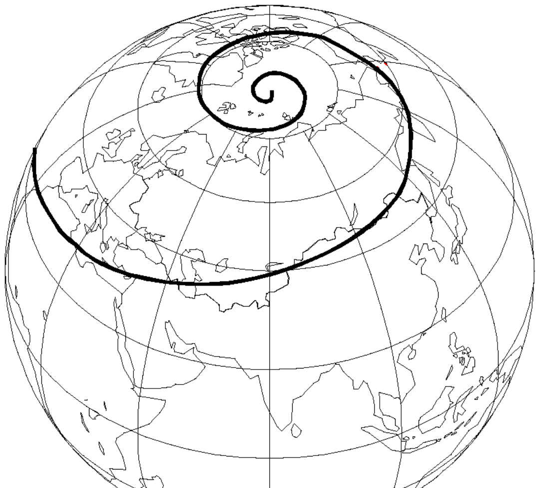
GEODETSKI NALOGI NA KROGLI

1 Pojem ortodrome in loksodrome

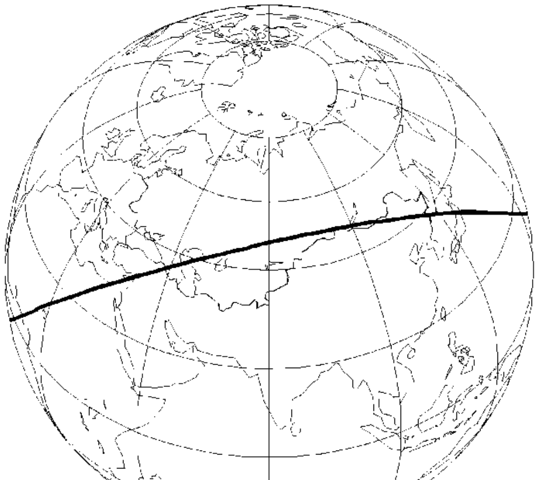
Najkrajša povezava – krivulja med dvema točkama na poljubni ploskvi se imenuje *geodetska krivulja – linija*. Če je ploskev krogla je geodetska linija med dvema točkama na površju krogle lok velikega kroga, ki poteka skozi obe točki. V navigaciji in geodeziji se ta lok imenuje *ortodroma* (iz grščine "ortos" - pravi, "dromos" – pot).

Če smatramo Zemljo za kroglo je ortodroma najkrajša pot med dvema mestoma na Zemlji. Ortodroma seka vsak meridian po drugim kotom, kar pomeni če plujemo po ortodromi, moramo neprestano spreminjati kurz oz. azimut po katerem pluje naše plovilo, kar je praktično nemogoče.

Loksodroma (iz grščine "loksos" – poševen) na krogli je krivulja, ki seka vse meridiane pod istim kotom. Ladja, ki pluje po loksodromi ima prednost konstantnega kurza in pomanjkljivost daljše poti. Loksodroma je prostroska krivulja, ki se polu neprestano približuje in ga nikoli ne doseže. Med dvema točkama na površju Zemlje - krogle je poljubno mnogo loksodrom, V poštev pride samo tista, ki pripelje iz ene v drugo točko v manj kot enem zavoju.

