

# Geodetska astronomija

Vukan Ogrizović

Beograd, 27.9.2007.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>7</b>
1.1	Podela astronomije . . . . .	7
1.2	Uloga geodetske astronomije . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Osnovne formule</b>	<b>9</b>
2.1	Uvod . . . . .	9
2.2	Sferni trougao . . . . .	9
2.2.1	Elementi sfernog trougla . . . . .	9
2.2.2	Sferne polarne koordinate . . . . .	10
2.2.3	Formule sferne trigonometrije . . . . .	11
2.2.4	Pravougli sferni trougao . . . . .	12
2.2.5	Rešavanje sfernog trougla primenom obrazaca sferne trigonometrije . . . . .	12
2.3	Nebeska sfera . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Koordinatni sistemi</b>	<b>15</b>
3.1	Vrste koordinatnih sistema . . . . .	15
3.1.1	Mesni horizontski sistem . . . . .	15
3.1.2	Mesni ekvatorski sistem . . . . .	16
3.1.3	Nebeski ekvatorski sistem . . . . .	16
3.1.4	Nebeski ekliptički sistem . . . . .	17
3.1.5	Koordinate tačke na Zemlji . . . . .	17
3.2	Veze između koordinatnih sistema . . . . .	18
3.2.1	Transformisanje koordinata mesnog horizontskog sistema u mesni ekvatorski sistem	19
3.2.2	Transformisanje koordinata mesnog ekvatorskog sistema u mesni horizontski sistem	20
3.2.3	Transformisanje koordinata mesnog ekvatorskog sistema u nebeski ekvatorski sistem	20
3.2.4	Transformacija koordinata nebeskog ekvatorskog u ekliptički koordinatni sistem . .	21
3.2.5	Transformacija koordinata ekliptičkog u nebeski ekvatorski sistem . . . . .	21
3.2.6	Transformacija upotrebom matrica rotacije . . . . .	22
3.3	Specijalni položaji nebeskih tela . . . . .	23
3.3.1	Prolaz nebeskog tela kroz meridijan (gornja i donja kulminacija nebeskog tela) . .	23
3.3.2	Izlaz i zalaz nebeskog tela . . . . .	25
3.3.3	Prolaz nebeskog tela kroz prvi vertikal . . . . .	26

3.3.4	Najveća digresija (elongacija) nebeskog tela . . . . .	27
3.3.5	Prolaz nebeskog tela kroz zadati almukantar . . . . .	28
3.3.6	Prolaz nebeskog tela kroz zadati vertikal . . . . .	29
3.3.7	Računanje paralaktičkog ugla . . . . .	29
3.4	Diferencijalne promene položaja . . . . .	30
3.4.1	Priraštaji horizontalnih koordinata . . . . .	32
3.4.2	Diferencijalne relacije između ekvatorskih i ekliptičkih koordinata . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Vreme</b>	<b>35</b>
4.1	Tipovi vremenskih skala . . . . .	35
4.2	Prirodne vremenske skale . . . . .	35
4.2.1	Zvezdano vreme . . . . .	35
4.2.2	Pravo, srednje i svetsko vreme . . . . .	36
4.2.3	Julijanski dan i modifikovani julijanski dan . . . . .	41
4.3	Teorijske (dinamičke) vremenske skale . . . . .	41
4.3.1	Efemeridsko vreme . . . . .	41
4.3.2	Savremene dinamičke vremenske skale . . . . .	42
4.3.3	Statističke vremenske skale . . . . .	43
4.3.4	Računanje i distribucija vremena . . . . .	43
4.3.5	Zonsko i ukazno vreme . . . . .	44
4.4	Kalendari . . . . .	45
4.4.1	Julijanski kalendar . . . . .	46
4.4.2	Gregorijanski kalendar . . . . .	47
4.4.3	Milankovićeve reforme . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Promene položaja nebeskih tela</b>	<b>49</b>
5.1	Refrakcija . . . . .	49
5.1.1	Ravanski model refrakcije . . . . .	50
5.1.2	Sferno-simetrični model atmosfere . . . . .	51
5.1.3	Tablice refrakcije . . . . .	53
5.2	Paralaksa . . . . .	54
5.2.1	Geocentrična paralaksa . . . . .	54
5.2.2	Uticaj geocentrične paralaksa na ekvatorske koordinate . . . . .	55
5.2.3	Godišnja paralaksa . . . . .	55
5.3	Aberacija . . . . .	56
5.3.1	Godišnja aberacija . . . . .	57
5.3.2	Dnevna aberacija . . . . .	58
5.4	Precesija . . . . .	59
5.4.1	Uvod . . . . .	59
5.4.2	Lunisolarna precesija . . . . .	60
5.4.3	Planetna precesija . . . . .	62

5.4.4	Opšta precesija . . . . .	63
5.4.5	Izvođenje tačnih formula . . . . .	64
5.5	Nutacija . . . . .	65
5.5.1	Uticao nutacije na ekvatorske koordinate . . . . .	68
5.6	Zvezdano kretanje . . . . .	69
5.6.1	Komponente zvezdanog kretanja . . . . .	69
5.6.2	Sopstveno kretanje . . . . .	70
5.6.3	Baricentrična radijalna brzina . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Srednji i prividni položaj nebeskog tela</b>	<b>75</b>
6.1	Uvod . . . . .	75
6.2	Potrebni podaci . . . . .	75
6.3	Računanje prividnih mesta zvezda . . . . .	76
6.3.1	Računanje geocentričnog vektora položaja . . . . .	76
6.3.2	Računanje popravki za gravitaciono odstupanje svetlosti i godišnju aberaciju . . . . .	78
6.3.3	Precesija i nutacija . . . . .	78
6.3.4	Računanje prividnog mesta zvezde . . . . .	79
6.4	Zvezdani katalozi i astronomski godišnjaci . . . . .	80
6.4.1	Zvezdani katalozi . . . . .	80
6.4.2	Astronomski godišnjaci . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Zemljina rotacija</b>	<b>83</b>
7.1	Uvod . . . . .	83
7.2	Elementi Zemljine rotacije . . . . .	84
7.2.1	Određivanje Svetskog vremena . . . . .	84
7.2.2	Komponente polarnog kretanja . . . . .	85
7.2.3	Nebesko kretanje pola . . . . .	85
7.3	Svođenje sa trenutnog (pravog) pola na CIO . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Međunarodne službe i organizacije</b>	<b>89</b>
8.1	Međunarodni servis za Zemljinu rotaciju i referentne sisteme (IERS) . . . . .	89
8.1.1	Struktura IERS . . . . .	89
8.1.2	Opažачke tehnike . . . . .	91
8.1.3	Proizvodi IERS . . . . .	91



# Poglavlje 1

## Uvod

### 1.1 Podela astronomije

Astronomija je nauka o zvezdama, a posmatrano u širem kontekstu, nauka o nebeskim telima. Osnovni zadaci astronomije su: određivanje položaja i kretanja nebeskih tela, izučavanje njihovog fizičkog sastava, sjaja i temperature, kao i nastanka i razvoja.

Discipline koje se izučavaju u okviru astronomije mogu se podeliti na dve grane:

- klasičnu astronomiju i
- moderne grane astronomije.

U klasične astronomske discipline spadaju:

- poziciona astronomija ili astrometrija,
- nebeska mehanika i
- teorijska astronomija.

Astrometrija se, dalje, deli na dve oblasti:

**sfernu astronomiju**, koja se bavi određivanjem položaja nebeskih tela na nebeskoj sferi, definisanjem odgovarajućih koordinatnih sistema. Osim toga, u okviru ove oblasti izučavaju se i promene koordinata nebeskih tela i

**praktičnu astronomiju**, u okviru koje se opisuju metode merenja i metode ispitivanja astronomskih instrumenata.

Nebeska mehanika se bavi teorijskim ispitivanjem kretanja nebeskih tela, koristeći zakone mehanike i rezultate raznorodnih merenja.

U teorijskoj astronomiji se računaju orbite nebeskih tela iz prethodno opažanih prividnih položaja, kao i računanje efemerida (ekstrapoliranih prividnih položaja) na osnovu pravih položaja nebeskih tela. U narednim poglavljima biće detaljno objašnjena razlika između pravih i prividnih položaja.

U moderne grane astronomije spadaju:

**astrofizika ili fizička astronomija**, koja proučava fizički i hemijski sastav nebeskih tela, kao i uslove koji na njima vladaju. Deli se na (1) praktičnu astrofiziku, koja izučava instrumente i metode ispitivanja i (2) teorijsku astrofiziku, koja daje objašnjenje fizičkih i hemijskih pojava na nebeskim telima,

**zvezdana astronomija**, kako joj i samo ime govori, proučava zvezde i zvezdane grupe, njihov nastanak, uslove i životne cikluse, a deli se na zvezdanu statiku i zvezdanu dinamiku,

**kosmogonija**, koja se bavi proučavanjem nastanka i razvoja nebeskih tela,

**kosmologija**, koja izučava svemir kao celinu,

**radio astronomija**, koja se bavi proučavanjem zračenja sa nebeskih tela u radio delu spektra, instrumentima i metodama za merenje u ovom delu spektra i

**opšta astronomija**, koja čini osnovu svih gore navedenih disciplina.

## 1.2 Uloga geodetske astronomije

Geodetska astronomija pripada oblasti sferne astronomije.

U vreme pre razvoja globalnih sistema za pozicioniranje, osnovna uloga geodetske astronomije sastojala se u pozicioniranju i orijentisanju državnih trigonometrijskih mreža najviših redova.

Kako su sva terestrička geodetska merenja, po svojoj prirodi, relativna, jedini način za uspostavljanje veze između trigonometrijske mreže i primenjenog elipsoida bilo je određivanje astronomskih (geografskih, prirodnih) koordinata tačke na Zemlji (širine i dužine). Da bi se trigonometrijska mreža orijentisala u pravcu paralelnom osi primenjenog elipsoida, mereni su astronomski azimuti određenog broja trigonometrijskih strana opažanjem Sunca, Polare (Severnjače) ili drugih nebeskih tela.

Sada se koordinate tačaka referentnih državnih mreža određuju metodama globalnog pozicioniranja. Međutim, značaj određivanja astronomskih koordinata se ovim nije umanjio, naprotiv. Poznavanjem astronomskih (dobijenih iz astrogeodetskih merenja) i geodetskih (dobijenih primenom GPS) koordinata na istoj stanici, moguće je izračunati otklon vertikalne, veličinu veoma važnu u postupku aproksimacije stvarnog oblika Zemlje, geoida.

