Števila kot rezultat merjenja oz. računanja

- Rezultat meritve je količina, ki jo zapišemo z merskim številom in enoto. Vsak rezultat je približek merjene količine.
- Zaradi prisotnosti različnih vplivov je rezultat vrednost merjene količine s pogreškom (napako).
- Pri posredovanju rezultata meritev je potrebno podati še t.i. merilno negotovost. To je količina, ki določa, v katerih mejah okrog izmerjene vrednosti se skriva pravi rezultat in s kakšno verjetnostjo.

- Rezultati meritev ali računanja so redkokdaj cela števila, vendar so največkrat podana (zapisana) s določenim številom pomembnih, (signifikantnih) števk (cifer). Pravimo jim tudi zanesljiva mesta.
- Primer: s topografskega načrta smo odčitali vrednost razdalje 77,33 m. Lahko so vse cifre pomembne (izmerjena razdalja na cm natančno), lahko pa samo prvi dve (rezultat deljenja razdalje 232 m na 3 dele; prvotna razdalja natančna na m).

- Prave vrednosti razdalje (neke količine) ne moremo izmeriti z absolutno gotovostjo; merjenje je podvrženo vplivom, zato z merjenjem ni možno določiti prave vrednosti neke količine, temveč samo njen približek.

- Pomembne cifre nekega števila so vse cifre razen ničel, ki se nahajajo z leve strani.

693	3 pomembne cifre
693,7	4 pomembne cifre
343,173	6 pomembnih cifer
0,002754	4 pomembne cifre
1,2530	5 pomembnih cifer
2,0005470	8 pomembnih cifer

- Ničle z desne strani imajo lahko dvojen pomen:
  - 1 ha = 10.000 m^2
  - na Zemlji živi 7 980 000 000 prebivalcev
    boljši je zapis: $7{,}98 \times 10^9$ (t.i. "znanstveni" zapis).

- Numerično vrednost neke količine običajno zapišemo z vsemi zanesljivimi ciframi plus prvo dvomljivo.
- Primer: razdaljo smo izmerili z merskim trakom, ki ima centimetrsko razdelbo; cenili smo milimetre; rezultat je 62,513 m. Prve štiri cifre so sigurne, peta je ocenjena (in je torej dvomljiva). Sam izmerjeni rezultat ima pet pomembnih cifer.

- Število pomembnih cifer zmanjšamo z zaokroževanjem.

- 0,10664 — 0,1066 → zaokroženo na 4 decimalke
  0,10666 — 0,1067 → zaokroženo na 4 decimalke
  0,10665 — 0,1066 → zakrožimo na najbližjo sodo (parno) število

Pravila za določanje števila pomembnih cifer

- Pri seštevanju in odštevanju zaokrožimo rezultat na tisto najmanjše število decimalk, ki jih vsebuje ena od seštevanih oz. odštevanih količin.
- Na primer:

```
165,21
149,7
 65,495
  2,2167
________
382,6217 = 382,6
```

- Pri množenju mora imeti rezultat enako število pomembnih cifer, kot jih ima količina z najmanjšim številom pomembnih cifer; pri tem ne upoštevamo točnih števil.
- Na primer:

$2{,}15 \times 11{,}1234 = 23{,}9$

$2(2{,}15 \times 11{,}1234) = 47{,}8$ (2 je točno število)

$(5{,}5)^3 = 166{,}375 = 1{,}7 \times 10^2$

Primer kombinacije računskih operacij:

0,556 x (40 – 32,5)

3 pom. mesta

celo število, brez decimalk

eno decimalno mesto

Prvo izračunamo oklepaj: (40 – 32,5)= 7,5 = 8; 0,556 * 8 = 4,448 = 4

zaokrožimo na celo število

na rezultat vpliva število 8, (eno pom. mesto)

Primer nul:

produkt števil 1,41421 in 1,41422:

1,41421 * 1,41422 = 2,0000040662

= 2,00000

- Da bi se izognili zaokrožitvenim napakam pri enostavnem računanju upoštevajmo naslednje:
  - za konstante in konverzijske faktorje uporabimo eno cifro več, kot ima število z najmanjšim številom pomembnih cifer;
  - števila, ki so rezultat računanja in, ki jih bomo uporabili v izračunih naprej, zapišimo s saj eno cifro (decimalko) več.
  - Vse zaokrožitve opravimo šele v končnem rezultatu, vmesne rezultate imamo lahko na več decimalnih mest natančno.

