Natančnost pri numeričnem računanju

Števila kot rezultati meritev oz. računanja

V geodeziji imamo pogosto opravka z meritvami ali numeričnim računanjem, kjer nastopajo merjene količine ali pa števila, pridobljena iz prejšnjih računanj (matematično gledano so to *slučajne spremenljivke*).

Rezultat meritve (v meroslovju se uporablja termin *merilni rezultat – odmerek*) je količina, ki jo zapišemo z merskim številom in enoto. Rezultat je približek merjene količine. Pri meritvah so vedno prisotni različni vplivi, zato je rezultat vrednost merjene količine s pogreškom (napako), ki ga dobimo iz merjenih vrednosti ene merjene količine ali iz merjenih vrednosti različnih merjenih količin s pomočjo predpisanih funkcijskih zvez. Pri posredovanju rezultata meritev je potrebno podati še t.i. merilno negotovost. To je količina, ki določa, v katerih mejah okrog izmerjene vrednosti se skriva pravi rezultat in s kakšno verjetnostjo (USM, 1996). Standardno negotovost lahko ocenimo s pomočjo statističnega izračuna na osnovi večjega števila meritev ali pa s pomočjo izkušenj, vrednosti kalibricijskih certifikatov itd.

Torej rezultati meritev ali računanja so redkokdaj cela števila, vendar so največkrat podana (zapisana) s določenim številom *pomembnih (signifikantnih)* števk (cifer).

Primer 1: z enega topografskega načrta smo odčitali vrednost razdalje 77,33 m. Normalno bi domnevali, da je razdalja rezultat meritve, ki smo jo izvedli na dve decimalni cifri natančno (torej na centimeter). Vendar, lahko se izkaže, da je razdalja 77,33 m rezultat delitve večje razdalje 232 m na tri dele in je prvotna razdalja izmerjena samo na meter natančno.

Če je razdalja izmerjena z merskim trakom, ki ima razdelbo samo v metrih, je samo število odčitanih metrov "sigurno" (zanesljivo). Ocenimo lahko desetinko metro in rezultat podamo kot 77,3 m, vendar je vrednost 0,3 m dvomljiva. Za 77 pravimo da ima "dve pomembni cifri" meritve.

Če imamo na voljo bolj natančen merski trak, torej trak s centimetrsko razdelbo, lahko dobimo za merjeno razdaljo boljšo oceno: na primer 77,37 m. Sedaj imamo štiri pomembna cifre v rezultatu meritve. Bolj natančen merski pribor nam lahko poda večje število pomembnih cifer, vendar prave razdalje ne moremo izmeriti s absolutno gotovostjo. Merjenje je proces, ki je podvržen vplivom, zato z merjenjem ni možno določiti prave vrednosti neke količine temveč samo njen približek (oceno).

Pomembne cifre nekega števila so vse cifre razen ničel, ki se nahajajo z leve strani. Na primer:

693	3 pomembne cifre
693,7	4 pomembne cifre
343,173	6 pomembnih cifer
0,002754	4 pomembn cifre

`1,2530`	5 pomembnih cifer
`2,000005470`	8 pomembnih cifer

Ničle, ki se nahajajo z desne strani števila imajo lahko dvojen pomen. Na primer če napišemo: 1 ha = 10.000 m^2. Tukaj so vse ničle pomembne cifre, saj je število 10000 točno. Vendar če pravimo, da na Zemlji živi 5900 000 000 prebivalcev, potem sta samo prvi dve cifri zanesljivi (gotovi) in število ima dve pomembni cifri. Zato je bolje predhodno število zapisati v t.i. "znanstvenem" (eksponentnem) zapisu: $5{,}9\times10^9$.

Numerično vrednost neke količine običajno zapišemo z vsemi zanesljivimi ciframi plus prvo dvomljivo. Na primer: razdaljo smo izmerili z merskim trakom, ki ima centimetrsko razdelbo; cenili smo milimetre; rezultat je 62,513 m. Prve štiri cifre so sigurne, peta je ocenjena (in je torej dvomljiva). Sam izmerjeni rezultat ima pet pomembnih cifer.

Število pomembnih cifer zmanjšamo z zaokroževanjem.

Primer 2: Za število 0,10664 pravimo, da je zaokroženo na štiri decimalke če napišemo 0,1066. Število 0,10666 pa je zaokroženo na štiri decimalke če napišemo 0,1067. V obeh primerih maksimalna napaka znaša 0,00005. Prvi je primer zaokroževanja navzdol, drugo pa primer zaokroževanja navzgor. Mejni primer, število 0,10665 običajno zaokrožimo na 0,1066, torej na najbližjo sodo (parno) cifro.