Astronomski azimuti se određuju znatno manje nego u prošlosti. Njihov aktuelni značaj je kod određivanja baza za kalibraciju žiro-teodolita. Osim toga, u poslednje vreme se vrše merenja astronomskih azimuta u cilju njihovog upoređivanja sa geodetskim azimutima određenim u odnosu na geocentrični elipsoid. Ovi podaci su od naučnog interesa, pošto omogućavaju praćenje orijentacije geocentričnog elipsoida u odnosu na Zemljinu obrtnu osu.

Geodetska astronomija pripada oblasti referentnih geodetskih mreža i aproksimacije gravitacionog polja i u tesnoj je vezi s: fizičkom geodezijom, matematičkom geodezijom i gravimetrijom.



## Poglavlje 2

# Osnovne formule

### 2.1 Uvod

U geodetskoj astronomiji, određivanja položaja i azimuta objekata na Zemlji vrše se opažanjem nebeskih tela. Rastojanja do udaljenih nebeskih tela, zvezda, ne mogu se izmeriti toliko tačno da bi se mogla koristiti za potrebe pozicione astronomije. Moguće je jedino meriti periodične promene njihovih položaja i odatle izvoditi zaključke o udaljenosti. Za potrebe geodetske astronomije najpogodnije je pretpostaviti da se sva nebeska tela nalaze na jednakoj udaljenosti i meriti samo uglove između njih. Da bi se problem dalje uopštio, pretpostavimo da sfera po kojoj se kreću zvezde ima jedinični poluprečnik. Tako definisana sfera naziva se **nebeskom sferom**. Na njoj se položaj svakog nebeskog tela može izraziti pomoću dve uglovne koordinate. Osim uglovnih merenja, zbog prividnog pomeranja nebeske sfere neophodno je vrlo precizno meriti i vreme registrovanog trenutka prolaska nebeskog tela kroz horizontalni ili vertikalni konac končаницe instrumenta, s obzirom na metodu merenja.

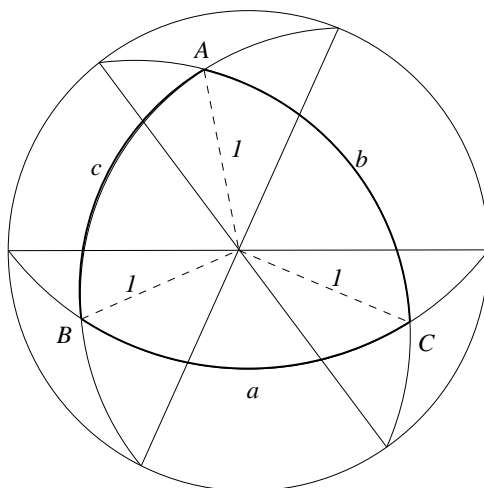
### 2.2 Sferni trougao

Sfera se definiše kao geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od centra sfere. Sfera je dvodimenzionalna površ, što zvuči paradoksalno, pošto su objekti na površi sfere raspoređeni u trodimenzionalnom prostoru. Ipak, kako se objekti prividno kreću samo po površi sfere, njihov položaj je moguće jedinstveno odrediti upotrebom samo dve uglovne koordinate. Svaka ravan koja sadrži centar sfere seče je po **velikom krugu**. **Polovi** velikog kruga su krajnje tačke prečnika sfere upravnog na ravan velikog kruga. Presek sfere i ravni koja ne prolazi kroz centar sfere je **mali krug**.

#### 2.2.1 Elementi sfernog trougla

Posmatrajmo tri tačke na sferi,  $A$ ,  $B$  i  $C$  (slika 2.1) i povucimo lukove velikih krugova  $AB$ ,  $AC$  i  $BC$ . Time smo definisali sferni trougao  $ABC$ . Obeležimo još lukove malim abecednim slovima koja odgovaraju nazivima temena trougla,  $a = BC$ ,  $b = AC$  i  $c = AB$ . Uglove ćemo obeležavati velikim latiničnim slovima njihovih temena. Postoji određena analogija sa pojmom trougla u ravanskoj trigonometriji. Sličnosti i razlike ravnog i sfernog trougla prikazani su u tabeli 2.1. Poluprečnik sfere na kojoj je uočen sferni trougao ima vrednost  $l$ .

Zbir uglova u sfernom trouglu nema konstantnu vrednost, kao ugao u ravni. Zbir uglova sfernog trougla se kreće u granicama od  $180^\circ$  do  $540^\circ$ . Pošto se i strane izražavaju u uglovnim jednicima, može se sračunati i njihov zbir. On je, takođe, promenljiv i uvek manji od  $360^\circ$ .



Slika 2.1: Sferni trougao

Osobina	Trougao u ravni	Sferni trougao
Zbir uglova	$180^\circ$	$180^\circ < \Sigma < 54^\circ$
Zbir strana	-	$< 360^\circ$
Zbir bilo koje dve strane je veći od treće strane	da	da
Strane se izražavaju u	linearnoj meri	uglovnoj meri
Uglovi se izražavaju u	uglovnoj meri	uglovnoj meri

Tablica 2.1: Ravni i sferni trougao

### 2.2.2 Sferne polarne koordinate

Postavimo na jediničnoj sferi desni pravougli Dekartov koordinatni sistem gde su tačke X, Y, Z, redom, presečne tačke osovina koordinatnog sistema i sfere. Neka se tačka A nalazi na površi sfere i neka su njene koordinate A  $(x, y, z)$ . Radijalna koordinata tačke A je radijus vektor  $r$ , polarna koordinata  $\theta$  je ugao  $ZOA$ , a azimutna koordinata  $\phi$  je ugao između ravni  $ZXZ'$  i  $ZAZ'$ . Sa slike 2.2 se može zaključiti da polarna i azimutna koordinata moraju biti u opsegu:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ako se jedinični vektori u pravcu osa  $x$ ,  $y$ , i  $z$  obeleže, redom, sa  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ , tada se vektor položaja tačke A može napisati kao:

$$\vec{r}_A = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.2)$$

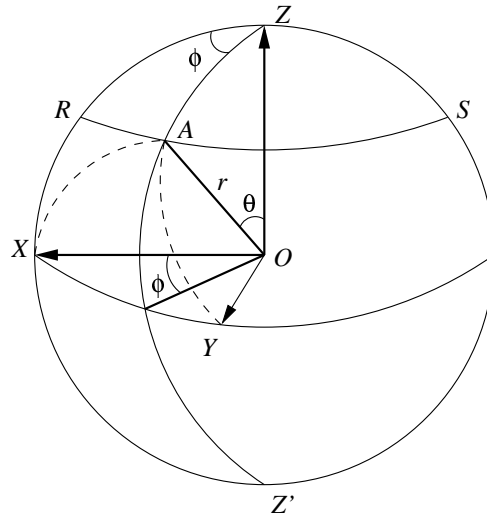
koji je, takođe, jedinični vektor, s obzirom na sferu jediničnog poluprečnika. Pošto su pravouglo koordinate, izražene preko lukova velikih krugova:

$$\begin{aligned} x &= \cos XA \\ y &= \cos YA \\ z &= \cos ZA, \end{aligned} \quad (2.3)$$

uvođenjem sfernih polarnih koordinata dobijamo:

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \phi \\ y &= \sin \theta \sin \phi \\ z &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dekartove koordinate su zgodan način predstavljanja položaja tačke na nebeskoj sferi, pošto pružaju mogućnost upotrebe matičnog računa, čime se dobija na preglednosti i jednostavnosti računanja.



Slika 2.2: Sferne polarne koordinate

Svi sferni koordinatni sistemi koji se koriste u astronomiji mogu se predstaviti Dekartovim koordinatama. Razlike su jedino u izboru početnog pravca i smeru računanja uglova.

### 2.2.3 Formule sferne trigonometrije

Za potrebe rešavanja opštih sfernih trouglova, dovoljno je upamtiti svega tri obrasca:

- sinusni,
- kosinusni i
- sinusno-kosinusni.

Sinusni obrazac glasi:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (2.5)$$

Lako je uočiti sličnost sa sinusnom teoremom u ravanskoj trigonometriji; umesto odnosa strane i sinusa naspramnog ugla, u sfernoj trigonometriji su odnosi sinusa strane i sinusa naspramnog ugla konstantni.

Kosinusni obrazac, takođe, donekle liči na obrazac kosinusne teoreme u ravanskoj trigonometriji:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (2.6)$$

Treća formula nema odgovarajuću analogiju u ravanskoj trigonometriji, ali postoji jednostavan algoritam za njeno pamćenje. Teorema se zove sinusno-kosinusna i oblika je:

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A. \quad (2.7)$$

Ova teorema se odnosi na stranu i njen susedni ugao. Pamti se prema smeru ređanja elemenata sfernog trougla. Teorema se, dakle, zove, sinusno-kosinusna. Ako se krene od strane  $a$  preko ugla  $B$ , piše se (shodno nazivu teoreme),  $\sin a \cos B =$ . Sledeća dva elementa od interesa su strane  $c$  i  $d$  i njima se, takođe, istim redosledom dodaju  $\sin$  i  $\cos$ . Znači, stigli smo do  $\sin a \cos B = \sin c \cos b \dots$  Dodaje se znak minus (što nije teško upamtiti, pošto je to jedina od tri osnovne formule koja u sebi sadrži oduzimanje), posle čega slede ista dva elementa ( $c$  i  $b$ ), samo sa obrnutim sledom funkcija ( $\cos c \sin b$ ). Ovaj poslednji sabirak ima i treći činilac, zahvaćeni ugao  $A$ , kome je dodeljen kosinus, što se može upamtiti po naizmeničnom smenjivanju sinusa i kosinusa u sabircima sinusno-kosinusne teoreme. Kad skupimo ceo algoritam u jednu formulu, dobijamo izraz 2.7.

