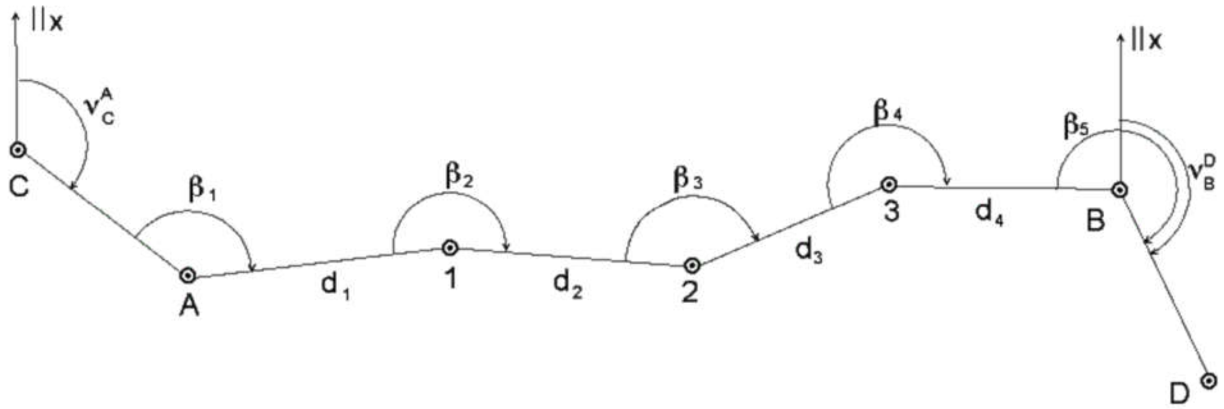
Izračun koordinat poligonskih točk

Poligonske točke povezane v poligone tvorijo poligonsko mrežo. Koordinate poligonskih točk računamo na osnovi merjenih *poligonskih stranic* in *lomnih kotov*. Poligonska stranica je razdalja med dvema poligonskima točkama. Lomni kot je kot med dvema poligonskima stranicama; vrh kota je poligonska točka.

Priklepni poligon

Priključeni ali priklepni poligon poteka med dvema danima geodetskima točkama. Na sliki 1 je slika takšnega poligona.



slika 1: priključeni (priklepni) poligon

Pri tem poligonu moramo poznati koordinate točk A, B, C, D. Merimo priklepna kota β_1, β_5 (priklepni koti so enaki kot lomni koti, le da se imenujejo tako zaradi tega, ker priklepajo poligon na dano točko), lomne kote β_2, β_3, β_4, in poligonske stranice d_1, d_2, d_3, d_4. Na osnovi danih in merjenih količin moramo izračunati neznane koordinate poligonskih točk ⊙1, ⊙2 in ⊙3. Torej:

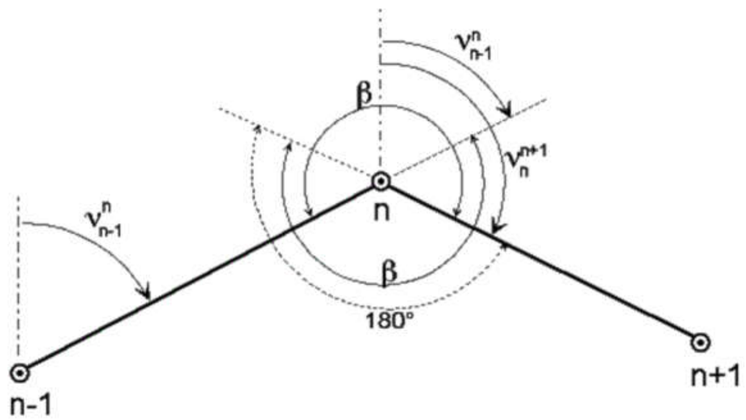
- Dano: točke $A(e_A,n_A)$, $B(e_B,n_B)$, $C(e_C,n_C)$, $D(e_D,n_D)$
- Merjeno: β_1, β_5, β_2, β_3, β_4, d_1, d_2, d_3, d_4
- Neznano: $1(e_1,n_1)$, $2(e_2,n_2)$, $3(e_3,n_3)$

Koordinate neznanih poligonskih točk izračunamo s pomočjo določenih smernih kotov med točkami poligona in merjenih poligonskih stranic.

Najprej iz danih koordinat izračunamo začetni smerni kot ν_C^A in končni smerni kot ν_B^D:

$$\tan \nu_C^A = \frac{e_A - e_C}{n_A - n_C} \qquad \tan \nu_B^D = \frac{e_D - e_B}{n_D - n_B}$$

Da bi izračunali neznane koordinate poligonskih točk moramo izračunati koordinatne razlike Δe in Δn, začenši od prve dane točke A. Koordinatne razlike med točkami poligona pa lahko izračunamo na osnovi znanih smernih kotov posameznih poligonskih stranic. Te izračunamo s pomočjo merjenih lomnih (priklepnih kotov). Prvo obravnavajmo zvezo med smernimi in lomnimi koti (slika 2).



slika 2: izračun smernega kota poligonske stranice

Smerni kot *n*-te stranice dobimo, če smernemu kotu prejšnje stranice prištejemo lomni kot na točki ter vsoti prištejemo, ali odštejemo 180°. Splošno velja:

$$\nu_{n}^{n+1} = \nu_{n-1}^{n} + \beta_{n} \pm 180°$$

180° prištejemo takrat, kadar je vsota manjša od 180°, odštejemo če je vsota večja od 180°.
Za poligon na sliki 1 lahko smerne kote izračunamo na naslednji način:

$$\nu_{A}^{1} = \nu_{C}^{A} + \beta_{1} \pm 180°$$
$$\nu_{1}^{2} = \nu_{A}^{1} + \beta_{2} \pm 180°$$
$$\nu_{2}^{3} = \nu_{1}^{2} + \beta_{3} \pm 180°$$
$$\nu_{3}^{B} = \nu_{2}^{3} + \beta_{4} \pm 180°$$
$$\nu_{B}^{D} = \nu_{3}^{B} + \beta_{5} \pm 180°$$