- Moramo biti zelo pozorni pri zaokroževanju že zaokroženih števil!
  Primer: 869,79749 → 869,7975 (4) → 869,798 (3)
  869,79749 → 869,797 (3)

- Ne zapisujmo preveč decimalnih mest. Če izražamo rezultat računanja v obliki: x ± y (kjer je y standardna deviacija, ali mera natančnosti izračunane količine x), potem naj bosta obe vrednosti zapisani z enakim številom decimalnih mest.
- Primer: aritmetična sredina = 138,12412 .... st.dev. = 0,006234...
  zapišimo rezultata kot:
  sredina = 138,124 st.dev. = 0,006

Primer

- Primer: Izračunaj ploščino krožnega izseka če so podani elementi:
  r = 348,56 m in α=40° (točno)

$$S = r^2 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

π = 3,14 S = 42 387,932345 (zaokrožimo na 42 388, ker ima r 5 pomembnih cifer) → napaka je velika;

π = 3,1416 S = 42 409,5312913 (zaokr. na 42 410) → mala napaka

π = 3,14159 S = 42 409, 3962979 (zaokr. na 42 409) → brez napake

π = 3,141592654 S = 42 409,43212 (zaokr. na 42 409) → brez napake

Napake pri numeričnem računanju (1)

- Pri numeričnem računanju moremo le redkokdaj izračunati eksaktni rezultat. Navadno izračunani rezultati vsebujejo napake, ki nastanejo zaradi različnih vzrokov. Glavni izvori napak so:
- nenatančnost začetnih podatkov,
  - ne moremo se je izogniti → neodstranljiva napaka;
- numerična metoda,
  - napaka metode;
- zaokroževanje.

Napake pri numeričnem računanju (2)

- Rezultati računanja so kombinacija celih in realnih števil ter konstant. Kdaj se celo konstante v enačbah ($\sqrt{2}$) ne morejo predstaviti točno, z določenim (fiksnim) številom decimalnih mest.
- V računalnikih so cela števila shranjena točno v binarni obliki. Računanja z njimi so hitrejša in natančnejša (razen deljenja), kot pa z realnimi števili. Ta se prvo pretvorijo v "znanstveni" zapis in potem v binarno obliko. Pri tem nastanejo napake zaokroževanja.
- Nazoren primer za to je pretvorba kotov iz oblike decimalnih stopinj v šestdesetiško obliko.

Napake zaokroževanja

- Napako zaokroženega števila lahko izrazimo kot absolutno ali relativno napako (odstopanje).
- Absolutna napaka: $\delta = a - A$
  kjer so a približna vrednost, A pa prava vrednost.
  - Prava vrednost redkokdaj znana $\rightarrow$ določimo zgornjo mejo absolutne napake:
    $\Delta = \max|\delta|$
  - $\Delta = 0{,}5\ 10^{-k}$ k - število decimalnih cifer

- Zgornja meja absolutne napake v zaokroženem številu bo enaka polovici enote zadnje pomembne cifre.
  - Primer: 0,1492 $\rightarrow$ približek; prava vrednost med 0,14915 in 0,14925. Napaka $\rightarrow$ 0,00005.