Iz sinusno-kosinusnog i sinusnog obrasca izvodi se još jedna važna formula sferne trigonometrije, tangensna teorema. Napišimo jednačinu 2.5 u obliku:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \quad (2.8)$$

Deljenjem jednačine 2.8 sa 2.7 dobija se:

$$\frac{\sin a \sin B}{\sin a \cos B} = \frac{\sin b \sin A}{\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A}. \quad (2.9)$$

Skraćivanjem sa  $\sin a$  leve strane jednačine (2.9) dobija se:

$$\tan B = \frac{\sin b \sin A}{\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A}, \quad (2.10)$$

što je, istovremeno, i definitivan oblik tangensnog obrasca. Kod upotrebe tangensnog obrasca treba obratiti pažnju na kvadrant u kome se dobija rezultat, s obzirom na činjenicu da računari, obično, daju kao rezultat ugao u opsegu  $[-180^\circ; +180^\circ]$ . Kvadrant je lako odrediti analizom znakova brojioca i imenioca izraza 2.10.

Jednačinu (2.10) možemo, nalaženjem njene recipročne vrednosti, izraziti i kao, tzv, četvoroelementni obrazac:

## 2.2.4 Pravougli sferni trougao

Pravougli sferni trougao je poseban slučaj sfernog trougla, kod koga jedan od tri ugla iznosi  $90^\circ$ . Za rešavanje elemenata pravouglog sfernog trougla koriste se posebni obrasci, koji se nazivaju Neperovim pravilima. **Neperova pravila** se mogu izraziti na sledeći način:

1. Kosinus svakog elementa pravouglog sfernog trougla jednak je proizvodu kotangensa njemu susednih elemenata, kao i proizvodu sinusa njemu suprotnih elemenata;
2. Umesto kateta pravouglog sfernog trougla, u formule iz prvog pravila unositi njihove komplemente (dopune do  $90^\circ$ ) i
3. Prav ugao nije element pravouglog sfernog trougla.

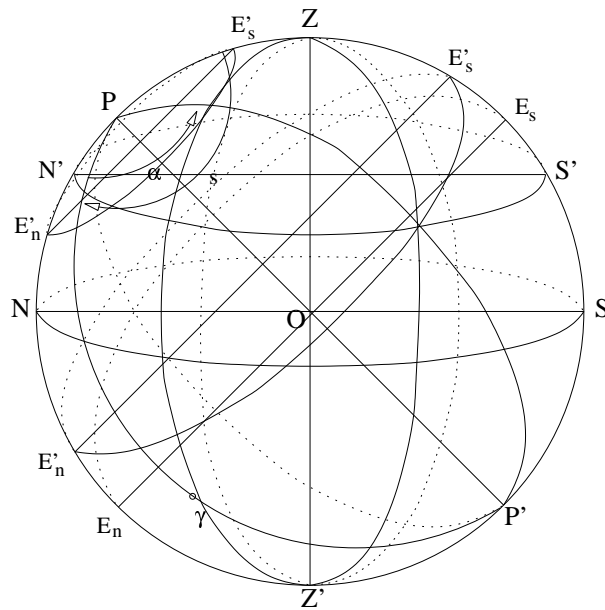
Pošto se, shodno trećem pravilu, prav ugao ne smatra elementom pravouglog sfernog trougla, ukupan broj elemenata je pet (hipotenuza, dve katete i dva ugla). Znači, elementi koji naležu na neki posmatran element su susedni, a preostala dva su suprotni.

Kako je zbir uglova u sfernom trouglu promenljiv, proizlazi da sferni trougao može imati jedan, dva ili, čak, sva tri prava ugla.

## 2.2.5 Rešavanje sfernog trougla primenom obrazaca sferne trigonometrije

Slično kao u ravanskoj trigonometriji, i u sfernoj trigonometriji potrebno je poznavati tri elementa trougla, da bi se mogla rešiti preostala tri. U skoro svim slučajevima sferni trougao se može rešiti direktnom primenom obrazaca 2.5, 2.6, 2.7 i 2.10. Jedino u slučaju kada su poznate dve strane i ugao naspram jedne od njih, koristi se indirektna metoda rešavanja sfernog trougla. Suština metode je u spuštanju visine na treću, nepoznatu stranu, čime se sferni trougao deli na dva pravougla sferna trougla, gde je u jednom od dva novostvorena trougla poznato dva elementa: jedan ugao i hipotenuza. Primenom Neperovih pravila reše se ostali elementi prvog pravouglog trougla, uključujući i zajedničku katetu, pa se ostali elementi drugog pravouglog trougla reše daljom primenom Neperovih pravila.

Ukoliko se u rešavanju sfernog trougla koristi tangensna teorema, treba obratiti pažnju na kvadrant u kome se nalazi ugao koji se računa njenom primenom.



Slika 2.3: Nebeska sfera

## 2.3 Nebeska sfera

Određeni pravci, veliki i mali krugovi na nebeskoj sferi koriste se u definisanju koordinatnih sistema. U zavisnosti od toga gde postavljamo početak koordinatnog sistema, razlikujemo:

- **topocentar**, mesto posmatrača na površi Zemlje,
- **geocentar**, centar mase Zemlje,
- **heliocentar**, centar mase Sunca i
- **baricentar Sunčevog sistema**, koji predstavlja centar mase Sunčevog sistema.

Na nebeskoj sferi mogu se uočiti elementi prikazani na slici 2.3. **Vertikalna** ( $ZOZ'$ ), osnovni pravac, materijalizuje pravac sile Zemljine teže u datoj tački. Strogo posmatrano, vertikalna nije prava linija, zbog nehomogenosti gistine Zemljine unutrašnjosti, već je linija dvostruko zakrivljena u prostoru. Ipak, pošto ovde razmatramo pravac vertikale u datoj tački, vertikalnu ćemo pravolinijski produžiti naviše i naniže do preseka sa nebeskom sferom. Dve tačke u kojima vertikalna preseca nebesku sferu zovu se **zenit** i **nadir**. **Zenit**  $Z$  je najviša tačka na nebeskoj sferi iznad opažača, dok se **nadir**  $Z'$  definiše kao druga presečna tačka vertikale i nebeske sfere.

**Pravi horizont** ( $NESE$ ) je veliki krug nebeske sfere upravan na vertikalnu, koji prolazi kroz mesto opažača. Pravi (ili matematički) horizont treba razlikovati od linije koja razdvaja zemlju i nebo. Pravi horizont je tangentna ravan na pravac sile teže u mestu opažača, dok je linija razdvajanja zemlje i neba nepravilnog oblika (usled topografije), koja je, uz to, zakrivljena zbog zakrivljenosti Zemlje. Zenit se, prema horizontu, može definisati kao primarni, a nadir kao sekundarni pol pravog horizonta.

Mali krug paralelan pravom horizontu zove se **almukantar** ili almukantarat ( $S'\Sigma N'$ ). Ovaj krug se može materijalizovati fiksiranjem durbina teodolita na određeno zenitno odstojanje  $z$ . Njegovim okretanjem oko alhidadne osovine na nebeskoj sferi se, tada, opisuje almukantar  $z$ .

**Polarna osa** ( $POP'$ ) je prava koja materijalizuje Zemljinu osu rotacije. **Nebeski ekvator** je veliki krug nebeske sfere koji je upravan na polarnu osu i prolazi kroz centar nebeske sfere. Tačke prodora polarne ose kroz nebesku sferu nazivaju se severnim i južnim nebeskim polom. **Severni nebeski pol** je primarni, a **južni nebeski pol** sekundarni pol nebeskog ekvatora. Severni nebeski pol se nalazi u blizini zvezde  $\alpha$

Ursae Minoris, koja se zbog toga naziva još i Severnjačom ili Polarom. U blizini južnog nebeskog pola nema takve zvezde, pa se za orijentaciju koristi, takozvani, južni krst, odnosno četiri zvezde koje se nalaze u takvom međusobnom položaju da se, spajanjem suprotnih zvezda, na nebeskom svodu iscrtava krst. **Dnevni paralel** ( $E'_s \Sigma E'_n$ ) je mali krug paralelan ekvatoru. Tokom svog prividnog kretanja po nebeskoj sferi, zvezda opisuje dnevni paralel.

**Vertikal** je veliki krug nebeske sfere koji sadrži pravac vertikalne. Od svih vertikalna koji se mogu postaviti kroz pravac vertikalne (a njih ima beskonačno mnogo), dva imaju posebno značenje: nebeski meridijan i prvi vertikal. **Nebeski meridijan** ( $ZSZ'NP$ ) je vertikal koji sadrži polarnu osu i vertikalnu. Naziva se još i mesnim meridijanom, zbog toga što se odnosi na konkretno mesto posmatranja. Presečne tačke nebeskog meridijana i pravog horizonta nazivaju se **severnom** ( $N$ ) i **južnom tačkom horizonta** ( $S$ ). Južna tačka se nalazi suprotno od severnog nebeskog pola, posmatrano u odnosu na zenit, dok je severna tačka horizonta sa iste strane kao i severni nebeski pol. Vertikal koji je postavljen pod uglom od  $90^\circ$  u odnosu na nebeski meridijan naziva se **prvim vertikalom** ( $ZWZ'E$ ). Prvi vertikal preseca horizont u **istočnoj** ( $E$ ) i **zapadnoj tački horizonta** ( $W$ ). **Deklinacijski krug** ( $P\Sigma P'$ ) je veliki krug nebeske sfere upravan na ravan ekvatora i on sadrži polarnu osu.

- **Ekliptika**, veliki krug po kojem se Zemlja kreće oko Sunca;
- **Osa ekliptike**, prava upravna na ravan ekliptike;
- **Tačke prolećne i jesenje ravnodnevnice**, presečne tačke ekvatora i ekliptike.

Očigledno je da se uglovi na nebeskoj sferi mogu meriti u dva smera: u pravcu kazaljke na satu i obrnuto. Prema konvenciji, pravac suprotan kretanju kazaljke na časovniku naziva se **direktnim** smerom, što odgovara pravcu kretanja Zemlje oko svoje ose. Pravac kretanja kazaljke na časovniku naziva se **obrnutim** ili **retrogradnim** smerom.

## Poglavlje 3

# Koordinatni sistemi

### 3.1 Vrste koordinatnih sistema

Koordinatni sistemi u geodetskoj astronomiji se, prema svojim osnovnim pravcima koji ih čine, dele na sledeće sisteme:

- Mesni horizontski sistem  $(A, z)$ ;
- Mesni ekvatorski sistem  $(\delta, t)$ ;
- Nebeski ekvatorski sistem  $(\delta, \alpha)$ ;
- Nebeski ekliptički sistem  $(\lambda, \beta)$  i
- Galaktički sistem.