Pravila za določanje števila pomembnih cifer

Števila pomembnih cifer ni lahko določiti za neki numerični rezultat ali rezultat meritev. Vendar, z uporabo določenih pravil, lahko računanje opravimo dokaj učinkovito. Pri seštevanju in odštevanju zaokrožimo rezultat na tisto najmanjše število decimalk, ki jih vsebuje ena od seštevanih oz. odštevanih količin. Na primer:

```
165,21
149,7
 65,495
  2,2167
--------
382,6217 = 382,6
```

Rezultat zaokrožimo na 382,6 ker je 149,7 podan samo z eno decimalko.
Pri odštevanju je pomembno najprej vsa števila zaokrožiti na enako število decimalnih mest. Potem opravimo samo odštevanje.

```
  821,8
-  10,464
---------
  811,336 = 811,3    oz.

  821,8
-  10,5
-------
  811,3
```

Pozorni moramo biti pri seštevanju približno enakih števil, saj takrat lahko dobimo nesmiseln rezultat, če se vodilna pomebna cifra enega od števil izgubi.

Pri množenju mora imeti rezultat enako število pomembnih cifer, kot jih ima količina z najmanjšim številom pomembnih cifer; pri tem ne upoštevamo točnih števil. Na primer:

```
2,15 × 11,1234        =23,9
2(2,15×11,1234) =47,8 (ne upoštevamo 2)
```

V obeh primerih število pomembnih cifer je 3, kar nam pa določa število 2,15.
Da bi se izognili zaokrožitvenim napakam pri enostavnem računanju upoštevajmo nasledenje:

- za konstante in konverzijske faktorje uporabimo eno cifro več, kot ima število z najmanjšim številom pomembnih cifer;
- števila, ki so rezultat računanja in, ki jih bomo uporabili v izračunih naprej, zapišimo z eno cifro (decimalko) več.

Primer 2: Izračunaj ploščino krožnega izseka če so podani elementi: r = 348,56 m α=40° (točno)

$$S = r^2 \pi \frac{\alpha°}{360°}$$

1. π = 3,14 S = 42387,932345 (zaokrožimo na 42388, ker ima r 5 pomembnih cifer), napaka je velika
2. π = 3,1416 S = 42409,5312913 (zaokr. na 42410) mala napaka
3. π = 3,14159 S = 42409, 3962979 (zaokr. na 42409) brez napake
4. π = 3,141592654 S = 42409,43212 (zaokr. na 42409) brez napake

Napake pri numeričnem računanju

Pri numeričnem računanju moremo le redkokdaj izračunati ekzaktni rezultat. Navadno izračunani rezultati vsebujejo napake, ki nastanejo zaradi različnih vzrokov. Glavni izvori napak so:

- nenatančnost začetnih podatkov,
- numerična metoda,
- zaokroževanje.

Nenatančnost začetnih podatkov

Podatki numeričnega problema v geodeziji največkrat izhajajo iz opazovanj ali meritev ali pa so rezultat prejšnjih računov. Ti podatki niso nikoli popolnoma točni, vsebujejo napake, ki onemogočajo izračun eksaktnega rezultata. V končnem rezultatu nastane napaka, ki se ji ne moremo izogniti in jo zato imenujemo *neodstranljiva napaka*.

Numerična metoda

Pri nekaterih praktičnih problemih ni mogoče najti rešitev s končnim številom aritmetičnih operacij. Pogosto namreč nastopajo pri reševanju neskončni procesi, ki jih moramo zamenjati s končnimi. Tudi pri pogoju, da so začetni podatki točni in da ves čas računanja ne zagrešimo nobene druge napake, se izračunana rešitev razlikuje od iskane za vrednost, ki jo imenujemo *napaka metode*.

Zaokroževanje

Z numerično metodo prevedemo reševanje problema na končno zaporedje aritmetičnih operacij. Teh operacij iz praktičnih razlogov ne izvajamo eksaktno, ampak le na določeno število decimalnih cifer natančno. Zato moramo skoraj pri vsakemu računanju zaokrožiti delne in končne rezultate. Enako velja, če imajo števila, s katerimi se računa, več številskih cifer, kot jih ima ekran žepnega računalnika. V tem primeru je potrebno ta števila zaokroževati. To tega pride tudi zaradi fizičnih omejitvah računalnika oz., merskega instrumenta.

Napake zaokroževanja

Napako zaokroženega števila lahko izrazimo kot absolutno ali pa relativno napako.

Absolutna napaka: $\delta = a - A$

kjer so a približna vrednost, A pa prava vrednost. Ker je prava vrednost le redko znana, se lahko določi zgornja meja absolutne napake:

$$\Delta = max\,|\delta|$$

Zgornja meja absolutna napaka je vedno pozitivno število. Če je dano število podano na k decimalnih cifer, potem je

$$\Delta = 0{,}5\ 10^{-k}$$

Zgornja meja absolutne napake v zaokroženem številu bo enaka polovici enote zadnje pomembne cifre.

<u>Primer 3:</u> predpostavimo, da je število 0,1492 točno na štiri decimalke. Z drugimi besedami, število je približek glede na pravo vrednost in leži nekje med 0,14915 in 0,14925. Napaka znaša največ pet enot na petem ciferu oz. polovico enote na četrtem ciferu → (0,00005). Število ima štiri pomembne cifre.