Primer kopičenja zaokrožitvenih napak

- Kratka zanka: (primer v jeziku BASIC)

```
X = 1/3
FOR J = 1 TO 30
X = (9*X + 1)*X -1
PRINT J,X
NEXT J
END
```

- Zanka bi morala vedno dati vrednost 1/3 oz. 0,3333333333...
- Ker računalnik (kalkulator) mora zaokrožiti število 1/3 na določeno število decimalnih mest, pride do kopičenja napak.

Primer kopičenja zaokrožitvenih napak - primeri

Program v Fortranu (enojna natančnost):

```
 1  0.33333340
 2  0.33333382
 3  0.33333674
 4  0.33335719
 5  0.33350030
 6  0.33450231
 7  0.34152848
 8  0.39130378
 9  0.76937157
10   5.0967650
11   237.88989
12   509561.31
13  2.33687509E+12
14  4.91488685E+25
15        Infinity
16        Infinity
17        Infinity
18        Infinity
19        Infinity
20        Infinity
....
```

Program v Fortranu (dvojna natančnost):

```
 1  0.33333333333333320
 2  0.33333333333333243
 3  0.33333333333332699
 4  0.33333333333328891
 5  0.33333333333302234
 6  0.33333333333115639
 7  0.33333333331809473
 8  0.33333333322666309
...
16  0.33271848161515705
17  0.32903277368981743
18  0.30339586914794892
19  0.13183734989230297
20 -0.71173286866806740
21   2.8473402184142209
22   74.813457093006505
23   50447.293716957138
24   22904415436.578205
25  4.72151021844516202E+021
26  2.00633928685938741E+044
27  3.62285760059589157E+089
28  1.18125874747758795E+180
29                  Infinity
30                  Infinity
```


- Matlab rešitev:

```
 j =   1     X =        0.3333333333333
 j =   2     X =        0.3333333333333
 j =   3     X =        0.3333333333333
 j =   4     X =        0.3333333333333
 j =   5     X =        0.3333333333332
 j =   6     X =        0.3333333333321
 j =   7     X =        0.3333333333246
 j =  10     X =        0.3333333303466
 j =  11     X =        0.3333333124260
 j =  12     X =        0.3333331869818
 j =  19     X =        0.2158993387631
 j =  20     X =       -0.3645879409320
 j =  21     X =       -0.1682686408746
 j =  22     X =       -0.9134396213586
 j =  23     X =        5.5959078554516
 j =  24     X =      286.4235703957983
 j =  25     X =   738631.5786748873100
 j =  26     X = 4910190219772.3848000000000
 j =  27     X = 21698971194914031000000000.0000000000000
 j =  28     X = 4237608158259379800000000000000000000000000000000.0000000000000
 j =  29     X =
1616159061265180600000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000.00
 j =  30     X =
2350773100178594600000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000.000
```

- C++ rešitev:

```
 j =   1     X =        0.333
 j =   2     X =        0.333
 j =   3     X =        0.333
 ...
 j =  13     X =        0.333
 j =  14     X =        0.333
 j =  15     X =        0.333
 j =  16     X =        0.333
 j =  17     X =        0.329
 j =  18     X =        0.303
 j =  19     X =        0.132
 j =  20     X =       -0.712
 j =  21     X =        2.847
 j =  22     X =       74.813
 j =  23     X =    50447.293
 j =  24     X = 22904414577.200
 j =  25     X = 4721509864141079691008.000
 j =  26     X = 2006338985746336512090352443220959543028613l2.000
 j =  27     X = 3622856513153074475025625353599745985306956227451385785731223748765420702114907202854584 32.000
 j =  28     X =
1181258038340608759747709906256458997953359411273752574815260104088388414692615369946265984713182641610032985871936961735182 9481
199432873189820429446032809449310346319766360959221 76.000
 j =  29     X =
125583349782987280317838273839843507114188051704259532430359542123821952171796708428655762983640726331500541196967592250324 49421
278253317238622905070756130972521325782614653989487113179041052431403038945643392795902274358619021991802767172621009458088 16124
028641689048499486447799355256102589662347949491117732870069248593961676554958738907133138432423480839 3728.000
 j =  30     X =
141940599684445182481974942365321931954086515646820991954606074810699232698674235260075216150103466830977153270229840844246 20096
591253674152366579640276667302607896271210797483972241915080127101852276561443700744827299580731255956330961977565685710132 22707
141703812499789731267865151190268517894152445252615488772965745663280495234162916404073413467400376478347717555331221544878 93368
163916743256866446790728726296860894105054388725269576562933686887437259974249344549115873068885412797169740752671228921480 65648
906826565122577391780357822912409562029882387582806452181222065201563916664940736452610912856034622352495332476602918775510 36989
66695393665253547667069603778504728677933112058055443346281509783315475616916674969 6.000
```