Dalje, svaki od ovih sistema se može posmatrati u odnosu na svoj referentni početak, prema čemu razlikujemo:

- Topocentrične;
- Geocentrične;
- Heliocentrične i
- Baricentrične

koordinatne sisteme. Tako, na primer, mesni horizontski koordinatni sistem sa centrom na mestu opažača zove se topocentrični mesni horizontski sistem, a ekvatorski sistem sa centrom u baricentru (koji se koristi u izradi zvezdanih kataloga) naziva se baricentričnim nebeskim ekvatorskim sistemom.

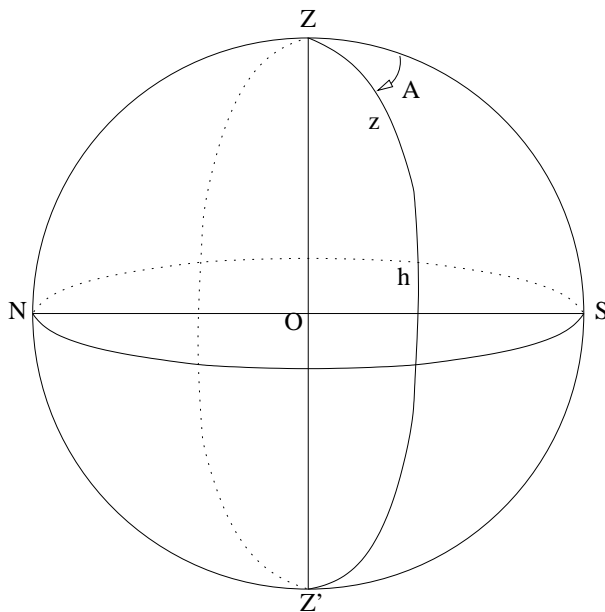
#### 3.1.1 Mesni horizontski sistem

Mesni horizontski koordinatni sistem formiraju ravni pravog horizonta i mesnog meridijana (određenog pravcima lokalnog zenita i Zemljine polarne ose). To su, istovremeno, pravci koje je i najlakše materijalizovati, odnosno, uočiti (slika 3.1).

Koordinate u mesnom horizontskom sistemu su azimut i zenitno odstojanje. **Azimut**  $A$  je ugao koji ravan mesnog meridijana zaklapa sa ravni vertikala zvezde i meri se u retrogradnom smeru (u smeru kazaljke na satu). U geodetskoj astronomiji se koristi **južni azimut**, koji se meri od južne tačke. Azimut uzima vrednosti od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . **Zenitno odstojanje**  $z$  je ugao u ravni vertikala između zenita i nebeskog tela i može imati vrednosti od  $0^\circ$  (mesto zenita) do  $180^\circ$  (nadir). Umesto zenitnog odstojanja može se koristiti i **visina**  $h$ , koja predstavlja komplement zenitnog odstojanja, odnosno:

$$h = 90^\circ - z. \quad (3.1)$$

Zbog Zemljine rotacije, obe koordinate mesnog horizontskog sistema se menjaju tokom vremena, što ih čini nepodobnim za tabličenje.



Slika 3.1: Mesni horizontski sistem

### 3.1.2 Mesni ekvatorski sistem

Koordinate u mesnom ekvatorskom sistemu su deklinacija i časovni ugao (slika 3.2). **Deklinacija**  $\delta$  je ugao koji se meri u ravni deklinacijskog kruga, od ekvatora na sever i jug. Uzima vrednosti od  $-90^\circ$  do  $+90^\circ$ . **Časovni ugao**  $t$  je ugao koji zaklapaju ravni mesnog meridijana i deklinacijskog kruga nebeskog tela. Meri se u retrogradnom smeru i uzima vrednosti od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Zbog svoje veze sa zvezdanim vremenom, časovni ugao se izražava u satima, pa tako, uzima vrednosti od  $0^h$  do  $24^h$ .

Deklinacija je koordinata koja se ne menja tokom vremena onim tempom kao koordinate u mesnom horizontskom sistemu. Svođenjem deklinacije na određenu referentnu epohu, moguće je vršiti tabličenje ove veličine za svaku zvezdu.

Časovni ugao se, pak, menja usled Zemljine rotacije, što mesni ekvatorski sistem koordinata čini nepogodnim za upotrebu u tablicama.

### 3.1.3 Nebeski ekvatorski sistem

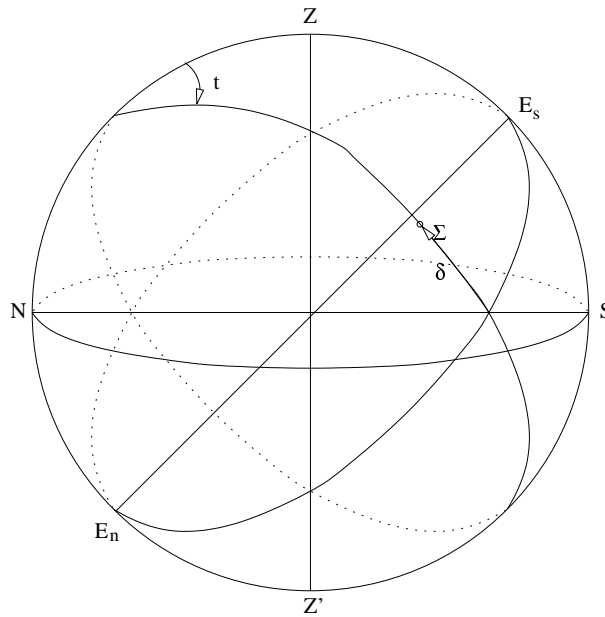
Videli smo u 3.1.2 da, zbog zavisnosti časovnog ugla od Zemljine rotacije, mesni ekvatorski sistem nije moguće iskoristiti u sastavljanju tablica položaja zvezda. Međutim, ako bi se ugao merio počev od uvek istog deklinacijskog kruga koji bi se pomerao zajedno sa prividnim pomeranjem cele nebeske sfere, očuvala bi se njegova nepromenljivost tokom vremena.

Kao tačka čiji se deklinacijski krug može usvojiti za početni pravac izabrana je tačka prolećne ravnodnevnice  $\gamma$ , kao presečna tačka ekvatora i ekliptike (slika 3.3). Iako se ne radi o objektu vidljivim golim okom, pravac prema  $\gamma$  tački se uvek može odrediti.

Tako se dobija **rektascenzija**, ugao između deklinacijskog kruga  $\gamma$  tačke i deklinacijskog kruga zvezde. Rektascenzija se obeležava grčkim slovom  $\alpha$ , a meri se u direktnom smeru, pri čemu može uzeti vrednosti od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Zbog svoje linearne veze sa časovnim uglom i zvezdanim vremenom, ova veličina se najčešće izražava u časovima, pa tako uzima vrednosti od  $0^h$  do  $24^h$ . Druga koordinata u nebeskom ekvatorskom sistemu koordinata je deklinacija  $\delta$ , koja se definiše i meri kao što je opisano u 3.1.2.

Pošto obe koordinate u nebeskom ekvatorskom sistemu koordinata održavaju svoju stalnost, upravo se one koriste u katalozima i godišnjacima. Zvezdano vreme je, prema definiciji, časovni ugao  $\gamma$  tačke i





Slika 3.2: Mesni ekvatorski koordinatni sistem

računa se prema izrazu:

$$s = \alpha + t. \quad (3.2)$$

Ova jednostavna linearna veza je i grafički prikazana na slici 3.3.

### 3.1.4 Nebeski ekliptički sistem

Koordinate u ekliptičkom sistemu koordinata su nebeska latituda i nebeska longituda (slika 3.4). **Nebeska latituda**  $\beta$  je ugao koji se meri u ravni ekliptičkog meridijana, od ekliptike do ekliptičke normale nebeskog tela, pri čemu može uzeti vrednosti od  $-90^\circ$  do  $90^\circ$ . **Nebeska longituda**  $\lambda$  se meri u ravni ekliptike, od ekliptičkog meridijana tačke prolećne ravnodnevnicе  $\gamma$  do ekliptičkog meridijana nebeskog tela i može imati vrednosti od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ .

Umesto nebeske latituda, može se koristiti i **nebeska kolatituda**  $\kappa$ , koja se računa kao komplement nebeske latituda, odnosno:

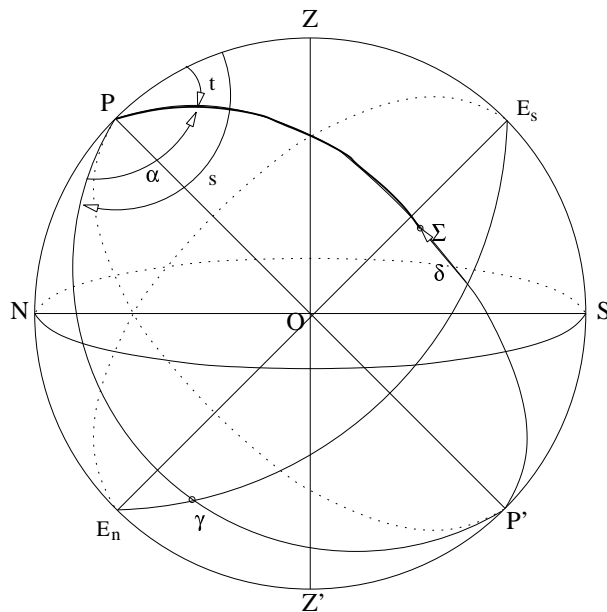
$$\kappa = 90^\circ - \beta. \quad (3.3)$$

### 3.1.5 Koordinate tačke na Zemlji

U geodeziji se u pozicioniranju koriste različite referentne površi i sistemi koordinata, u zavisnosti od toga koja vrsta merenja se koristi za njihovo određivanje. Na primer, rezultati GPS (Globalni sistem za pozicioniranje) merenja se odnose na geocentrični elipsoid WGS-84 (Svetski geodetski sistem). Elipsoid kao aproksimacija Zemljinog oblika se koristi i u postupku redukovanja dužina i uglova merenih na fizičkoj površi Zemlje. U zavisnosti od upotrebljenog sistema visina, kao datum se koriste geoid, kvazigeoid ili sferoid.

#### Prirodne koordinate

Rezultati merenja u geodetskoj astronomiji se vezuju za geoid, odakle se i dobija sistem prirodnih koordinata. Astronomske ili geografske, kako se još nazivaju, koordinate su:



Slika 3.3: Nebeski ekvatorski koordinatni sistem

- Astronomska (geografska) latituda (širina)  $\Phi$ , ugao između ekvatora i normale na realnu nivosku površ (vertikala) i
- Astronomska (geografska) longituda (dužina)  $\Lambda$ , ugao između početnog meridijana i meridijana tačke na koju se longituda odnosi.