Smerni kot ν_B^D smo si že v začetku izračunali iz koordinat točk B in D in obe vrednosti bi morali biti enaki. Zaradi neizogibnih napak, ki nastanejo pri merjenju lomnih kotov, smerna kota ne bosta enaka.
Zgornje enačbe seštejemo in dobimo:

$$\nu_{B}^{D} = \nu_{C}^{A} + [\beta] \pm n * 180° \qquad [\beta] = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i}$$

Tako izračunani smerni kot ν_B^D bo odstopal od smernega kota, ki smo ga izračunali iz koordinat. To odstopanje imenujemo *kotno nesoglasje* in ga označimo z f_β. Izračunamo ga po enačbi:

$$f_{\beta} = (\nu_{B}^{D} + n * 180°) - (\nu_{C}^{A} + [\beta])$$

$$\text{"MORA"} - \text{"JE"}$$

pri čemer je *n* število lomnih kotov (število "bet") v poligonu.

Kotno nesoglasje f_β mora biti manjše ali enako od dopustnega nesoglasja Δ_β. Dopustno nesoglasje je določeno s pravilnikom in je odvisno od:
- vrste uporabljenega instrumenta (podatek, natančnost...)
- metoda izmere.

Če je kotno nesoglasje manjše od dopustnega, ga razdelimo enakomerno na vse merjene kote. Zatem izračunamo popravke za merjene lomne kote: kotno nesoglasje delimo s številom lomnik kotov (brez ostanka). Popravki so v sekundah in so celoštevilčne vrednosti, ne decimalne.

$$v_{\beta_i} = \frac{f_\beta}{n}$$

Računska kontrola izračuna popravkov lomnih kotov se glasi:

$$[v_\beta] = f_\beta$$

S popravljenimi lomnimi koti lahko izračunamo dokončne smerne kote poligonskih stranic in nato koordinatne razlike (koordinatne razlike računamo na toliko decimalk, na kolikor so podane izmerjene poligonske stranice):

$$\Delta e_1 = d_1 \sin \nu_A^1 \qquad \Delta n_1 = d_1 \cos \nu_A^1$$
$$\Delta e_2 = d_2 \sin \nu_1^2 \qquad \Delta n_2 = d_2 \cos \nu_1^2$$
$$\Delta e_3 = d_3 \sin \nu_2^3 \qquad \Delta n_3 = d_3 \cos \nu_2^3$$
$$\Delta e_4 = d_4 \sin \nu_3^B \qquad \Delta n_4 = d_4 \cos \nu_3^B$$

Vsota izračunanih koordinatnih razlik bi morala biti enaka razliki koordinat danih točk A in B:

$$[\Delta e] \neq e_B - e_A \qquad [\Delta n] \neq n_B - n_A$$

Zaradi neizogibnih napak pri merjenju poligonskih stranic pride do t.i. *koordinatnih nesoglasij*:

$$f_e = (e_B - e_A) - [\Delta e] \qquad f_n = (n_B - n_A) - [\Delta n]$$

"MORA" – "JE"

Iz koordinatnih nesoglasij lahko izračunamo *skupno linearno nesoglasje* f_d.

$$f_d = \sqrt{f_n^2 + f_e^2}$$

To mora biti manjše ali enako dopustnemu linearnemu nesoglasju Δ_d:

$$f_d \leq \Delta_d$$

Koordinatna nesoglasja f_e in f_n porazdelimo na koordinatne razlike in to sorazmerno dolžinam posameznih poligonskih stranic. Izračunamo popravke $v_{\Delta e}$ in $v_{\Delta n}$:

$$v_{\Delta e_i} = \frac{f_e}{[d]} d_i \qquad v_{\Delta n_i} = \frac{f_n}{[d]} d_i$$

Računska kontrola izračuna popravkov koordinatnih razlik je:

$$[v_{\Delta e}] = f_e \qquad [v_{\Delta n}] = f_n$$

Izračunane popravke algebrsko prištejemo posameznim koordinatnim razlikam. (Predznak popravkov je odvisen od predznaka koordinatnega nesoglasja). Tako dobimo popravljene koordinatne razlike $\Delta e'_i$ in $\Delta n'_i$:

$$\Delta e'_i = \Delta e_i + v_{\Delta e_i} \qquad \Delta n'_i = \Delta n_i + v_{\Delta n_i}$$

S popravljenimi koordinatnimi razlikami izračunamo koordinate poligonskih točk:

$$e_1 = e_A + \Delta e'_1 \qquad n_1 = n_A + \Delta n'_1$$
$$e_2 = e_1 + \Delta e'_2 \qquad n_2 = n_1 + \Delta n'_2$$
$$e_3 = e_2 + \Delta e'_3 \qquad n_3 = n_2 + \Delta n'_3$$
$$e_B = e_3 + \Delta e'_4 \qquad n_B = n_3 + \Delta n'_4$$

Zadnja računska kontrola je ta, da z algebrskim seštevanjem koordinatnih razlik, moramo od dane točke A priti točno v dano točko B. Zaradi zaokroževanja lahko pride do razlike ene do dveh enot na zadnjem decimalnem mestu.

Vsa računanja lahko opravimo v trigonometričnem obrazcu številka 19.