- Relativna napaka:
  - kvocient absolutne napake in prave vrednosti neke količine. Če prave vrednosti ne poznamo, jo nadomestimo s približno vrednostjo:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{A} \approx \frac{\Delta}{a}$$

V praksi se relativno odstopanje (napaka) pogosto izraža v procentih:

$$\varepsilon\% = \frac{\Delta}{a}100$$

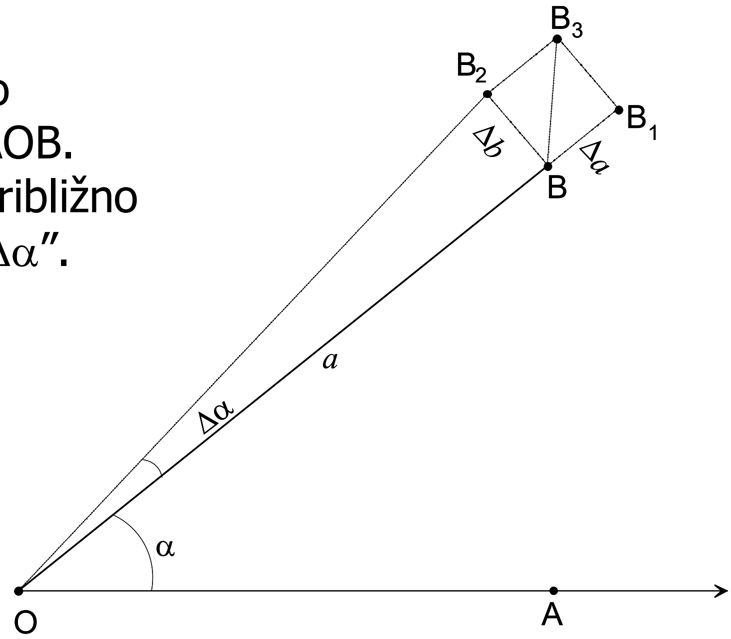
  - Primer: podani sta števili 0,001 in 10,000. Za oba Δ= 0,0005. Relativne napake obeh števil:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,0005}{0,001} = 0,5 = 50\% \qquad \varepsilon_2 = \frac{0,0005}{10,000} = 0,00005 = 0,005\%$$

Drugo število je 10 000 krat bolj natančno!

Primerjava stopnje natančnosti kotnih in dolžinskih količin (1)

