
- merjeno: α, β
- neznano: $T(e_T, n_T)$

- Obstaja skoraj 100 različnih načinov reševanja notranjega ureza.

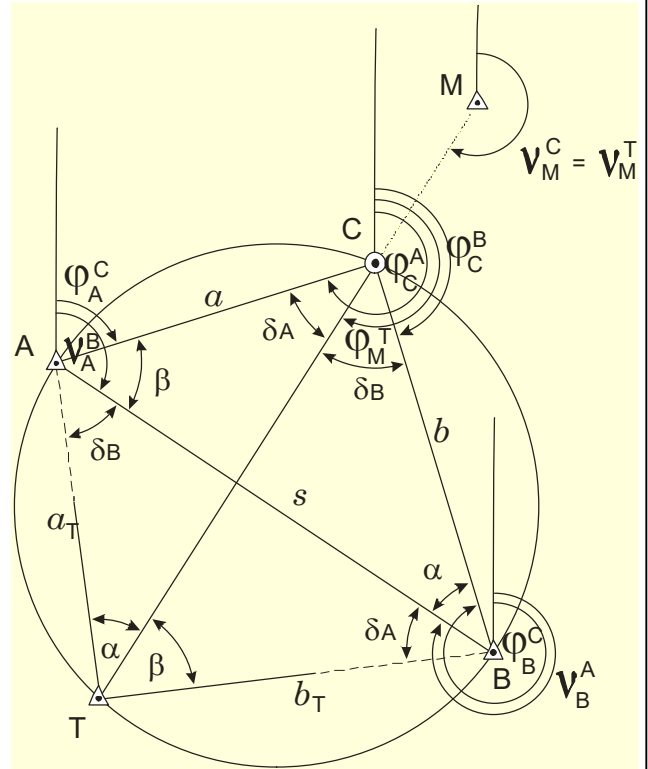
- Predstavljena bosta **Collinson** in **Pothenot (Snelliusov)** način.



Notranji urez, rešitev Collinsa

- o dano: $A(Y_A, X_A), B(Y_B, X_B), M(Y_M, X_M)$
- o merjeno: α, β
- o neznano: $T(Y_T, X_T)$

- o Skozi točke T, A in B orišemo krog s premerom $m = 2r$.
Daljica TM seka ta krog v točki C ; v slavo Collinsa se imenuje Collinsova (pomožna) točka.



- o Izračunamo smerni kot iz A na B:

$$\tan v_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B}$$

$$s_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

- o Iz smernega kota v_A^B in kotov α in β izračunamo orientirane smeri s točk A in B na točko C:

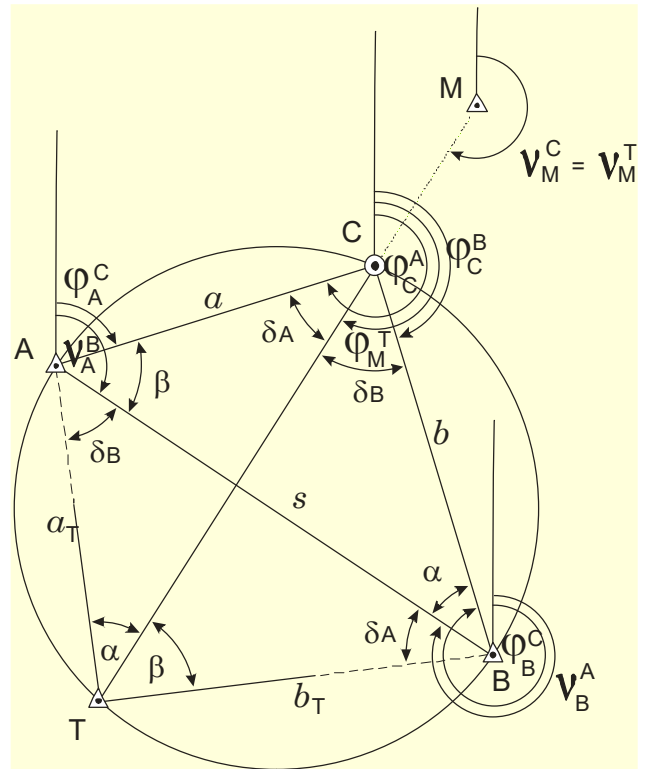
- o $\varphi_A^C = v_A^B - \beta$

- o $\varphi_B^C = v_B^A + \alpha = v_A^B + \alpha + \pi$

- o Kontrola:

- o $\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \varphi_A^C - \varphi_B^C,$

- o $\delta = \delta_A + \delta_B$



- Izračun koordinat Collinsove (pomožne) točke $C(y_C, x_C)$ opravimo na osnovi danih koordinat A in B ter orientiranih smeri φ_A^C in φ_B^C . (Zunanji urez na točko C).

