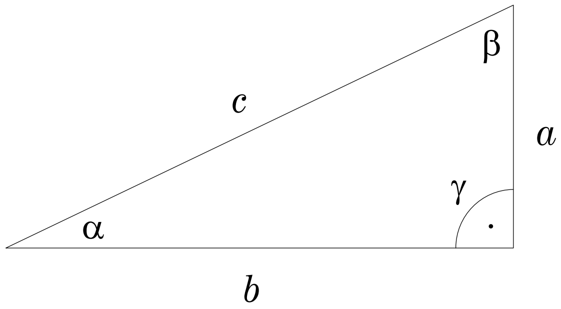
Trigonometrija v ravnini

- Pravokotni trikotnik
  a, b kateti; c hipotenuza



- Osnovne zveze:

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta$$
$$b = c\sin\beta = c\cos\alpha$$
$$a = b\tan\alpha = b\cot\beta$$

- Reševanje pravokotnega trikotnika: Pravokotni trikotnik je določen z dvema elementoma. Obstaja $\binom{5}{2} = 10$ možnih kombinacij, vendar vse niso medsebojno neodvisne. En ostri kot določa tudi drugega, tako da obstajajo 4 neodvisne naloge:

1. dani c, a — hipotenuza in kateta (c, b)
2. dani a, b — kateti
3. dani c, α — hipotenuza in en kot (c, β)
4. dani a, α — kateta in kot (a, β), (b, α), (b, β)

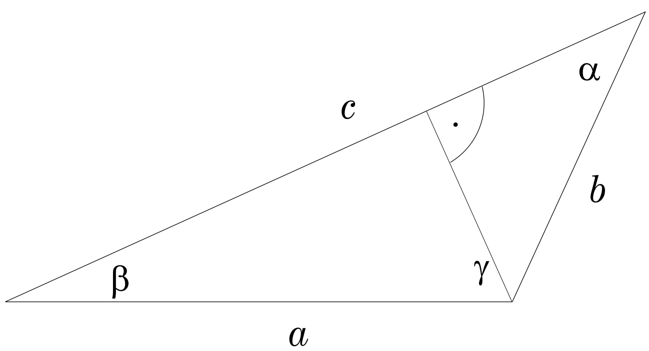
- Potrebno je preveriti če dani elementi omogočajo enolično rešitev. Mora biti izpolnjeno:
  $\alpha + \beta = 90°$, ter $a < c$, $b < c$ in $c^2 = a^2 + b^2$.

- Poševni (splošni) trikotnik

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

R – polmer očrtanega kroga
r – polmer včrtanega kroga

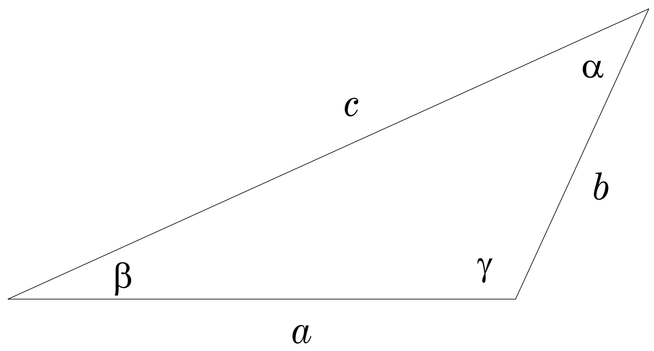
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$



Računanje v splošnem trikotniku

- Sinusni izrek

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



- Kosinusni izrek

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

- Tangensni izrek

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}\qquad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}\qquad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

- Izrek o polovičnem kotu

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

- Heronov obrazec $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

- Ploščina trikotnika

$$P=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\tfrac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$P=\frac{abc}{4R}\qquad P=s.r$$

- Polmera očrtane in včrtane krožnice

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\qquad r=\frac{P}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Reševanje splošnega trikotnika

- Trikotnik je možno rešiti, če so podani 3 elementi. Skupaj obstaja 4 tipa nalog, glede na to kateri elementi so podani.
- 1 tip naloge:
  dano: a, b, c (vse tri stranice)
  neznano: α, β, γ

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{(s-a)} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{(s-b)} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{(s-c)}$$

- 2. tip naloge:
  dano: b, c, α (dve stranici in vmesni kot)
  neznano: β, γ, a

  Neznana kota lahko izračunamo s pomočjo tangensnega izreka, katerega napišemo v malo spremenjeni obliki:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}} \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b+c}{b-c}\cot\frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\beta-\gamma}{2}, \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta-\gamma}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$$

stranico a lahko izračunamo iz sinusnega izreka:

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

- 3. tip naloge:
  dano: a, b, α (dve stranici in kot nasproti ene izmed njih)
  neznano: β, γ, c

  Z danimi elementi lahko izračunamo edino kot β prek sinusnega izreka:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

- Pri tem lahko nastopijo trije primeri:

1. $\sin\beta > 1$, ne obstaja realna vrednost za β. Ni rešitve, trikotnik s takšnimi elementi ne obstaja.
2. $\sin\beta = 1$, $\Rightarrow$ $\beta = 90°$ Trikotnik je pravokoten.
3. $\sin\beta < 1$,
   obstajata dve rešitvi za kot β: β_1 in $\beta_2 = 180° - \beta_1$.
   $a > b$ potem mora biti tudi $\alpha > \beta$
   iz sinusnega izreka sledi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha > \sin\beta$$

$\Rightarrow$ Kot α je bližje 90° kakor kot β.

Ne glede na to, ali je dani kot α v I. ali II. kvadrantu, je rešitev vedno samo ena $\beta = \beta_1$. Nasproti danemu kotu leži večja stranica.

$a < b$ potem mora biti tudi $\alpha < \beta$

iz sinusnega izreka sledi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta$$

$\Rightarrow$ Kot β je bližje 90° kakor kot α.

1. dani kot α je v I. kvadrantu in obe rešitvi $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ zadoščajo pogoju $\alpha < \beta$.
2. dani kot α je v II. kvadrantu in nobena rešitev $\beta = \beta_1$ in $\beta = \beta_2$ ne zadošča pogoju $\alpha < \beta$. Ni rešitve za trikotnik z danimi elementi.

- 4. tip naloge:

  dano: a, α, β (stranica in priležna kota)

  neznano: γ, b, c

  Pogoj rešljivosti: $\alpha + \beta < 180°$

  Kot γ dobimo iz lastnosti trikotnika: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

  Obe neznani stranici lahko izračunamo iz sinusnega izreka:

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow b \qquad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c$$

Uporaba v geodeziji

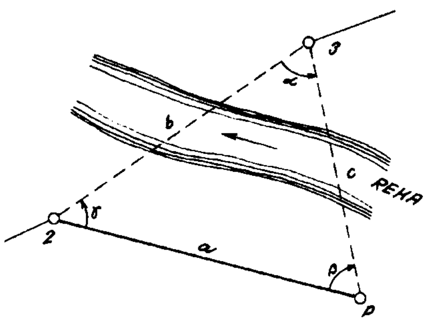
- Izračun dolžine med dvema nedostopnima točkama
- 1.

  merjeno: a, α, β, γ

  neznano: b, c

  rešitev:

  sinusni izrek



- 2.

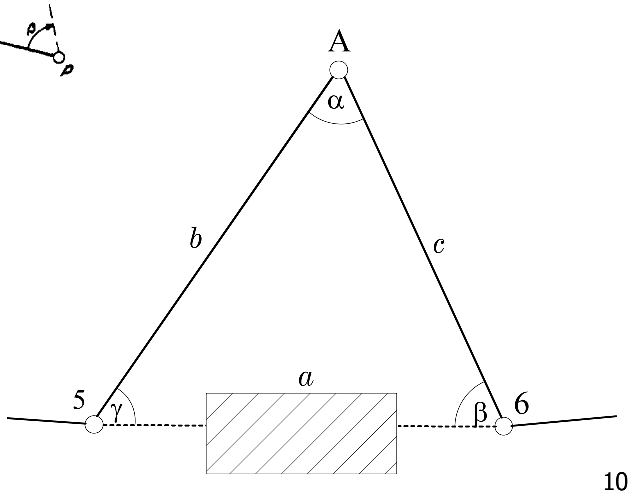
  merjeno: α, b, c

  neznano: a

  rešitev:

  kosinusni izrek;

  tangensni izrek + sinusni izrek



- Redukcija poševno merjenih razdalj na horizont:

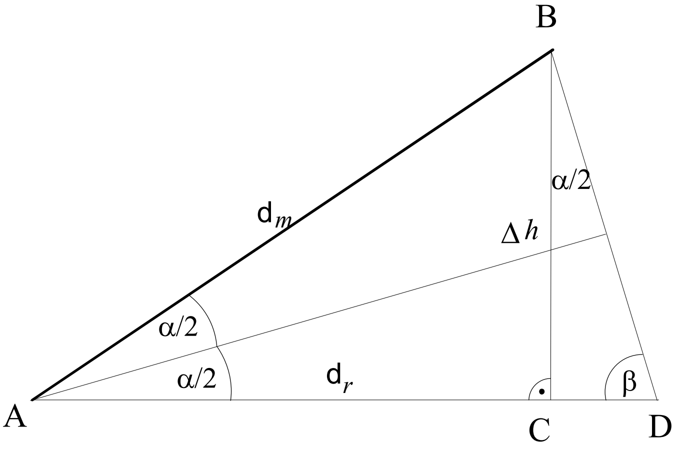
  d_m merjena razdalja

  d_r reducirana razdalja

  Δh višinska razlika

  r redukcija

  ABD enakokraki trikotnik



- rešitev s pomočjo višinske razlike:

$$d_m^2 = d_r^2 + \Delta h^2$$

$$d_r = \sqrt{d_m^2 - \Delta h^2}$$

- rešitev s pomočjo vertikalnega kota:

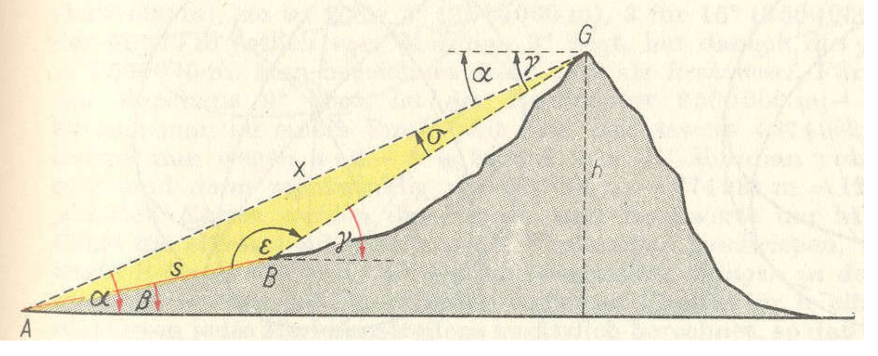
$$\cos\alpha = \frac{d_r}{d_m} \qquad \Rightarrow \qquad d_r = d_m \cos\alpha$$

$$r = d_m - d_r = d_m - d_m \cos\alpha$$

$$r = d_m (1 - \cos\alpha)$$

- Trigonometrično višinomerstvo

- 1.
  merjeno: α, γ, s
  (naklonski kot β)
  neznano: h



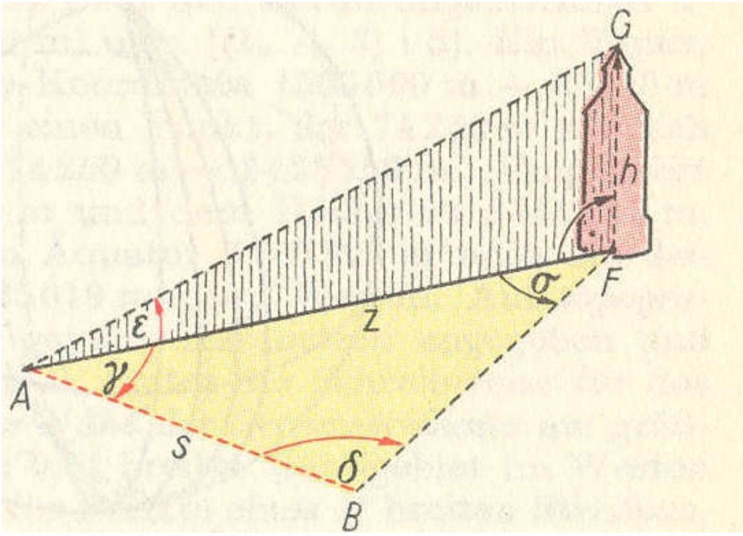
$$h = x \sin\alpha \qquad \varepsilon = \beta + (180° - \gamma)$$

$$x = s\frac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma} \qquad \sigma = \gamma - \alpha$$

$$x = s\frac{\sin\varepsilon \sin\alpha}{\sin\sigma}$$

- 2.

merjeno: s, ε, γ, δ
neznano: h



$\overline{AF} = z$ $\qquad h = z \tan \varepsilon$

$$z = s\frac{\sin\delta}{\sin\sigma} = s\frac{\sin\delta}{\sin\left[180° - (\gamma+\delta)\right]} = s\frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$$