Meridijan je ravan koja sadrži Zemljinu osu rotacije. Ekvator je ravan upravna na Zemljinu osu rotacije. Vertikala je dvostruko zakrivljena linija u prostoru. Ona je u svakoj svojoj tački upravna na geopotencijalnu površ. Usled nehomogenosti gustina Zemljine kore sledi i nepravilna zakrivljenost vertikala.

### Geodetske koordinate

Datumska površ za linearna, uglovna i GPS merenja je obrtni elipsoid. Na Zemljinom obrtnom elipsoidu definišu se koordinate:

- Geodetska latituda (širina)  $\phi$ , ugao između ekvatora i normale na normalnu nivosku površ;
- Geodetska longituda (dužina)  $\lambda$ , ugao između početnog meridijana i meridijana tačke i
- Elipsoidna visina  $h$ , odsečak normale od površi elipsoida do tačke.

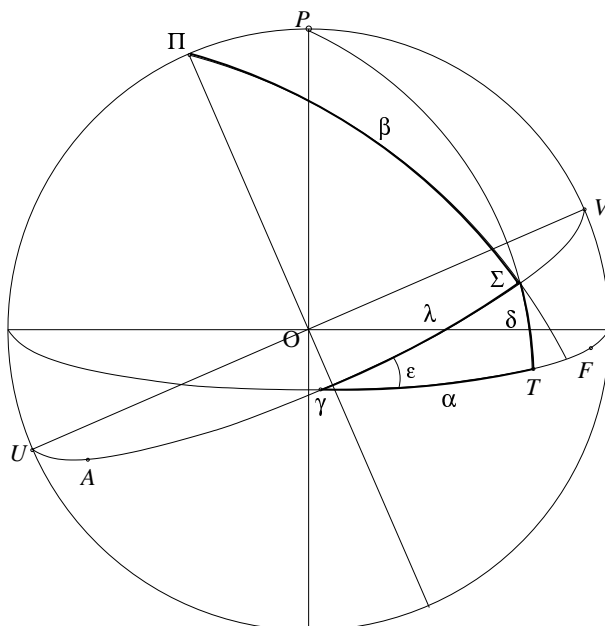
Normala je linija zakrivljena prema severu u ravni meridijana obrtnog elipsoida. Bitno je napomenuti da je elipsoidna visina geometrijskog karaktera i da u njeno određivanje nisu uključena fizička svojstva Zemlje. Veza između elipsoidne visine i fizičkih sistema visina proučava se detaljno u fizičkoj geodeziji.

Usled različitosti vertikale i normale, u svakoj tački fizičke površi Zemlje može se određivati **otklon vertikale**, što spada među najvažnije zadatke Geodetske astronomije.

Pregled nebeskih koordinatnih sistema sa njihovim osnovnim karakteristikama dat je u tabeli 3.1.

## 3.2 Veze između koordinatnih sistema

U svim izvođenjima u ovom poglavlju, smatraćemo da su poznate astronomske koordinate tačke na Zemlji,  $\Phi$  i  $\Lambda$ . Time obezbeđujemo stalno poznavanje tri elementa osnovnog sfernog trougla, kao neophodnog uslova za određivanje ostala tri nepoznata elementa.



Slika 3.4: Nebeski ekliptički sistem

Sistem	Referentna ravan		Parametri merene od referentne površi	
	Primarna	Sekundarna	Primarni	Sekundarni
Horizontski	Nebeski horizont	Nebeski meridijan	Zenitno odstojanje	Azimut
Mesni ekvatorski	Nebeski ekvator	Časovni krug	Deklinacija	Časovni ugao
Nebeski ekvatorski	Nebeski ekvator	Deklinacijski krug	Deklinacija	Rektascenzija
Ekliptički	Ekliptika	Ekliptički meridijan	Ekliptička latituda	Ekliptička longituda

Tablica 3.1: Nebeski koordinatni sistemi

### 3.2.1 Transformisanje koordinata mesnog horizontskog sistema u mesni ekvatorski sistem

Za zapadnu zvezdu, deklinaciju  $\delta$  možemo izračunati primenom kosinusne teoreme na opšti sferni trougao (slika 3.5):

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \Phi) \cos z + \sin(90^\circ - \Phi) \sin z \cos(180^\circ - A). \quad (3.4)$$

Sređivanjem izraza 3.4, sledi:

$$\sin \delta = \sin \Phi \cos z - \cos \Phi \sin z \cos A. \quad (3.5)$$

Za istočnu zvezdu, polazimo od jednačine:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \Phi) \cos z + \sin(90^\circ - \Phi) \sin z \cos(A - 180^\circ), \quad (3.6)$$

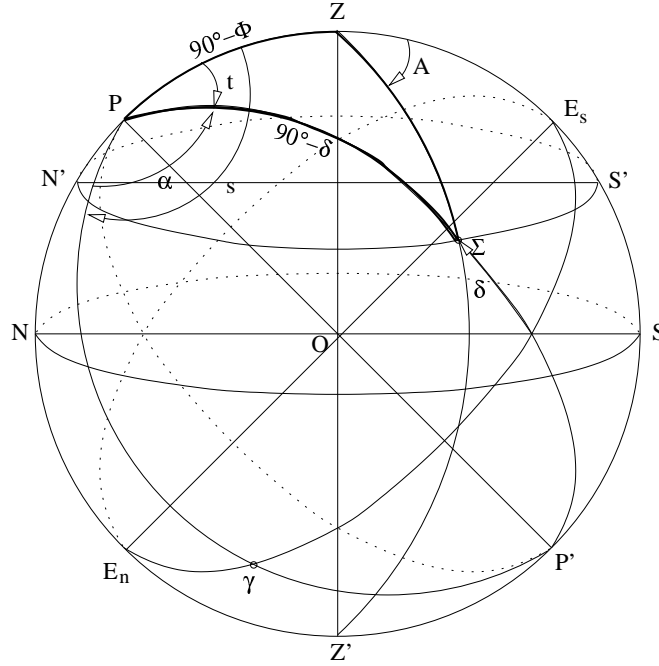
što, posle sređivanja, takođe dovodi do 3.5. Da bismo izračunali časovni ugao, napišimo kosinusnu jednačinu za zenitno odstojanje  $z$ :

$$\cos z = \cos(90^\circ - \Phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \Phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t. \quad (3.7)$$

Sređivanjem jednačine 3.7 i njenim rešavanjem po časovnom uglu  $t$ , dobija se:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \Phi \sin \delta}{\cos \Phi \cos \delta}, \quad (3.8)$$

što predstavlja i definitivan izraz za računanje časovnog ugla.



Slika 3.5: Transformacija koordinata

### 3.2.2 Transformisanje koordinata mesnog ekvatorskog sistema u mesni horizontski sistem

Za obrnutu transformaciju, poslužićemo se, takođe, slikom 3.5. Zenitno odstojanje nebeskog tela se, iz mesnih ekvatorskih koordinata, računa preko kosinusne jednačine 3.7. Njenim sređivanjem dobija se:

$$\cos z = \sin \Phi \sin \delta + \cos \Phi \cos \delta \cos t. \quad (3.9)$$

Napišimo, dalje, sinusnu jednačinu za zapadnu zvezdu u obliku:

$$\frac{\sin z}{\sin t} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)}. \quad (3.10)$$

Sinusno-kosinusna jednačina za stranu  $z$  i ugao  $180^\circ - A$  (unutrašnji ugao kod zenita  $Z$  pri zapadnom prolasku zvezde) glasi:

$$\sin z \cos(180^\circ - A) = \sin(90^\circ - \Phi) \cos(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \Phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t. \quad (3.11)$$

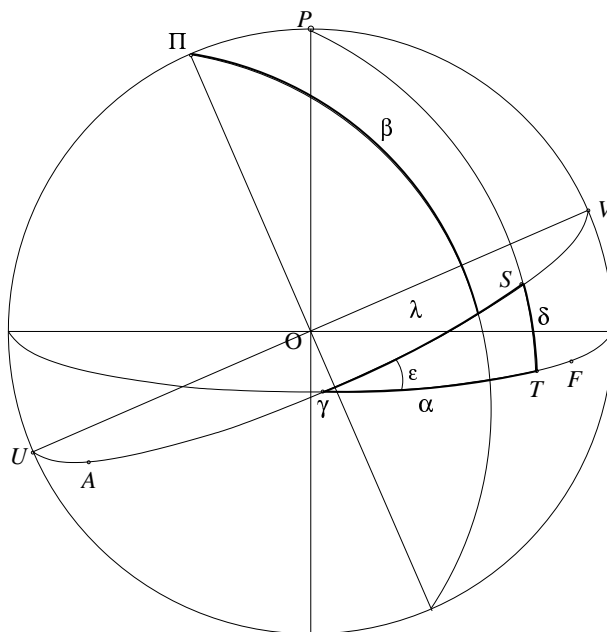
Deljenjem jednačine (3.10) jednačinom (3.11) i sređivanjem njihovog količnika dobija se tangensna jednačina za  $(180^\circ - A)$ :

$$\tan(180^\circ - A) = \frac{\sin t}{\cos \Phi \tan \delta - \sin \Phi \cos t}. \quad (3.12)$$

Jednačina (3.12) se može napisati u raznim oblicima.

### 3.2.3 Transformisanje koordinata mesnog ekvatorskog sistema u nebeski ekvatorski sistem

Ova transformacija je veoma jednostavna. Umesto časovnog kruga zvezde vezane za mesni meridijan, koristi se časovni ugao  $\gamma$  tačke. Po definiciji, časovni ugao  $\gamma$  tačke je zvezdano vreme. Kako se  $\gamma$  tačka



Slika 3.6: Transformacija koordinata iz ekvatorskog u ekliptički koordinatni sistem

prividno pomera zajedno sa svim ostalim nebeskim telima, ugao između njenog deklinacijskog kruga i deklinacijskog kruga bilo koje zvezde je konstantan. Dakle, umesto da se meri časovni ugao zvezde u retrogradnom smeru, uvodi se merenje veličine koja se naziva **rektascenzija**, koje predstavlja ugao između deklinacijskog kruga  $\gamma$  tačke i deklinacijskog kruga zvezde i meri se u direktnom smeru. Veza između časovnog ugla i rektascenzije data je relacijom:

$$\alpha = s - t, \quad (3.13)$$

gde je  $s$  zvezdano vreme. Kako je osnovna koordinata (deklinacija  $\delta$ ) ista u oba sistema, tu nije potrebna nikakva posebna transformacija.