Relativna napaka je kvocient absolutne napake in prave vrednosti neke količine. Če prave vrednosti ne poznamo, ga nadomestimo s približno vrednostjo:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{A} \approx \frac{\Delta}{a}$$

V praksi se relativno odstopanje (napaka) lahko izrazi v procentih:

$$\varepsilon\% = \frac{\Delta}{a}100$$

<u>Primer 4:</u> podani sta dve števili: 0,001 in 10,000. Obe imata maksimalno absolutno napako enako Δ=0,0005. Relativne napake obeh števil so:

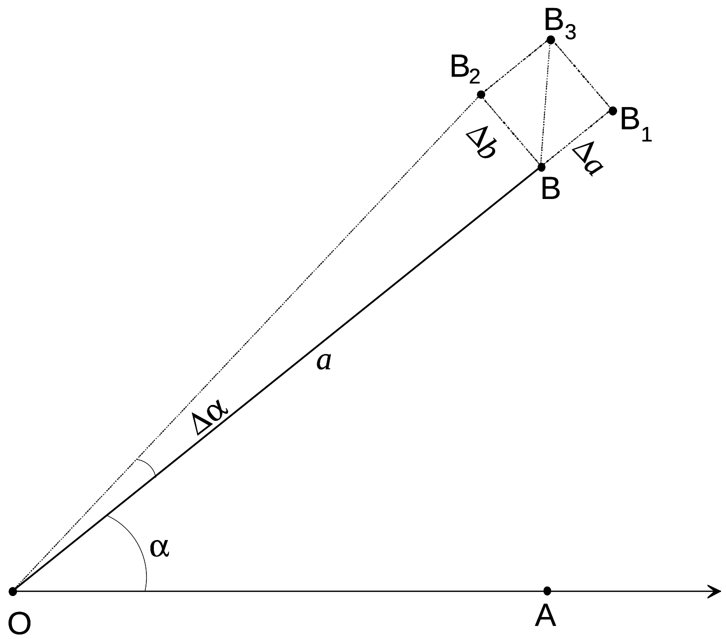
$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}0005}{0{,}001} = 0{,}5 = 50\% \qquad \varepsilon_2 = \frac{0{,}0005}{10{,}000} = 0{,}00005 = 0{,}005\%$$

Drugo število je 10000 krat bolj natančno.

Primerjava stopnje natančnosti kotnih in dolžinskih količin

Pri praktičnem računanju, posebej v geodeziji, nastopajo kotne in dolžinske količine v medsebojni zvezi. Na primer: višino stolpa izračunamo kot: $H = D\, tg\alpha$, pri čemer je višina H določena kot funkcija horizontalne razdalje D in višinskega kota α. Da bi izračun bil smiseln, je potrebno kot in razdaljo podati z enako stopnjo natančnosti.

Poiščimo sedaj zvezo med relativnimi napakami kotov in razdalj, ki je potrebna za uskladitev stopnje natančnosti obeh količin. Kot primer vzemimo določitev koordinat točk v polarnih koordinatah. Položaj točke B je določen z razdaljo OB $= a$ in polarnim kotom $\alpha = \angle AOB$. Količine a in α poznamo samo približno z absolutnima napakama Δa in $\Delta\alpha''$.



Napaka v merjenju razdalje Δa povzroča radialni premik $BB_1 = \Delta a$ (premik vzdolž radij vektorja – razdalje a); napaka v merjenju kota α povzroča prečni premik $BB_2 = \Delta b$. Skupni premik (kot vektorska rezultanta) je BB_3. Podajmo pogoj, da prečni premik točke B ne bo večji od radialnega (vzdolžnega):

$$\Delta b < \Delta a$$

V enakokrakem trikotniku BOB_2, je kot $\Delta\alpha''$ relativno majhen, zato lahko tetivo BB_2 apkroksimiramo z lokom BB_2. Izračunamo Δb kot razdaljo loka ($l = \Delta b$, $r = a$):

$$\Delta b \approx a \times \frac{\Delta\alpha''}{\rho''}$$

Skladno s prejšnjo neenakostjo:

$$\Delta a \geq a \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} \quad \text{oz.} \quad \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} \leq \frac{\Delta a}{a}$$

Relativno odstopanje kota (v radianih) naj bi ne bilo večje od relativnega odstopanja razdalje.

Primer 5: S katero natančnostjo moramo izmeriti stranico trikotnika, če sta kota izmerjena s natančnostjo $\Delta\alpha=20''$.

$$\frac{20''}{206265} \leq \frac{\Delta a}{a} \qquad \varepsilon_{max} \approx \frac{1}{10\,000}$$

Torej na razdalji recimo 100 m, je lahko odstopanje 1 cm.

Viri:
Urad za standardizacijo in meroslovje (USM), *Merilna negotovost*, 1996.
UM FS-LTM, *Meroslovje*, študijski pripomoček, 2002 (http://www.fs.uni-mb.si/si/inst/ips/ltm/)
Z. Bohte, *Numerične metode*, Ljubljana: DMFA, 1978.
V. Brčić, *Tehnika računanja*, Gradjevinska knjiga Bg, 1975