Zaključeni poligon

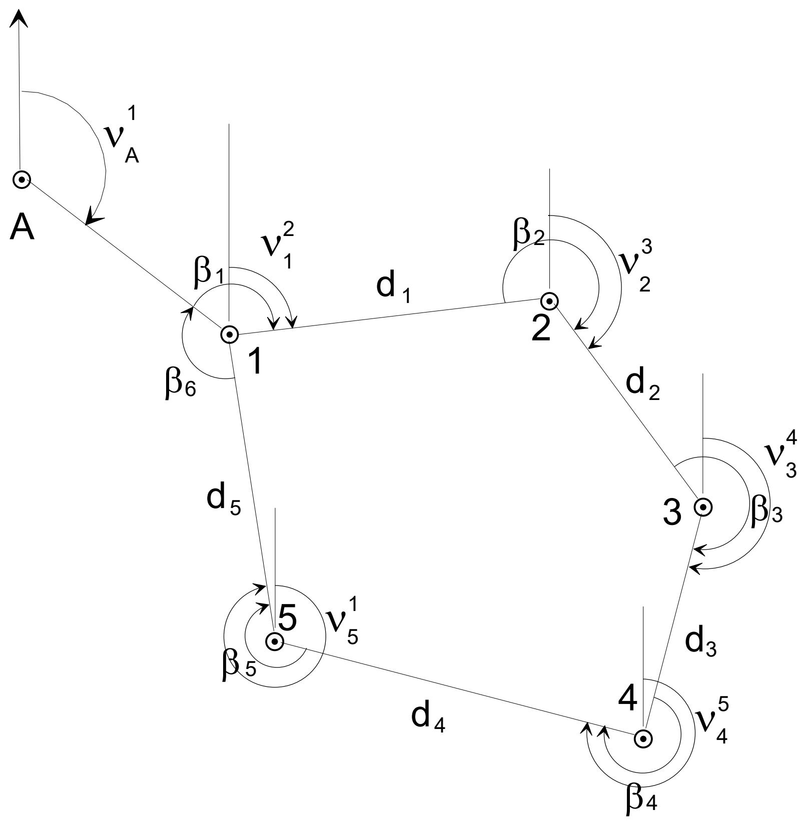
Zaključeni poligon poteka od ene dane točke in se zaključi na isti dan točki. Dana točka je lahko trigonometrična točka ali že prej določena poligonska točka.

Poligon izhaja iz točke ⊙1 in se zaključi na isti točki. Na poligonu na sliki 3 sta podani točki ⊙A in ⊙1. Merimo oba priklepna kota β_1, in β_6, lomne kote β_2, β_3, β_4, β_5, ter poligonske stranice d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Računamo koordinate točk ⊙2, ⊙3, ⊙4 in ⊙5. Merimo vse lomne kote β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 in poligonske stranice d_1, d_2, d_3, d_4.
Postopek izračuna je enak kot pri priklepnem poligonu. Začetni smerni kot je tu ν_A^1, končni smerni kot pa ν_1^A. Kotno nesoglasje lahko izračunamo kot:

$$f_\beta = (\nu_1^A + n * 180°) - (\nu_A^1 + [\beta])$$

"MORA" – "JE"

pri čemer je n število lomnih kotov (število β) v poligonu.



slika 3: zaključeni poligon

Kotno nesoglasje f_β mora biti manjše ali enako od dopustnega nesoglasja Δ_β. Če je kotno nesoglasje manjše od dopustnega, ga razdelimo enakomerno na vse merjene kote. Zatem izračunamo popravke za merjene lomne kote in to tako, da kotno nesoglasje delimo s številom lomnik kotov (brez ostanka).

$$v_{\beta_i} = \frac{f_\beta}{n}$$

Računska kontrola izračuna popravkov lomnih kotov se glasi:

$$[v_\beta] = f_\beta$$

S popravljenimi lomnimi koti lahko izračunamo dokončne smerne kote poligonskih stranic in nato koordinatne razlike:

$$\Delta e_1 = d_1 \sin \nu_1^2 \qquad \Delta n_1 = d_1 \cos \nu_1^2$$
$$\Delta e_2 = d_2 \sin \nu_2^3 \qquad \Delta n_2 = d_2 \cos \nu_2^3$$
$$\Delta e_3 = d_3 \sin \nu_3^4 \qquad \Delta n_3 = d_3 \cos \nu_3^4$$
$$\Delta e_4 = d_4 \sin \nu_4^5 \qquad \Delta n_4 = d_4 \cos \nu_4^5$$
$$\Delta e_5 = d_5 \sin \nu_5^1 \qquad \Delta n_5 = d_5 \cos \nu_5^1$$

Vsota izračunanih koordinatnih razlik v zaključenem poligonu bi morala biti enaka nič:

$$[\Delta e] \neq 0 \qquad \text{in} \qquad [\Delta n] \neq 0$$

Zaradi neizogibnih napak pri merjenju poligonskih stranic nastopi t.i. *koordinatno nesoglasje*:

$$f_e = 0 - [\Delta e] \qquad f_e = -[\Delta e]$$
$$f_n = 0 - [\Delta n] \qquad f_n = -[\Delta n]$$

Tudi tukaj mora biti skupno linearno nesoglasje f_d manjše ali enako dopustnemu linearnemu nesoglasju: $f_d = \sqrt{f_n^2 + f_e^2}$; $f_d \leq \Delta_d$.