### 3.2.4 Transformacija koordinata nebeskog ekvatorskog u ekliptički koordinatni sistem

Prelazak sa nebeskih ekvatorskih na ekliptičke koordinate vrši se primenom sledećih jednačina (slika 3.6):

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha, \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.14)$$

gde je  $\epsilon$  nagib ekliptike. Formule za računanje nagiba ekliptike biće date u narednim poglavljima.

Odatle se nebeska longituda može izračunati preko tangensne formule, deljenjem treće jednačine (3.14) drugom, odakle sledi:

$$\tan \lambda = \frac{\sin \epsilon \tan \delta + \cos \epsilon \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (3.15)$$

### 3.2.5 Transformacija koordinata ekliptičkog u nebeski ekvatorski sistem

Obrnuta transformacija, prelaz sa ekliptičkih na nebeske ekvatorske koordinate, ostvaruje se primenom jednačina:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \epsilon \sin \beta + \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda, \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \epsilon \sin \beta + \cos \epsilon \cos \beta \sin \lambda. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Rektascenzija se dobija deljenjem treće jednačine (3.16) drugom, pa je:

$$\tan \alpha = \frac{\cos \epsilon \sin \lambda - \sin \epsilon \tan \beta}{\cos \lambda}. \quad (3.17)$$

### 3.2.6 Transformacija upotrebom matrica rotacije

Savremeni način transformisanja koordinata iz jednog sistema u drugi je upotrebom matrica rotacije. Ova metoda je naročito pogodna za implementaciju u računarima, pa se, stoga, preporučuje njena upotreba u svakodnevnom radu.

Zamislimo Dekartov koordinatni sistem sa centrom u masi Zemlje. Neka je  $z$  osa upravna na osnovnu ravan koordinatnog sistema (tabela 3.1) i pozitivna prema primarnom polu,  $x$  osa presek primarne i sekundarne ravni i pozitivna u pravcu sekundarnog pola, a  $y$  osa upravna na  $x$  i  $z$  i zarotirana za  $90^\circ$  u smeru pozitivnom za dati nebeski sistem.

Tada se može uspostaviti veza između krivolinijskih koordinata  $(\mu, \nu)$  i pravougljih Dekartovih koordinata  $(x, y, z)$  primenom matricne jednačine:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mu, \nu} = \begin{bmatrix} \cos \nu \cos \mu \\ \cos \nu \sin \mu \\ \sin \nu \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Ovi izrazi važe za slučaj sfere jediničnog poluprečnika, a kao što smo videli u poglavlju 2.3, ovde je upravo to slučaj.

Ako bismo želeli da zarotiramo sistem za ugao  $\theta$  oko neke od osa, primenićemo ortogonalne transformacione matrice, koje ćemo obeležiti sa  $\mathbf{R}_1(\theta)$  za rotaciju oko  $x$  ose,  $\mathbf{R}_2(\theta)$  za rotaciju oko  $y$  ose i  $\mathbf{R}_3(\theta)$  za rotaciju oko  $z$  ose. Matrice rotacije se računaju na sledeći način:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Primena ortogonalnih transformacija na prethodno opisane transformacije koordinatnih sistema biće data u nekoliko narednih pasusa.

Da bi se mesne horizontske koordinate transformisale u mesne ekvatorske, potrebno je sistem mesnih horizontskih koordinata zarotirati za ugao od  $180^\circ$  oko  $z$  ose i za ugao  $-(90^\circ - \Phi)$  oko  $y$  ose. Iskazano matricno, ova transformacija glasi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t, \delta} = \mathbf{R}_2(\Phi - 90^\circ) \mathbf{R}_3(180^\circ) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A-180^\circ, 90^\circ-z}. \quad (3.22)$$

Pretvaranje mesnih ekvatorskih u nebeske ekvatorske koordinate se, takođe, sastoji iz dva koraka: prevođenja levo-orijentisanog u desno-orijentisani sistem i rotacije za  $-s$  oko ose  $z$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha, \delta} = \mathbf{R}_3(-s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t, \delta}. \quad (3.23)$$

Do ekliptičkih koordinata se može doći preko nebeskih ekvatorskih vrlo jednostavno, rotacijom sistema nebeskih ekvatorskih koordinata za ugao  $\varepsilon$  (nagib ekliptike u odnosu na ekvator) oko  $x$  ose:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\lambda,\beta} = \mathbf{R}_1(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta}. \quad (3.24)$$

Do obrnutih relacija može se lako doći upotrebom pravila za ortogonalne matrice:

$$\begin{aligned} x = \mathbf{R}x' &\Rightarrow x' = \mathbf{R}^{-1}x \\ (\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j)^{-1} &= \mathbf{R}_j^{-1}\mathbf{R}_i^{-1}. \\ \mathbf{R}^{-1}(\theta) &= \mathbf{R}(-\theta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Primenjujući pravila 3.25 na matrice jednačine 3.22, 3.23 i 3.24, dobijaju se jednačine za transformaciju mesnih ekvatorskih u mesne horizontske koordinate:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{A-180^\circ, 90^\circ-z} = \mathbf{R}_3(-180^\circ) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t,\delta}, \quad (3.26)$$

za transformaciju nebeskih ekvatorskih u mesne ekvatorske koordinate:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t,\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_3(s) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} \quad \text{i} \quad (3.27)$$

za transformaciju ekliptičkih u nebeske ekvatorske koordinate:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}_1(\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\lambda,\beta}. \quad (3.28)$$

### 3.3 Specijalni položaji nebeskih tela

Tokom svog prividnog kretanja po nebeskog sferi, nebesko telo prolazi kroz nekoliko karakterističnih položaja u odnosu na opažača. Specijalni prolasci se, u mernim kampanjama, koriste za izbor najpovoljnijeg trenutka opažanja nebeskog tela, a u zavisnosti od veličine koja se meri (azimut ili zenitno odstojanje).

U svim narednim izvođenjima, smatraćemo da su poznate sledeće veličine:

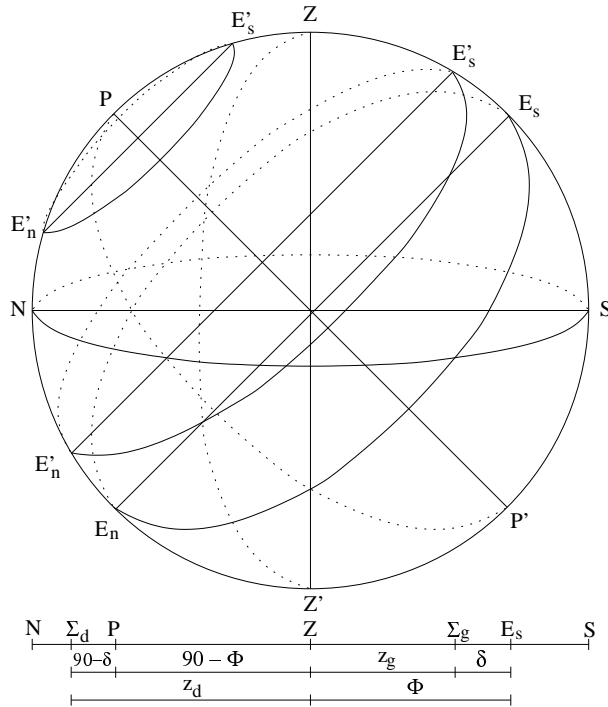
- geografske (astronomske) koordinate mesta opažanja (latituda i longituda) i
- nebeske ekvatorske koordinate nebeskog tela (rektascenzija i deklinacija).

Zadatak je izračunati horizontske koordinate nebeskog tela (azimut i zenitno odstojanje) i zvezdano vreme. U svakom od navedenih primera računaćemo nepoznate elemente osnovnog sfernog trougla na osnovu datih veličina i posebnih uslova koje diktira specijalni položaj nebeskog tela.

#### 3.3.1 Prolaz nebeskog tela kroz meridijan (gornja i donja kulminacija nebeskog tela)

Tokom svog prividnog kretanja, dnevni paralel nebeskog tela dva puta seče ravan mesnog meridijana. Ovi položaji se nazivju gornjom i donjom kulminacijom nebeskog tela. U zavisnosti od toga da li zvezda u gornjoj kulminaciji kulminira južno ili severno od lokalnog zenita, razlikujemo južne i severne zvezde. Južne zvezde su one za koje je ispunjeno:

$$\delta < \Phi. \quad (3.29)$$



Slika 3.7: Gornja i donja kulminacija nebeskog tela

Za severne zvezde važi:

$$\delta > \Phi. \quad (3.30)$$

I severne i južne zvezde u donjoj kulminaciji kulminiraju severno od zenita.

U ovom slučaju, umesto sfernog trougla, horizontske koordinate se računaju u ravni mesnog meridijana, prema oznakama na slici 3.7. U gornjoj kulminaciji, severna zvezda ima horizontske koordinate:

$$A_N = 180^\circ \quad (3.31)$$

$$z_N = \delta - \Phi, \quad (3.32)$$

dok je za južne zvezde:

$$A_N = 180^\circ \quad (3.33)$$

$$z_N = \Phi - \delta. \quad (3.34)$$

U donjoj kulminaciji, jednačine za severne i južne zvezde su iste i glase:

$$A_D = 180^\circ \quad (3.35)$$

$$z_D = 180^\circ - \Phi - \delta. \quad (3.36)$$

Zvezdano vreme u gornjoj i donjoj kulminaciji se računa kao:

$$s_G = \alpha + t = \alpha + 0^h = \alpha \quad (3.37)$$

$$s_D = \alpha \pm 12^h. \quad (3.38)$$

Svaka zvezda, tokom svog dnevnog kretanja po dnevnom paralelu, dva puta prolazi kroz mesni meridijan. Trenuci ovih prolazaka nazivaju se gornjom i donjom kulminacijom. Zadatak je izračunati mesne horizontske koordinate zvezde u ovim trenucima.

Kao što se može uočiti na slici, razlikujemo dva slučaja:

- U gornjoj kulminaciji, zvezda prolazi južno od zenita i



- U gornjoj kulminaciji, zvezda prolazi severno od zenita.