- Prvo izračunamo stranici trikotnika a in b .

$$m = 2 \cdot r = \frac{s}{\sin \delta}$$

$$a = \overline{AC} = m \sin \alpha \quad b = \overline{BC} = m \sin \beta$$

$$\Delta y_A^C = a \sin \varphi_A^C$$

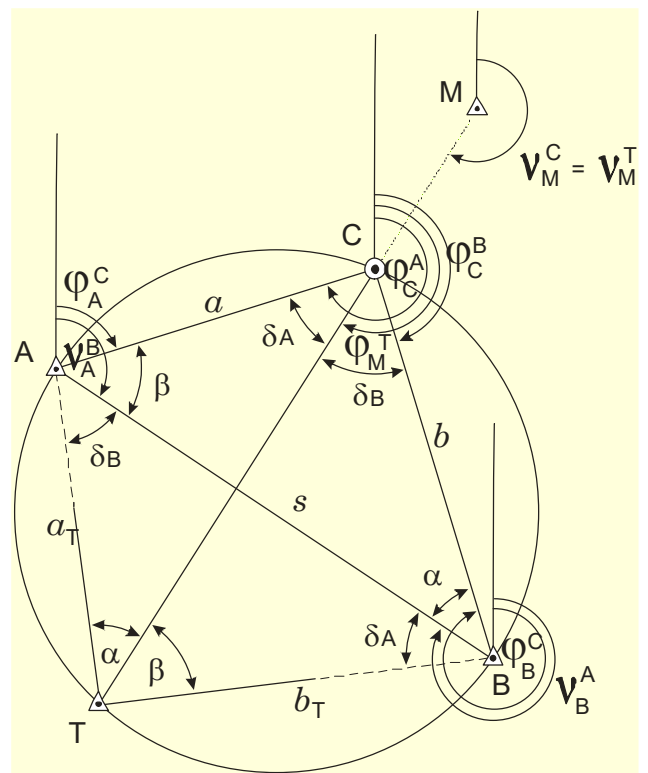
$$\Delta x_A^C = a \cos \varphi_A^C$$

$$\Delta y_B^C = b \sin \varphi_B^C$$

$$\Delta x_B^C = b \cos \varphi_B^C$$

$$y_C = y_A + \Delta y_A^C = y_B + \Delta y_B^C$$

$$x_C = x_A + \Delta x_A^C = x_B + \Delta x_B^C$$



- Sedaj imamo določen položaj točke C. Zanima nas položaj točke T. Prvo izračunamo smerni kot s točke M na novo točko C:

$$\tan v_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{\Delta Y_M^C}{\Delta X_M^C}$$

- Z njegovo pomočjo izračunamo lahko orientirane smeri na novo točko T.

$$\delta_A = \varphi_C^A - v_M^C \quad \delta_B = v_M^C - \varphi_C^B$$

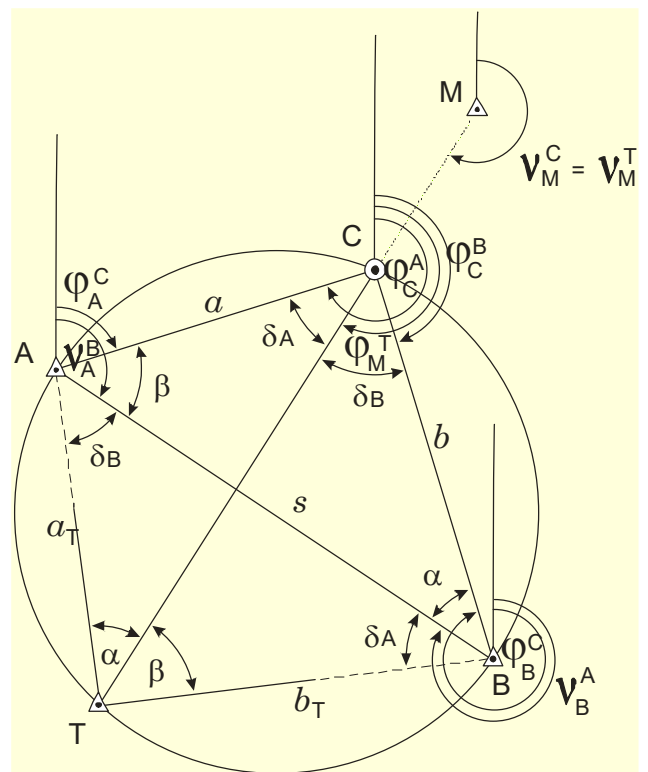
$$\varphi_A^T = v_A^B + \delta_A$$

$$\varphi_B^T = v_B^A - \delta_B$$

- Izračunamo potem stranici a_T in b_T :