Koordinatna nesoglasja f_e in f_n porazdelimo na koordinatne razlike in to sorazmerno dolžinam posameznih poligonskih stranic. Izračunamo popravke koordinatnih razlik $v_{\Delta y}$ in $v_{\Delta x}$:

$$v_{\Delta e_i} = \frac{f_e}{[d]} d_i \qquad v_{\Delta n_i} = \frac{f_n}{[d]} d_i$$

Računska kontrola izračuna popravkov koordinatnih razlik je:

$$[v_{\Delta e}] = f_e \qquad [v_{\Delta n}] = f_n$$

Izračunane popravke algebrsko prištejemo posameznim koordinatnim razlikam. (Predznak popravkov je odvisen od predznaka koordinatnega nesoglasja). Tako dobimo popravljene koordinatne razlike $\Delta e'_i$ in $\Delta n'_i$:

$$\Delta e'_i = \Delta e_i + v_{\Delta ei} \qquad \Delta n'_i = \Delta n_i + v_{\Delta ni}$$

S popravljenimi koordinatnimi razlikamo izračunamo koordinate poligonskih točk:

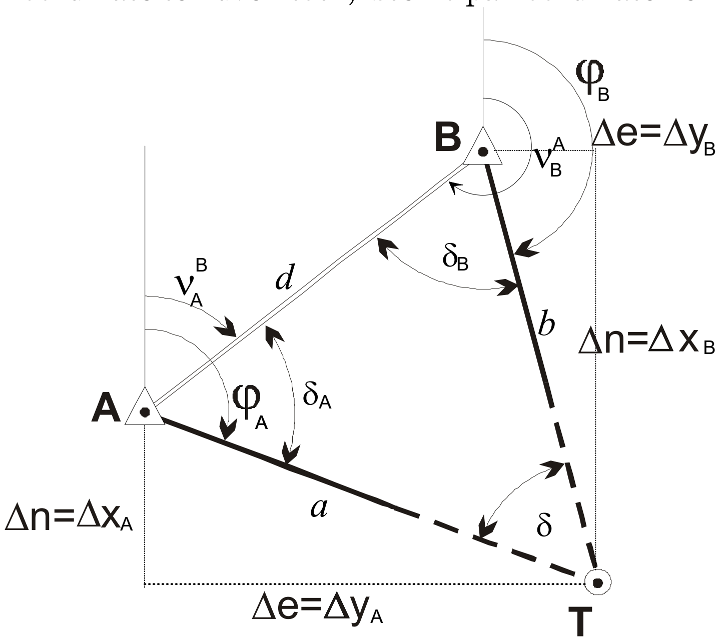
$$e_1 = e_A + \Delta e'_1 \qquad n_1 = n_A + \Delta n'_1$$
$$e_2 = e_1 + \Delta e'_2 \qquad n_2 = n_1 + \Delta n'_2$$
$$e_3 = e_2 + \Delta e'_3 \qquad n_3 = n_2 + \Delta n'_3$$
$$e_4 = e_3 + \Delta e'_4 \qquad n_4 = n_3 + \Delta n'_4$$
$$e_5 = e_4 + \Delta e'_5 \qquad n_5 = n_4 + \Delta n'_5$$

Zadnja računska kontrola je ta, da z algebrskim seštevanjem koordinatnih razlik, začenši od dane točke 1 pridemo nazaj v isto točko 1. Lahko nastopi razlika ene do dveh enot na zadnjem decimalnem mestu, zaradi zaokroževanja.

Zunanji urez

Zunanji urez je postopek določitve koordinat neznane točke na osnovi opazovanih *zunanjih* smeri iz dveh danih točk. Zunanja smer je smer iz dane točke na novo točko. Poleg zunanjih smeri obstajajo tudi t.i *notranje smeri* → smeri iz novih točk na dane točke.

Pri zunanjem urezu opazujemo smeri iz dveh danih točk do nove točke, podane so koordinate teh dveh točk, iščemo pa koordinate neznane točke.



merjeno: δ_A, δ_B
dano: A (e_A,n_A), B (e_B, n_B)
neznano: T (e_T, n_T)

[A (Y_A,X_A), B (Y_B, X_B)
neznano: T (Y_T, X_T)]

Slika 4: zunanji urez

Smerni kot ν_A^B oz. ν_B^A izračunamo iz koordinat danih točk A in B.

φ_A in φ_B sta orientirani smeri. *Orientirana smer* je kot, ki ga oklepa neka smer s severom. Iz slike je razvidno, da orientirane smeri izračunamo:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \delta_A$$
$$\varphi_B = \nu_B^A - \delta_B$$

oz. kot δ v oglišču T izračunamo kot:

$$\delta_A = \varphi_A - \nu_A^B$$
$$\delta_B = \nu_B^A - \varphi_B = (\nu_A^B \pm 180°) - \varphi_B$$
$$\delta = \varphi_B - \varphi_A$$

Računska kontrola je: $\delta_A + \delta_B + \delta = 180°$.

Da bi izračunali koordinate točke T prvo izračunamo koordinatne razlike med točkami A oz. B in T. Pri tem obstajata dva načina izračuna koordinatnih razlik od točk A in B do točke T.

I. način:

iz sinusovega izreka izračunamo stranice trikotnika a in b.

$$\frac{d}{\sin\delta}=\frac{b}{\sin\delta_A} \qquad \frac{d}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin\delta_B}$$

$$b=\frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_A \qquad a=\frac{d}{\sin\delta}\sin\delta_B$$

S pomočjo stranic lahko izračunamo koordinatne razlike od točke A do T oz. od točke B do T:

$$\Delta e_A = a\sin\varphi_A \qquad \Delta e_B = b\sin\varphi_B$$
$$\Delta n_A = a\cos\varphi_A \qquad \Delta n_B = b\cos\varphi_B$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Delta y_A = a\sin\varphi_A & \qquad \Delta y_B = b\sin\varphi_B \\ \Delta x_A = a\cos\varphi_A & \qquad \Delta x_B = b\cos\varphi_B \end{matrix} \right\rangle$$

Koordinate točke T so:

$$e_T\,' = e_A + \Delta e_A \qquad n_T\,' = n_A + \Delta n_A$$
$$e_T\,'' = e_B + \Delta e_B \qquad n_T\,'' = n_B + \Delta n_B$$