Za zvezde koje u svojoj gornjoj kulminaciji prolaze južno od zenita, važi uslov:

$$\delta < \Phi. \quad (3.39)$$

Pri proučavanju kulminacije zvezde, cela nebeska sfera se može projektovati na ravan mesnog meridijana, pa zatim sve tačke projektovati na pravi horizont, čime se sve tačke (zenit, severna i južna tačka, severni pol i zvezda) preslikavaju na pravu, odakle se horizontske koordinate dobijaju jednostavnim merenjem određenih duži. Naime, za južne zvezde, u gornjoj kulminaciji, zenitno odstojanje se računa kao:

$$z_G^j = \Phi - \delta, \quad (3.40)$$

dok je azimut:

$$A_G^j = 0^\circ. \quad (3.41)$$

Za severne zvezde, zenitno odstojanje i azimut imaju vrednosti:

$$z_G^s = \delta - \Phi \quad (3.42)$$

$$A_G^s = 180^\circ. \quad (3.43)$$

Časovni ugao u trenutku gornje kulminacije zvezde (severne ili južne, svejedno) je:

$$t_G = 0^h. \quad (3.44)$$

Pošto se zvezdano vreme računa prema formuli 4.2, u gornjoj kulminaciji ima vrednost:

$$s = \alpha. \quad (3.45)$$

U donjoj kulminaciji, i za severne i za južne zvezde, horizontske koordinate se računaju na isti način:

$$z_D = 180^\circ - (\Phi + \delta) \quad (3.46)$$

$$A_D = 180^\circ, \quad (3.47)$$

a, pošto je časovni ugao  $t = 12^h$ , mesno zvezdano vreme je:

$$s = \alpha + 12^h. \quad (3.48)$$

### 3.3.2 Izlaz i zalaz nebeskog tela

Trenuci izlaza i zalaza nebeskog tela se dobijaju kao presečne tačke dnevnog paralela nebeskog tela sa ravni pravog horizonta (slika 3.8). Presečna tačka sa zapadne strane mesnog meridijana je tačka zalaza, dok se istočna presečna tačka naziv tačkom izlaza nebeskog tela. Tačke preseka zvezdinog dnevnog paralela i ravni mesnog horizonta su tačke izlaza i zalaza. Da bi takve tačke postojale, potrebno je da bude ispunjen uslov:

$$\delta < 90^\circ - \Phi. \quad (3.49)$$

Nebesko telo se nalazi u trenutku izlaza (zalaza) kada je zenitno odstojanje jednako nuli. Napišimo, stoga, kosinusnu jednačinu za stranu  $90^\circ - \delta$ :

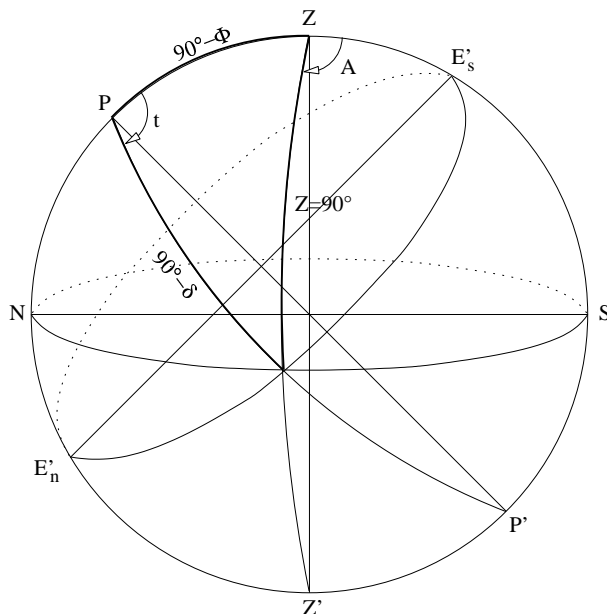
$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos Z \cos(90^\circ - \Phi) + \sin Z \sin(90^\circ - \Phi) \cos(180^\circ - A). \quad (3.50)$$

Sređivanjem (3.50), zamenom  $z = 90^\circ$  i izražavanjem po  $A$  sledi:

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \Phi}. \quad (3.51)$$

Jednačina (3.51) važi za trenutak zalaza. Azimut izlaza se dobija kao:

$$A_E = 360^\circ - A. \quad (3.52)$$



Slika 3.8: Zalaz nebeskog tela

Časovni ugao možemo izračunati primenom kosinusne jednačine za  $z$ :

$$\cos z = \cos(90^\circ - \Phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \Phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t, \quad (3.53)$$

odakle se, posle sređivanja, dobija definitivni izraz za  $t$ :

$$\cos t = -\tan \Phi \tan \delta. \quad (3.54)$$

Zvezde koje ispunjavaju uslov 3.49 nazivaju se **cirkumpolarnim**, a zvezde za koje važi:

$$\delta < -(90^\circ - \Phi) \quad (3.55)$$

dobile su naziv **anticirkumpolarne**.

Dodatna informacija o mestu izlaza i zalaza nebeskog tela može se dobiti na osnovu znaka deklinacije. Ako je deklinacija pozitivna, tada je  $\cos A$  u jednačini (3.51) negativno, odakle proizlazi da će zvezda izlaziti između severne i istočne tačke horizonta, a zalaziće između zapadne i severne. Ako je, pak, deklinacija negativna, tada će  $\cos A$  biti negativno, što znači da će zvezda izlaziti između istočne i južne tačke, a zalaziti između južne i zapadne tačke horizonta.

### 3.3.3 Prolaz nebeskog tela kroz prvi vertikal

Prvi vertikal je definisan azimutom vertikala zvezde od  $90^\circ$  i  $270^\circ$ , što znači da je ovde zadatak izračunati elemente pravouglog sfernog trougla prikazanog na slici 3.9. Prolazak kroz prvi vertikal imaju samo nebeska tela za koje je ispunjen uslov:

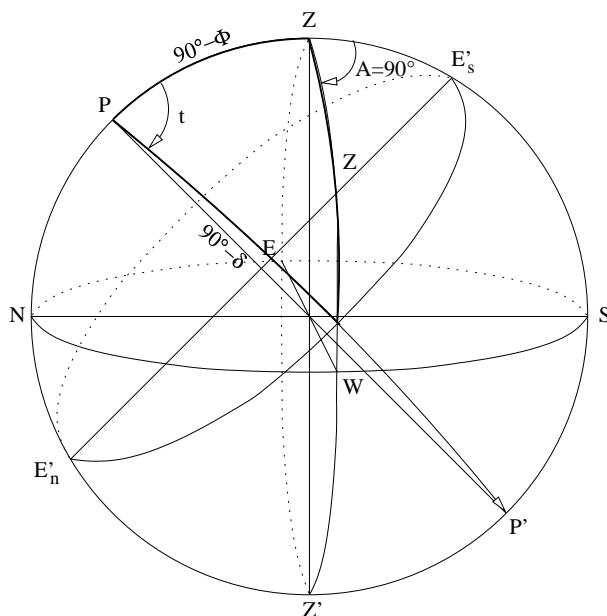
$$\delta < \Phi. \quad (3.56)$$

Da bismo izračunali zenitno odstojanje nebeskog tela u njegovom prolasku kroz prvi vertikal, primenimo Neperova pravila:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \sin(90^\circ - z) \sin \Phi. \quad (3.57)$$

Sređivanjem (3.57), sledi:

$$\cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \Phi}. \quad (3.58)$$



Slika 3.9: Prolazak nebeskog tela kroz prvi vertikal

Azimut nebeskog tela ima, shodno uslovima ovog prolaska, vrednosti:  $i$  z

$$A_E = 270^\circ \quad (3.59)$$

$$A_W = 90^\circ. \quad (3.60)$$

Časovni ugao ćemo sračunati iz:

$$\cos t = \cot(90^\circ - \delta) \cot \Phi = \frac{\tan \delta}{\tan \Phi}, \quad (3.61)$$

odakle se zvezdano vreme dobija iz:

$$s = \alpha + t. \quad (3.62)$$

Jednačina (3.62) predstavlja osnovni način za računanje zvezdanog vremena iz rektascenzije i časovnog ugla i primenjuje se za opšti slučaj paralaktičkog sfernog trougla, tako da važi i za sve ostale specijalne prolaske.

### 3.3.4 Najveća digresija (elongacija) nebeskog tela

S druge strane, zvezde koje kulminiraju severno od lokalnog zenita, za koje je ispunjen uslov:

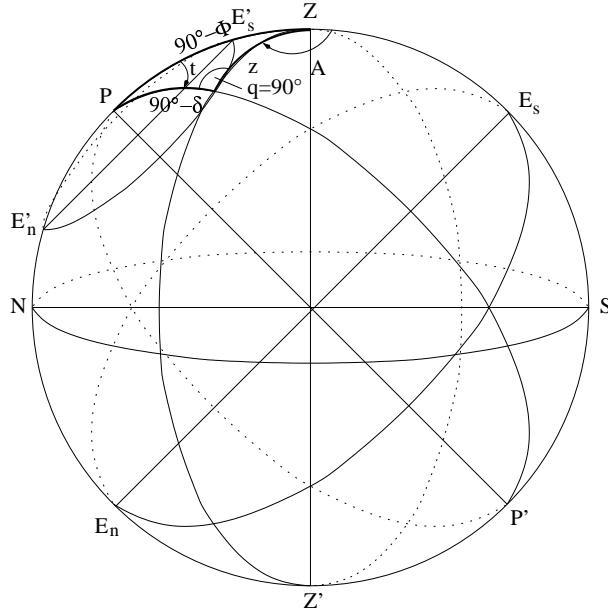
$$\delta > \Phi, \quad (3.63)$$

ne prolaze kroz prvi vertikal, već se može posmatrati njihovo maksimalno udaljenje od ravni mesnog meridijana. Ove tačke se nazivaju tačkama maksimalne digresije ili elongacije nebeskog tela. U trenutku najveće digresije, paralaktički ugao u osnovnom sfernom trouglu je jednak  $90^\circ$ , pa se zenitno odstojanje računa primenom Neperovih pravila:

$$\cos(90^\circ - \Phi) = \sin \delta \sin(90^\circ - z), \quad (3.64)$$

odakle se, posle sređivanja i izražavanja  $z$ , dobija:

$$\cos z = \frac{\sin \Phi}{\sin \delta}. \quad (3.65)$$



Slika 3.10: Najveća digresija nebeskog tela

Azimut zapadnog prolaska se računa iz jednačine:

$$\cos \delta = \sin (90^\circ - \Phi) \sin (180^\circ - A_W), \quad (3.66)$$

odakle sledi:

$$\sin A_W = \frac{\cos \delta}{\cos \Phi}. \quad (3.67)$$

Azimut istočnog prolaska je:

$$A_E = 360^\circ - A_W \quad (3.68)$$

Časovni ugao se računa iz izraza:

$$\cos t = \cot (90^\circ - \Phi) \cot \delta = \frac{\tan \Phi}{\tan \delta}. \quad (3.69)$$