$$a_T = \overline{AT} = m \sin \delta_B$$

$$b_T = \overline{BT} = m \sin \delta_A$$



- S pomočjo stranic in orientiranih smeri na točko T izračunamo koordinatne razlike:

$$\Delta y_A^T = a_T \sin \varphi_A^T \quad \Delta x_A^T = a_T \cos \varphi_A^T$$

$$\Delta y_B^T = b_T \sin \varphi_B^T \quad \Delta x_B^T = b_T \cos \varphi_B^T$$

- Na koncu izračunamo koordinati točke T:

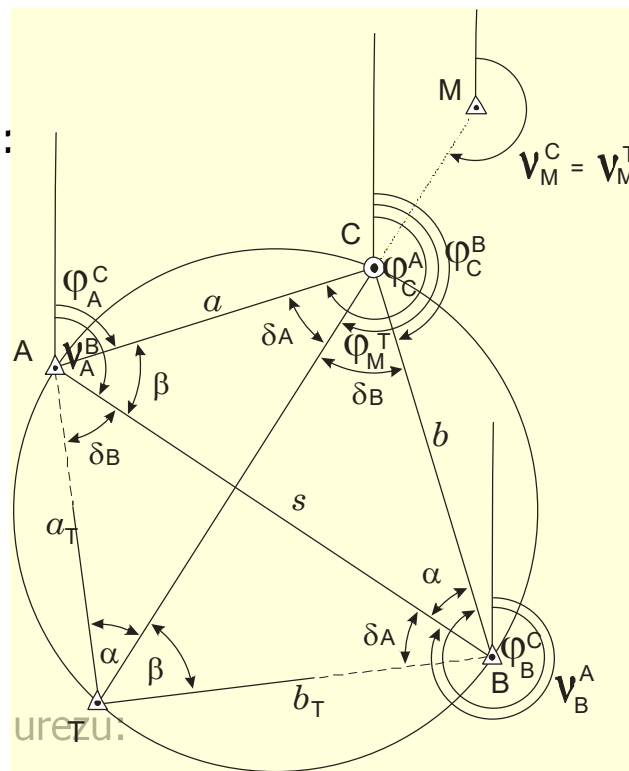
$$Y_T' = Y_A + \Delta y_A^T \quad X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$

$$Y_T'' = Y_B + \Delta y_B^T \quad X_T'' = X_B + \Delta x_B^T$$

- Zadnja kontrola je enaka kot pri zunanjem urezu:

$$Y_T' = Y_T'' \quad X_T' = X_T''$$

- Collinsonov način je dejansko "dvojni" zunanji urez. Prvo določitev točke C, potem določitev točke T.