Na koncu sledi še zadnja kontrola (koordinati točke T morata biti enaki, če jih računamo s točke A, ter s točke B):

$$e_T' = e_T'' \qquad n_T' = n_T''$$

II. **način**:

$$e_T - e_A = \Delta e_A = (n_T - n_A)\tan\varphi_A$$
$$e_T - e_B = \Delta e_B = (n_T - n_B)\tan\varphi_B$$

$$\left\langle \begin{matrix} y_T - y_A = \Delta y_A = (x_T - x_A)\tan\varphi_A \\ y_T - y_B = \Delta y_B = (x_T - x_B)\tan\varphi_B \end{matrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow\ n_T = \frac{e_B - e_A - n_B\tan\varphi_B + n_A\tan\varphi_A}{\tan\varphi_A - \tan\varphi_B}$$

$$\left\langle x_T = \frac{y_B - y_A - x_B\tan\varphi_B + x_A\tan\varphi_A}{\tan\varphi_A - \tan\varphi_B} \right\rangle$$

$$n_T - n_A = \Delta n_A = \frac{(e_B - e_A) - (n_B - n_A)\tan\varphi_A}{\tan\varphi_A\tan\varphi_B}$$

$$n_T - n_B = \Delta n_B = \frac{(e_B - e_A) - (n_B - n_A)\tan\varphi_B}{\tan\varphi_A\tan\varphi_B}$$

$$\left\langle \begin{array}{l} x_T - x_A = \Delta x_A = \dfrac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A)\tan\varphi_A}{\tan\varphi_A \tan\varphi_B} \\ x_T - x_B = \Delta x_B = \dfrac{(y_B - y_A) - (x_B - x_A)\tan\varphi_B}{\tan\varphi_A \tan\varphi_B} \end{array} \right\rangle$$

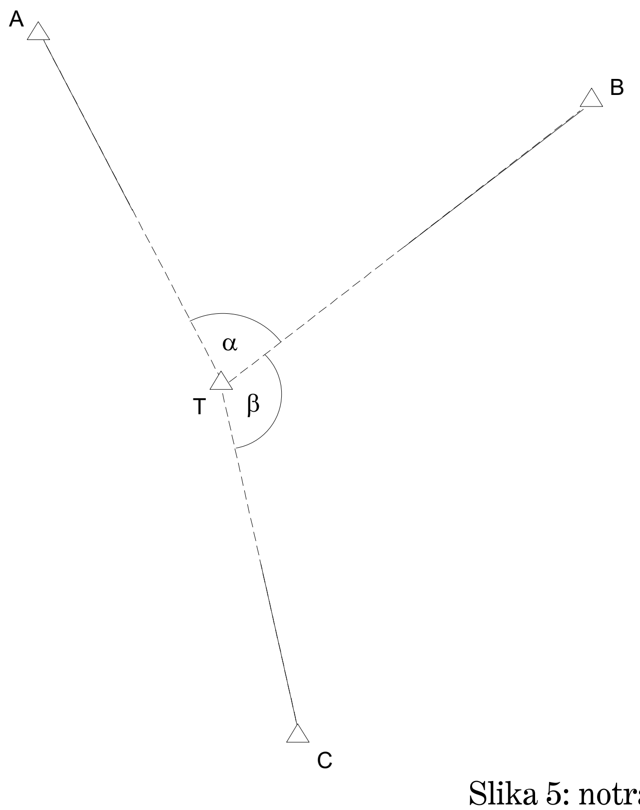
$$e_T' = e_A + \Delta e_A \qquad n_T' = n_A + \Delta n_A$$
$$e_T'' = e_B + \Delta e_B \qquad n_T'' = n_B + \Delta n_B$$

zadnja kontrola je enaka:

$$e_T' = e_T'' \qquad n_T' = n_T''$$

Notranji urez

Notranji urez pomeni določitev koordinat nove točke s pomočjo opazovanih notranjih smeri iz nove točke do tri dane točke.



Dano: A (e_A, n_A), B(e_B,n_B), C(e_C,n_C)

Merjeno: kota α in β.

Neznano: koordinate nove točke T(e_T,n_T)

Slika 5: notranji urez

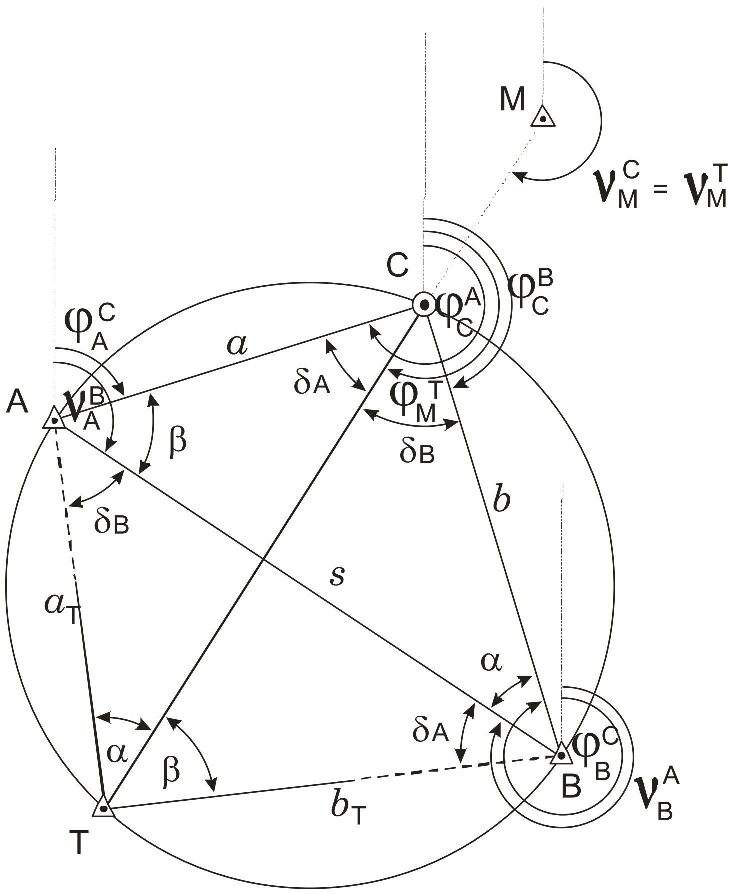
Obstaja več deset različnih rešitev problema notranjega ureza. Tu bomo podali dve rešitvi: Collinsovo in Pothenot-Snelliusovo rešitev.