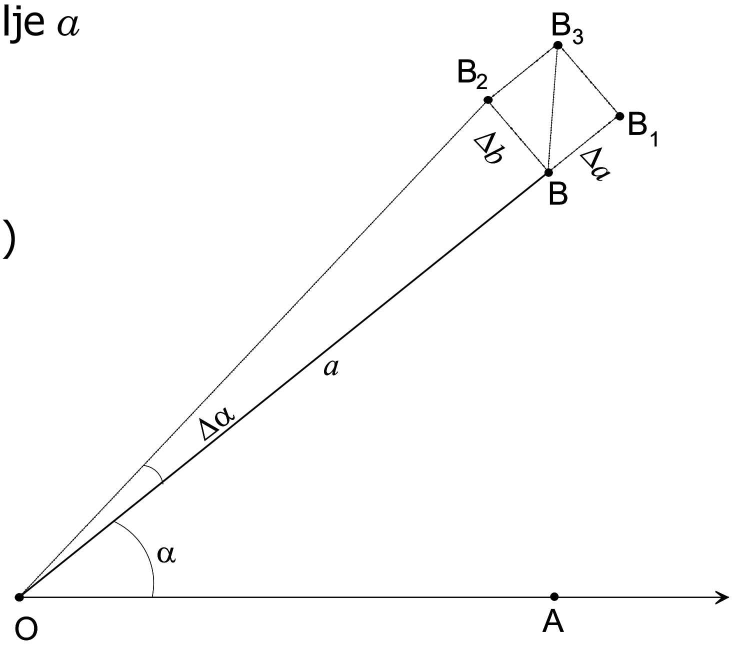
- Zanima nas zveza med relativnimi napakami kotov in razdalj, ki je potrebna za uskladitev stopnje natančnosti obeh količin. Za primer vzemimo določitev koordinat točk v polarnih koordinatah.
- Položaj točke je določen razdaljo OB=a in polarnim kotom $\alpha=\angle$ AOB. Količine a in α poznamo samo približno z absolutnima napakama Δa in $\Delta\alpha''$.



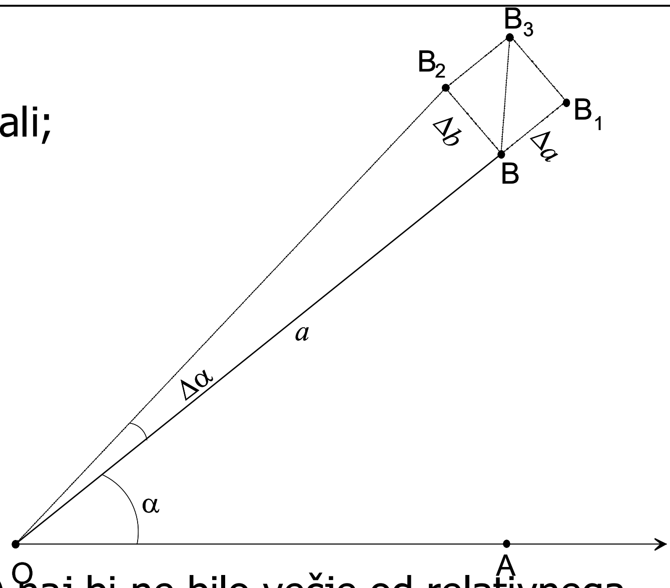
Primerjava stopnje natančnosti kotnih in dolžinskih količin (2)

- Napaka v merjenju razdalje povzroča radialni premik $BB_1 = \Delta a$ (premik vzdolž radij vektorja - razdalje a
- Napaka v merjenju kota povzroča prečni premik $BB_2=\Delta b$.
- Skupni premik (vektorska rezultanta) je enak BB_3.
- Podajmo pogoj:

$$\Delta b < \Delta a$$



- Enakokraki trikotnik BOB_2, kot $\Delta\alpha''$ je mali; tetivo BB_2 lahko aproksimiramo z lokom BB_2; Δb izračunamo kot dolžino loka:



$$\Delta b \approx a \times \frac{\Delta\alpha''}{\rho''}$$

$$\Delta a \geq a \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} \qquad \text{oz.} \qquad \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} \leq \frac{\Delta a}{a}$$

Relativno odstopanje kota (v ločni meri) naj bi ne bilo večje od relativnega odstopanja razdalje.

- Primer: s kakšno natančnostjo moramo izmeriti stranico trikotnika, če sta kota izmerjena s natančnostjo $\Delta\alpha$=20"?

$$\frac{20''}{206265} \leq \frac{\Delta a}{a} \qquad\qquad \varepsilon_{\max} \approx \frac{1}{10\,000}$$

- Na razdalji recimo 100 m, je odstopanje lahko 1 cm.