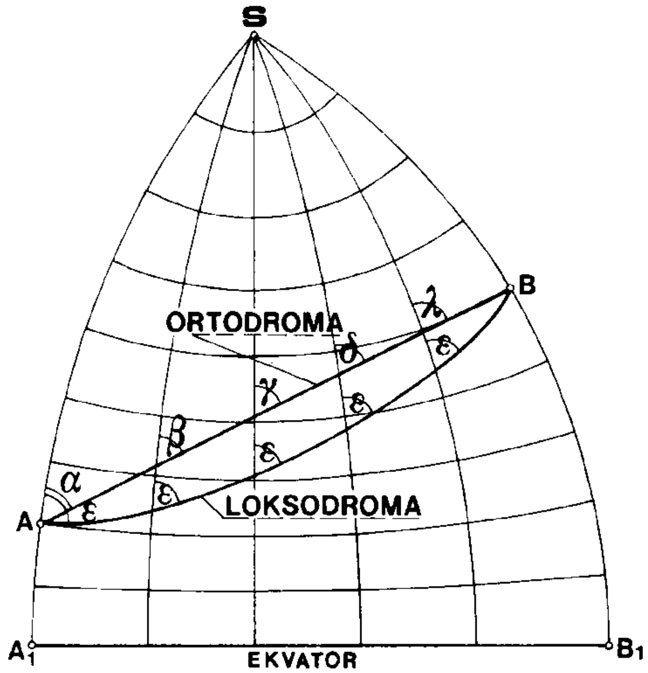


loksodroma



ortodroma

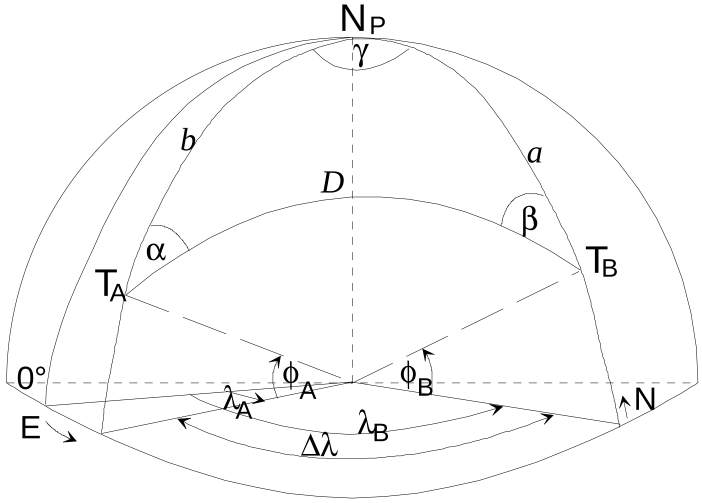
Poseben primer loksodrome na Zemlji so ekvator, vsi meridiani in vzporedniki.. Vzporedniki so loksodrome z azimutom A=90° oz. 270°.



Razlika med ortodromo in loksodromo

2 Prva in druga geodetska naloga

Prvo in drugo geodetsko nalogo imenujemo osnovni geodetski nalogi. Na krogli predstavlja reševanje geodetskih nalog dejansko reševanje splošnega sfernega trikotnika – navtičnega sfernega trikotnika.



elementi:

$a = 90° - \phi_B$
$b = 90° - \phi_A$
D – ortodromna razdalja
$\gamma = |\lambda_B - \lambda_A|$
$\alpha = A_{AB}$
$\beta = 360° - A_{BA}$

2.1 Prva geodetska naloga

Podano je: točka T_A s svojimi geografskimi koordinatami, ortodromna razdalja od točke T_A do točke T_B in azimut A_{AB} do točke T_B. Potrebno je izračunati geografske koordinate točke T_B; torej:

Dano: T_A (ϕ_A,λ_A), D_{AB}, A_{AB}.
Išče se: T_B (ϕ_B,λ_B)

(V mednarodni literaturi je naloga znana kot "direct problem".)

Reševanje prve geodetske naloge pomeni reševanje splošnega sfernega trikotnika (III. tip naloge). Če je dani azimut v mejah med 0° in 180°, je to notranji kot v navtičnem trikotniku. Potem iskana točka T_B leži vzhodno od točke T_A. V primeru da je dani azimut v mejah med 180° in 360° je to zunanji kot v oglišču (dana točka) in je dejansko dana točka T_B (skladno z našim označevanjem). Iskana točka leži zahodno od dane točke.