Collinsova rešitev

Dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B,X_B), M(Y_M,X_M)
Merjeno: kota α in β.
Neznano: koordinate nove točke T(Y_T,X_T)

Tretjo dano točko smo namesto C označili z M, saj bo C pomožna (Collinsova) točka.

Skozi točke T, A in B postavimo krog. Premica TM seka ta krog v točki C (v slavo Collinsa se imenuje Collinsova (pomožna) točka).



slika 6: notranji urez (rešitev po Collinsu)

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B}$$

$$s_{AB} = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

V trikotniku ΔABC sta v ogliščih A in B dana kota α in β. Iz smernega kota ν_A^B in kotov α in β izračunamo orientirane smeri s točk A in B na točko C:

$$\varphi_A^C = \nu_A^B - \beta \qquad \varphi_B^C = \nu_B^A + \alpha = \nu_A^B + \alpha + \pi$$

Kontrola:

$$\delta = 180° - (\alpha + \beta) = \varphi_A^C - \varphi_B^C, \quad \delta = \delta_A + \delta_B$$

Izračun koordinat Collinsove (pomožne) točke $C(y_C,x_C)$ opravimo na osnovi danih koordinat A in B ter orientiranih smeri φ_A^C in φ_B^C.

$$m = 2 \bullet r = \frac{s}{\sin\delta}\text{, pri čemer je } \delta = \delta_A + \delta_B$$

$$a = \overline{AC} = m\sin\alpha \qquad b = \overline{BC} = m\sin\beta$$

$$\Delta y_A^C = a\sin\varphi_A^C \qquad \Delta x_A^C = a\cos\varphi_A^C$$

$$\Delta y_B^C = b\sin\varphi_B^C \qquad \Delta x_B^C = b\cos\varphi_B^C$$

$$y_C = y_A + \Delta y_A^C = y_B + \Delta y_B^C$$

$$x_C = x_A + \Delta x_A^C = x_B + \Delta x_B^C$$

Sedaj imamo določen položaj točke C. Zanima nas položaj točke T. Prvo izračunamo smerni kot s točke M na novo točko C:

$$\tan\nu_M^C = \frac{Y_C - Y_M}{X_C - X_M} = \frac{\Delta Y_M^C}{\Delta X_M^C}$$

Z njegovo pomočjo izračunamo lahko orientirane smeri na novo točko T.

$$\delta_B = \nu_M^C - \varphi_C^B \qquad \delta_A = \varphi_C^A - \nu_M^C$$

$$\varphi_A^T = \nu_A^B + \delta_A$$

$$\varphi_B^T = \nu_B^A - \delta_B$$

$$a_T = \overline{AT} = m\sin\delta_B$$

$$b_T = \overline{BT} = m\sin\delta_A$$

$$\Delta y_A^T = a_T\sin\varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T = a_T\cos\varphi_A^T$$

$$\Delta y_B^T = b_T\sin\varphi_B^T \qquad \Delta x_B^T = b_T\cos\varphi_B^T$$

$$Y_T' = A_A + \Delta y_A^T \qquad X_T' = X_A + \Delta x_A^T$$

$$Y_T'' = Y_B + \Delta y_B^T \qquad X_T'' = X_B + \Delta x_B^T$$

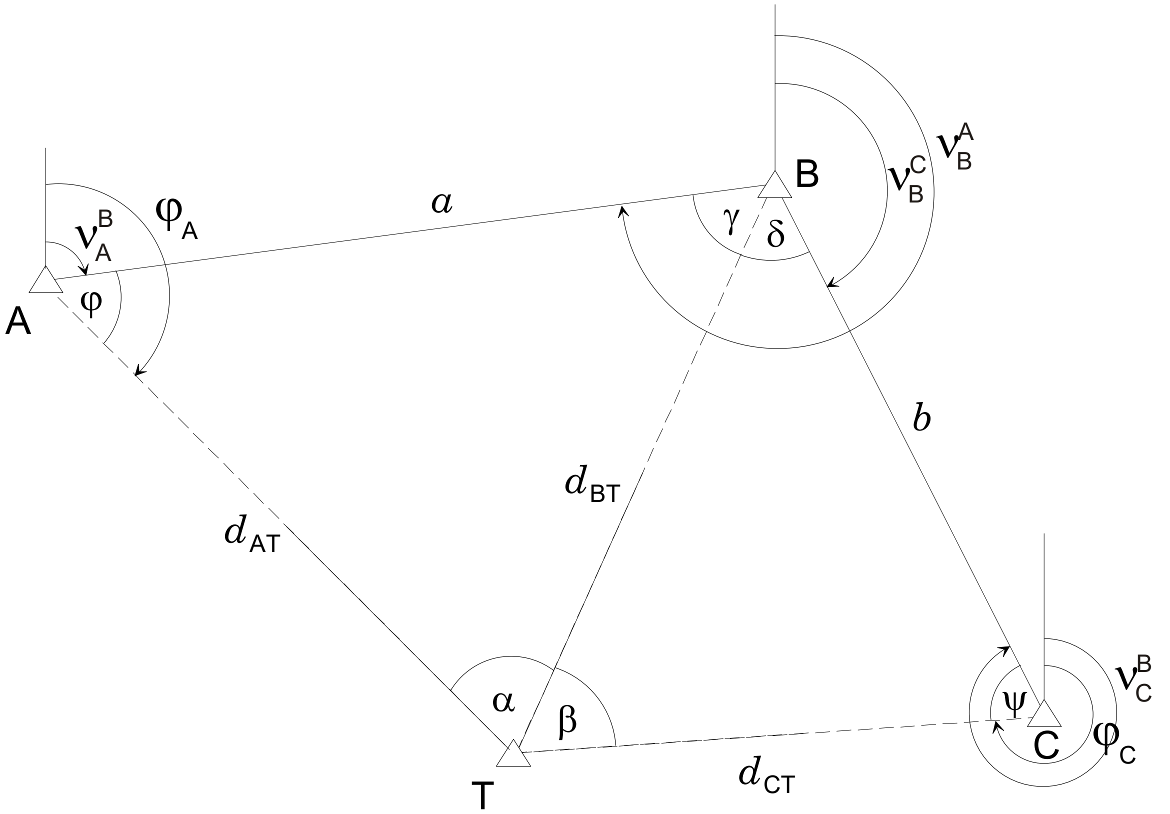
zadnja kontrola je enaka kot pri zunanjem urezu:

$$Y_T' = Y_T'' \qquad X_T' = X_T''$$

Očitno je, da je Collinsova rešitev notranjega ureza enaka dvojnemu zunanjemu urezu.

Rešitev Pothenot - Snellius[1]

Dano: A (Y_A, X_A), B(Y_B,X_B), C(Y_C,X_C)
Merjeno: kota α in β.
Neznano: koordinate nove točke T(Y_T,X_T)



Slika 7: notranji urez, rešitev Pothenot - Snellius

Iz danih koordinat točk A, B in C najprej izračunamo smerne kote in dolžine stranic.

$$\tan \nu_A^B = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\Delta Y_A^B}{\Delta X_A^B} \qquad \tan \nu_C^B = \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C} = \frac{\Delta Y_C^B}{\Delta X_C^B}$$

$$a = \sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}$$

$$b = \sqrt{(Y_B - Y_C)^2 + (X_B - X_C)^2}$$

Da lahko izračunamo orientirane smeri (smerne kote) iz danih (A in C) na novo točko:

$$\varphi_A = \nu_A^B + \varphi \qquad \varphi_C = \nu_C^B - \psi$$

potrebujemo kota φ in ψ.

---

[1] Willebrord Snellius (Willebrord Snel van Royen), (1580 – 1626), nizozemski matematik, astronom. Rešitev objavljena v knjigi "Eratosthenes Batavus", izdani leta 1617.
Laurent Pothenot (1650-1732), francoski matematik; ponovno enako rešitev objavil leta 1692.

Vsota kotov v četverokotniku znaša: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varphi + \psi = 360°$.

Od tod izračunamo polovično vsoto neznanih kotov:

$$\frac{\varphi+\psi}{2} = 180° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$$

Pri tem upoštevamo, da je:

$$\gamma+\delta = \nu_B^A - \nu_B^C$$

Zapišimo polovično vsoto neznanih kotov drugače:

$$\frac{\varphi+\psi}{2} = 180° - \frac{2\sigma}{2} = 180° - \sigma = \pi - \sigma \qquad 2\sigma = \alpha+\beta+\gamma+\delta$$

potrebujemo še $\frac{\varphi-\psi}{2}$:

Izrazimo razdaljo (stranico) iz nove točke d_{BT} iz trikotnikov ABT in CBT. Uporabimo sinusni izrek:

$$d_{BT} = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta}\sin\psi$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}a = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}b$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\frac{a}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

Uvedemo novo spremenljivko $\tan\mu$:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \tan\mu = \frac{a}{b}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad \mu = \arctan\left(\frac{a}{b}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$$

Sedaj uporabimo znane trigonometrične zveze in izraze.

Iz poševnega trikotnika nam je znan tangensni izrek: Velja:

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{\tan\frac{\mu-\nu}{2}}{\tan\frac{\mu+\nu}{2}}$$

kjer sta m, n stranici trikotnika, ter μ in ν nasprotna kota.

Napišimo tangenski izrek za kota φ in ψ, naj bo $m = \tan\mu$ in $n = 1$.

$$\frac{\tan\frac{\varphi-\psi}{2}}{\tan\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{\tan\mu-1}{1+\tan\mu}$$

Spomnimo se enačbe za funkcijo vsote ali razlike dveh kotov (tokrat tangensa):

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

naj bosta kota $\alpha = \mu$ in $\beta = 45°$, kar nam da:

$$\frac{\tan\frac{\varphi-\psi}{2}}{\tan\frac{\varphi+\psi}{2}}=\frac{\tan\mu-\tan 45°}{1+\tan\mu\tan 45°}=\tan(\mu-45°)$$

Od tod lahko izračunamo neznano polovično razliko kotov φ in ψ:

$$\tan\frac{\varphi-\psi}{2}=\tan\frac{\varphi+\psi}{2}\tan(\mu-45°)$$

Na podoben način se lahko dobi polovična razlika kotov tudi v obliki:

$$\tan\frac{\varphi-\psi}{2}=\tan\frac{\varphi+\psi}{2}\cot\left(\mu+45°\right)$$

Izračunamo stranice iz nove točke T do danih točk A in C:

$$d_{AT}=\frac{a}{\sin\alpha}\sin\left[180°-(\alpha+\varphi)\right]=\frac{a}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\varphi)$$

$$d_{CT}=\frac{b}{\sin\beta}\sin(\beta+\psi)$$

Na koncu sledi še izračun koordinatnih razlik:

$$\Delta y_A^T=d_{AT}\sin\varphi_A^T \qquad \Delta x_A^T=d_{AT}\cos\varphi_A^T$$

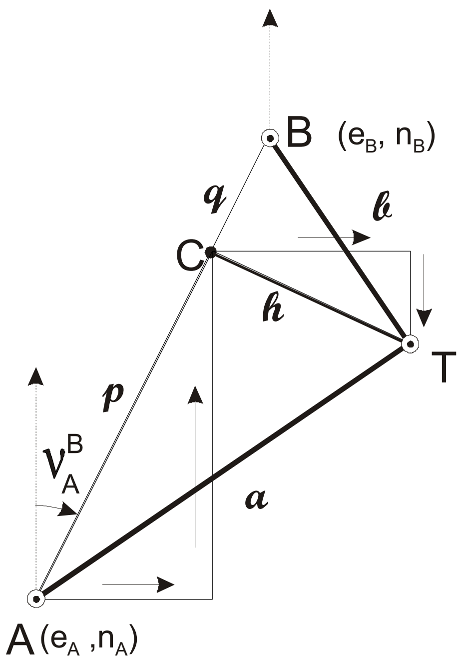
$$\Delta y_C^T=d_{CT}\sin\varphi_C^T \qquad \Delta x_C^T=d_{CT}\cos\varphi_C^T$$

$$Y_T\,'=A_A+\Delta y_A^T \qquad X_T\,'=X_A+\Delta x_A^T$$

$$Y_T\,''=Y_C+\Delta y_C^T \qquad X_T\,''=X_C+\Delta x_C^T$$

Ločni presek

Ločni presek uporabljamo za izračun koordinat točk kadar imamo, namesto merjenih smeri, na voljo merjene razdalje od dveh (treh) danih točk do nove točke.



merjeno:
a, b
dano:
A (e_A,n_A), B (e_B, n_B)
neznano: T (e_T, n_T)

Slika 8: ločni presek, trigonometrična rešitev

Podobno kot pri zunanjem urezu lahko tudi ločni presek izračunamo na dva načina.

1. način (trigonometrični):

Iz kosinusovega izreka izračunamo kote v trikotniku ΔABT:

$$a^2 = d^2 + b^2 - 2db\cos\beta$$

$$b^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{d^2 + a^2 - b^2}{2da}, \qquad \cos\beta = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2db}$$

kontrola je: $d = a\cos\alpha + b\cos\beta$

Zatem izračunamo smerne kote stranic trikotnika a in b:

$$\nu_A{}^T = \nu_A{}^B + \alpha$$

$$\nu_B{}^T = \nu_B{}^A - \beta$$

Smerni kot $\nu_A{}^B$ izračunamo iz koordinat danih točk A in B. S pomočjo smernih kotov izračunamo koordinatne razlike od A in B do točke T:

$$\Delta e_A^T = \Delta y_A^T = a\sin\nu_A^T \qquad \Delta n_A^T = \Delta x_A^T = a\cos\nu_A^T$$
$$\Delta e_B^T = \Delta y_B^T = b\sin\nu_B^T \qquad \Delta n_B^T = \Delta x_B^T = b\cos\nu_B^T$$

$$e_T' = e_A + \Delta e_A^T \qquad n_T' = n_A + \Delta n_A^T$$
$$e_T'' = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T'' = n_B + \Delta n_B^T$$

2. način (geodetski):

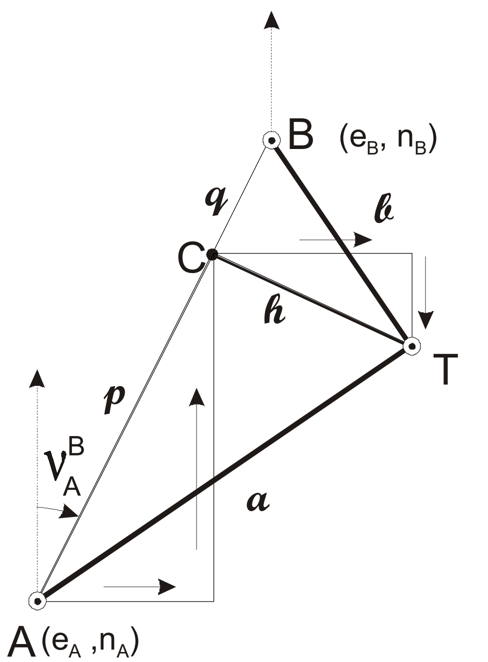
Način računanja je enak izračunu koordinat linijskih točk. Tukaj računamo delne koordinatne razlike od točk A (B) do točke C (vznožje višine h) ter naprej od točke do nove točke T (glej sliko).

h je višina v trikotniku ΔABT

p, q projekciji stranic a in b na stranico d.

Zveza med projekcijami ter višino in stranicami:

$$h^2 = b^2 - q^2$$
$$h^2 = a^2 - p^2$$
$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$
$$a^2 - b^2 = (p+q)(p-q) \qquad (p+q) = d$$
$$\frac{a^2-b^2}{2d} = \frac{p-q}{2}$$
$$\frac{d}{2} = \frac{p+q}{2}$$



slika 9: ločni presek, geodetska rešitev

Projekciji p in q lahko izračunamo iz zgornjih zvez:

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$$

$$q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$$

Če je točka z desne strani daljice AB (velja da je $h \oplus$):

$$e_T^{'} = e_A + p\sin\nu_A^B + h\cos\nu_A^B \qquad e_T^{''} = e_B - q\sin\nu_A^B + h\cos\nu_A^B$$

$$n_T^{'} = n_A + p\cos\nu_A^B - h\sin\nu_A^B \qquad n_T^{''} = n_B - q\cos\nu_A^B - h\sin\nu_A^B$$

Če je točka z leve strani daljice AB (velja da je $h \ominus$):

$$e_T^{'} = e_A + p\sin\nu_A^B - h\cos\nu_A^B \qquad e_T^{''} = e_B - q\sin\nu_A^B - h\cos\nu_A^B$$

$$n_T^{'} = n_A + p\cos\nu_A^B + h\sin\nu_A^B \qquad n_T^{''} = n_B - q\sin\nu_A^B + h\sin\nu_A^B$$

Zadnja kontrola:

$$e_T{'} = A_A + \Delta e_A^T \qquad n_T{'} = n_A + \Delta n_A^T$$

$$e_T{''} = e_B + \Delta e_B^T \qquad n_T{''} = n_B + \Delta n_B^T$$