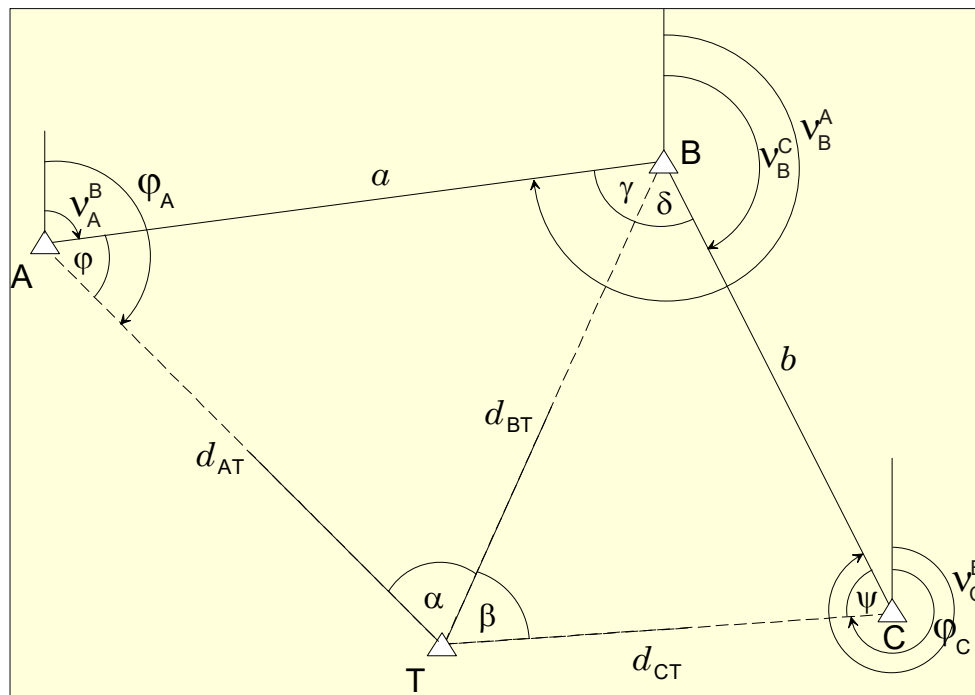


- Rešitve ni, če je tangens smernega kota v_M^C nič:

$$\tan v_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{0}{0}$$

- oz., če točki M in C sovpadata. Potem vse tri dane točke in iskana točka (T) ležijo na istem krogu. Naloga ima neskončno rešitev.
- Opomba: središčna točka M bi naj bila čim bolj oddaljena od kroga skozi točke A, B in T.

Notranji urez, rešitev Pothenot – Snellius



- o dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B, X_B),
C(Y_C, X_C)
- o merjeno: α, β
- o neznano: T (Y_T, X_T)

- o Iz danih točk A, B in C najprej izračunamo smerne kote in dolžine stranic:

$$\tan v_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad \tan v_C^B = \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C} = \frac{\Delta Y_C^B}{\Delta X_C^B}$$

$$a = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

$$b = \sqrt{(Y_B - Y_C)^2 + (X_B - X_C)^2}$$

- o Da lahko izračunamo orientirane smeri (smerne kote) iz danih (A in C) na novo točko:

$$\varphi_A = v_A^B + \varphi \qquad \varphi_C = v_C^B - \psi$$

potrebujemo kota φ in ψ !

- o Ta dobimo iz četverkotnika ABCT in s pomočjo trigonometričnih zvez:

- o Polovična vsota kotov φ in ψ je enaka: $\frac{\varphi + \psi}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$

- o Polovično razliko pa dobimo prek fiktivnega kota μ :

$$\tan \frac{\varphi - \psi}{2} = \tan \frac{\varphi + \psi}{2} \cot(45^\circ + \mu)$$

- Izračunamo stranice iz nove do danih točk A in C:

$$d_{AT} = \frac{a}{\sin \alpha} \sin [180^\circ - (\alpha + \varphi)] = \frac{a}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \varphi)$$

$$d_{CT} = \frac{b}{\sin \beta} \sin(\beta + \psi)$$

- S pomočjo stranic in orientiranih smeri na točko T izračunamo koordinatne razlike:

$$\Delta y_A^T = d_{AT} \sin \varphi_A^T$$

$$\Delta x_A^T = d_{AT} \cos \varphi_A^T$$

$$\Delta y_C^T = d_{CT} \sin \varphi_C^T$$

$$\Delta x_C^T = d_{CT} \cos \varphi_C^T$$

- Na koncu izračunamo koordinati točke T:

$$Y_T' = A_A + \Delta y_A^T$$

$$X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$

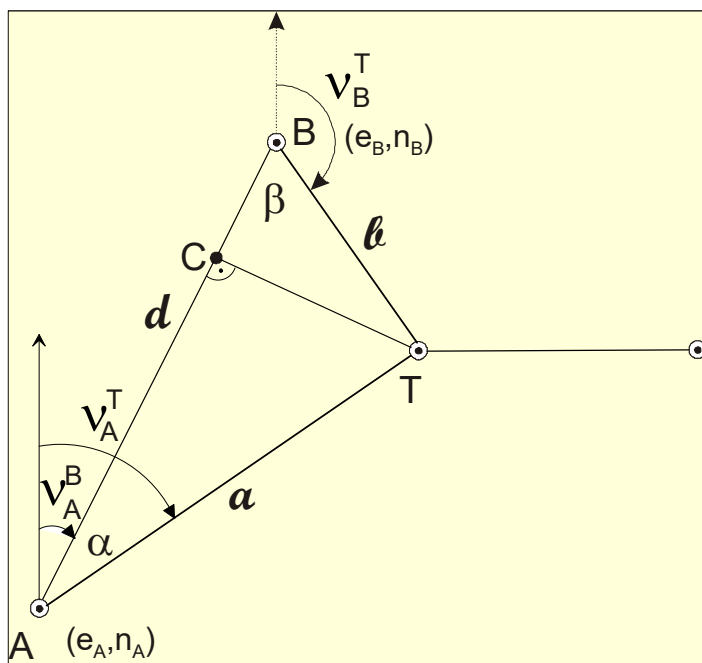
$$Y_T'' = Y_C + \Delta y_C^T$$

$$X_T'' = X_C + \Delta x_C^T$$

Ločni presek

- Ločni presek je postopek za izračun koordinat točke s pomočjo merjenih razdalj od dveh (treh) danih točk do nove točke.

- merjeno: a, b
- dano: A (e_A, n_A), B (e_B, n_B)
- neznano: T (e_T, n_T)



- Ločni presek lahko izračunamo na dva načina.

- Smerni kot v_A^B izračunamo iz koordinat danih točk A in B.
- S pomočjo smernih kotov izračunamo koordinatne razlike od A in B do točke T:

$$\begin{aligned} \Delta e_A^T &= a \sin v_A^T & \Delta n_A^T &= a \cos v_A^T \\ \Delta e_B^T &= b \sin v_B^T & \Delta n_B^T &= b \cos v_B^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_T' &= e_A + \Delta e_A^T & n_T' &= n_A + \Delta n_A^T \\ e_T'' &= e_B + \Delta e_B^T & n_T'' &= n_B + \Delta n_B^T \end{aligned}$$

- zadnja kontrola:

$$e_T' = e_T'' \quad n_T' = n_T''$$

- 2. način (geodetski):
- Način računanja je enak izračunu koordinat linijskih točk. Tukaj računamo delne koordinatne razlike od točk A (B) do točke C (vznožje višine h) ter naprej od točke do nove točke T.
- h je višina v trikotniku $\triangle ABT$;
- p, q projekciji stranic a in b na stranico d ;
- Zveza med projekcijami ter višino in stranicami:

$$h^2 = b^2 - q^2$$

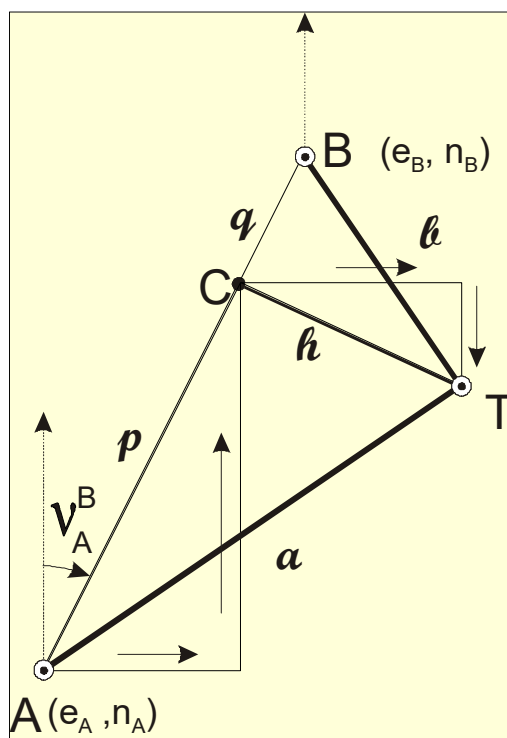
$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$

$$a^2 - b^2 = (p+q)(p-q) \quad (p+q) = d$$

$$\frac{a^2 - b^2}{2d} = \frac{p-q}{2}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{p+q}{2}$$



$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$$

$$q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$$

$$e_T' = e_A + p \sin v_A^B + h \cos v_A^B$$

$$n_T' = n_A + p \cos v_A^B - h \sin v_A^B$$

$$e_T' = e_A + p \sin v_A^B - h \cos v_A^B$$

$$n_T' = n_A + p \cos v_A^B + h \sin v_A^B$$

$$e_T'' = e_A + \Delta e_A^T$$

$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T$$

$$e_T' = e_B - q \sin v_A^B + h \cos v_A^B$$

$$n_T'' = n_B - q \cos v_A^B - h \sin v_A^B$$

$$e_T' = e_B - q \sin v_A^B - h \cos v_A^B$$

$$n_T'' = n_B - q \cos v_A^B + h \sin v_A^B$$

$$n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$

$$n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