Ker je ortodromna razdalja D_{AB} podana v dolžinskih enotah, jo moramo pretvoriti v kotne enote:

$$D^{\circ} = \frac{D_{\mathrm{km}} 180^{\circ}}{\pi R_{\mathrm{km}}}$$

Stranico a izračunamo po kosinusovem stavku za stranice:

$$\cos a = \cos b \cos D + \sin b \sin D \cos \alpha$$

$$(b = 90^{\circ} - \phi_A \text{ , } A_{AB} = \alpha)$$

$$a = 90^{\circ} - \phi_B \quad \Rightarrow \quad \phi_B = 90^{\circ} - a$$

Kota β in γ izračunamo s pomočjo Napier-jevih enačb:

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-D}{2}}{\cos\frac{b+D}{2}} \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-D}{2}}{\sin\frac{b+D}{2}} \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\gamma = \Delta\lambda \;\Rightarrow\; \lambda_B = \lambda_A \pm \Delta\lambda$$

Pri izbiranju oznak točk (dana, iskana) moramo upoštevati velikost danega azimuta. Oznake si nato ustrezno priredimo. Enako velja za predznak $\pm\Delta\lambda$. Če je dani azimut $A < 180^o$, $\Delta\lambda$ prištejemo, če pa je dani azimut $A > 180^o$, $\Delta\lambda$ odštejemo. Izjeme nastopajo če sta točki na različnih straneh Greenwichkega meridiana, oz. datumske meje.

2.1.1 Rešitev s pomočjo kotangensnega izreka

Razlika je samo v računanju neznanih kotov β in γ. Stranico a izračunamo pravtako po kosinusnem izreku.

Kotangensni izrek za elemente $c\alpha b\gamma$:

$$\cot c \sin b = \cos b \cos\alpha + \cot\gamma \sin\alpha$$

Od tod izrazimo neznani kot γ:

$$\cot\gamma \sin\alpha = \cot c \sin b - \cos b \cos\alpha$$

$$\tan\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cot c \sin b - \cos b \cos\alpha}$$

Kotangensni izrek za elemente $b\gamma a\beta$:

$$\cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \cot\beta \sin\gamma$$

Od tod izrazimo neznani kot β:

$$\cot\beta \sin\gamma = \cot b \sin a - \cos a \cos\gamma$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos\gamma}$$

2.2 Druga geodetska naloga

Podano sta točki T_A in T_B s svojimi geografskimi koordinatami (ϕ_A,λ_A), (ϕ_B,λ_B). Potrebno je izračunati ortodromno razdaljo med točkama D_{AB} in oba azimuta.

Dano: T_A (ϕ_A,λ_A), T_B (ϕ_B,λ_B)
Išče se: D_{AB}, A_{AB}, A_{BA}.

(V mednarodni literaturi je naloga znana kot "inverse problem".)

Reševanje druge geodetske naloge pomeni reševanje splošnega sfernega trikotnika (III. tip naloge).

Razdaljo D izračunamo s pomočjo kosinusovega stavka za stranice:

$$\cos D = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$(a = 90^\circ - \phi_B \,,\ b = 90^\circ - \phi_A \,,\ \gamma = |\Delta\lambda|)$$

Izračunano razdaljo D_{AB} izrazimo v dolžinskih enotah:

$$D_{km} = \frac{\pi R_{km}}{180^\circ} D^\circ$$

Kota α in β dobimo s pomočjo Napier-jevih enačb:

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Azimuta sta: $A_{AB} = \alpha$, $A_{BA} = 360^\circ - \beta$

2.2.1 Rešitev s pomočjo kotangensnega izreka

Razlika je samo v računanju neznanih kotov α in β. Ortodromno razdaljo izračunamo pravtako po kosinusnem izreku.

Kotangensni izrek za elemente $a\gamma b\alpha$:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \cot \alpha \sin \gamma$$

rešimo kot α:

$$\cot \alpha \sin \gamma = \cot a \sin b - \cos b \cos \gamma$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \gamma}{\cot a \sin b - \cos b \cos \gamma}$$

Kotangensni izrek za elemente $a\gamma b\alpha$:

$$\cot b \sin a = \cos a \cos \gamma + \cot \beta \sin \gamma$$

rešimo kot β:

$$\sin \gamma \cot \beta = \cot b \sin a - \cos a \cos \gamma$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \gamma}{\cot b \sin a - \cos a \cos \gamma}$$