### 3.3.5 Prolaz nebeskog tela kroz zadati almukantar

Prolazak kroz almukantar  $z$  za nebesko telo se može izračunati pod uslovom da je vrednost  $z$  između vrednosti zenitnih odstojanja gornje i donje kulminacije, odnosno, treba da bude ispunjen uslov:

$$z_G < z < z_D. \quad (3.70)$$

U tom slučaju, časovni ugao se može izračunati iz kosinusne jednačine (slika 3.11):

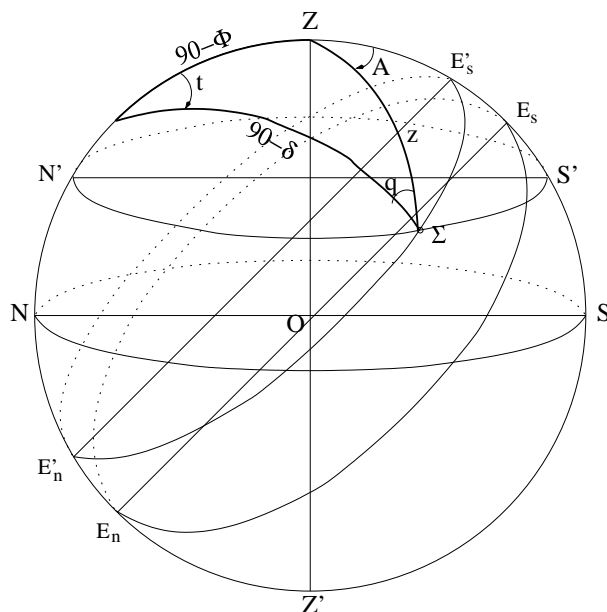
$$\cos z = \cos (90^\circ - \Phi) \cos (90^\circ - \delta) + \sin (90^\circ - \Phi) \sin (90^\circ - \delta) \cos t, \quad (3.71)$$

odakle, posle sređivanja, sledi:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \Phi \sin \delta}{\cos \Phi \cos \delta}. \quad (3.72)$$

Azimut se računa preko tangensne jednačine:

$$\tan A = \frac{\sin t}{\sin \Phi \cos t - \cos \Phi \tan \delta}. \quad (3.73)$$



Slika 3.11: Prolazak kroz dati almukantar

### 3.3.6 Prolaz nebeskog tela kroz zadati vertikal

Rešavanje sfernog trougla kada je poznat azimut vertikala nebeskog tela može se izvesti spuštanjem visine na vertikal iz temena  $P$ , čime se paralaktički trougao deli na dva pravougla sferna trougla. Obeležimo presečnu tačku visine i vertikala sa  $H$ , a ostale elemente kao na slici 3.12. Tada se elementi pravouglog trougla  $ZPH$  računaju primenom Neperovih pravila:

$$\begin{aligned}\tan t_1 &= \frac{1}{\sin \Phi \tan (180^\circ - A_W)}, \\ \tan x &= \frac{\cos (180^\circ - A_W)}{\tan \Phi}, \\ \sin h &= \cos \Phi \sin (180^\circ - A_W).\end{aligned}\quad (3.74)$$

Pošto su, sada, u drugom pravouglom sfernom trouglu, takođe, poznata dva elementa (visina  $h$  i komplement deklinacije), mogu se sračunati i ostali elementi:

$$\begin{aligned}\cos t_2 &= \tan \delta \tan h, \\ \cos y &= \frac{\sin \delta}{\cos h}.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Tada je zenitno odstojanje:

$$z = x + y, \quad (3.76)$$

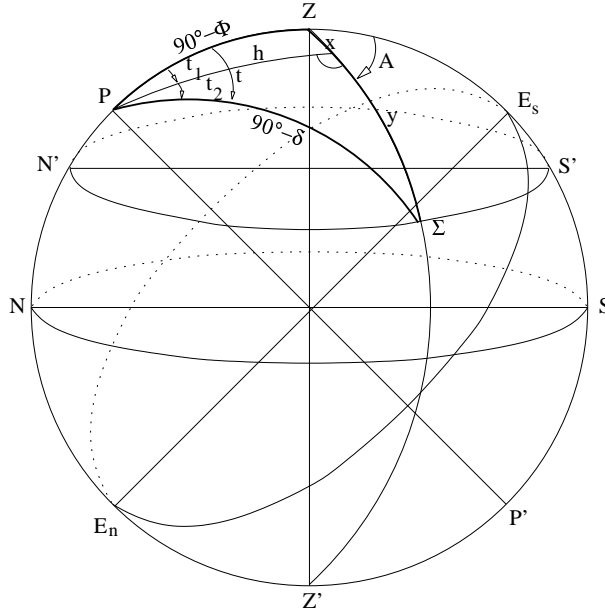
a časovni ugao:

$$t = t_1 + t_2. \quad (3.77)$$

U zavisnosti od kvadranta u kome se nalazi nebesko telo, visina može pasti unutar ili van osnovnog paralaktičkog sfernog trougla, na osnovu čega treba prilagoditi i primenjene formule.

### 3.3.7 Računanje paralaktičkog ugla

Paralaktički ugao je ugao pod kojim nebesko telo ulazi u vidno polje durbina. On se može sračunati iz horizontskih ili ekvatorskih koordinata. Iz horizontskih koordinata paralaktički ugao se računa preko



Slika 3.12: Prolazak kroz zadati vertikal

jednačina:

$$\begin{aligned} \cot(90^\circ - \Phi) \sin z - \cot q \sin(180^\circ - A) &= \cos z \cos(180^\circ - A), \\ \tan q &= \frac{\sin t}{\cos z \cos A + \sin z \tan \Phi}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Računanjem iz ekvatorskih koordinata, primenjujemo formule:

$$\begin{aligned} \cot(90^\circ - \Phi) - \cot q \sin t &= \cos(90^\circ - \delta) \cos t, \\ \tan q &= \frac{\sin t}{-\sin \delta \cos t + \cos \delta \tan \Phi}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ukoliko se nebesko telo nalazi u prvom vertikal, izraz (3.79) se pojednostavljuje i glasi:

$$\sin q = \frac{\cos \Phi}{\cos \delta}. \quad (3.80)$$

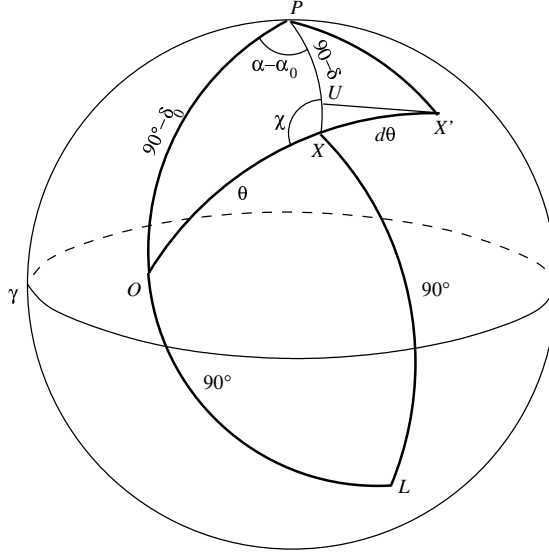
### 3.4 Diferencijalne promene položaja

Osim transformacija koordinata, razmatra se i problem malih promena sfernih koordinata jednog koordinatnog sistema u funkciji koordinata nekog drugog sistema. Ovde će biti opisane veze između horizontskih i ekvatorskih koordinata, kao i veza između ekvatorskih i ekliptičkih koordinata.

U Geodetskoj astronomiji je često potrebno izračunati određene uticaje na ekvatorske koordinate nebeskog tela. Bez obzira na razlog njihovog nastanka, može se uočiti da se promene manifestuju kao mala pomeranja po rektascenziji i deklinaciji, u pravcu neke tačke u prostoru. Tačka u prostoru kod, na primer, godišnje paralakse uvek je usmerena prema Suncu. U slučaju dnevne aberacije, radi se o istočnoj tački horizonta.

Promene koordinata objekata na nebeskoj sferi se mogu uopštiti, što omogućava izvođenje opštih formula za promenu koordinata u pravcu neke proizvoljne tačke.

Uočimo, stoga, na slici 3.13 objekat  $X$  sa svojim nebeskim ekvatorskim koordinatama  $\alpha$  i  $\delta$ . Zbog nekog uzroka tačka je pomeren u tačku  $X'$  ( $\alpha + d\alpha$ ,  $\delta + d\delta$ ). Znak promena po rektascenziji i deklinaciji može biti i pozitivan i negativan. Neka se pomeranje vrši duž luka velikog kruga  $OX$ , gde je tačka  $O$  ( $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ ). Označimo, još luk  $OX$  sa  $\vartheta$  i ugao  $OXP = \chi$ . Tada je promena položaja duž luka  $OX$   $d\vartheta$ , što odgovara



Slika 3.13: Promena položaja nebeskog tela

rastojanju  $XX'$ . Uvedimo, još, pretpostavku da je  $d\vartheta$  mali ugao, ne narušavajući time opštost zaključka. Pomeranje  $d\vartheta$  napišimo u obliku:

$$d\vartheta = k \sin \vartheta, \quad (3.81)$$

gde je  $k$  konstanta proizvoljnog znaka. Neka je tačka  $U$  presečna tačka luka velikog kruga  $PX$  i malog kruga  $X'U$  sa polom u tački  $P$ . Uočimo, dalje, sferne uglove  $\gamma PX = \alpha$  i  $\gamma PX' = \alpha'$ . Odatle je  $UPX' = d\alpha$ . Sa slike se vidi da je  $PX = PU = \pi - (\delta + d\delta)$ , pa je, kao luk malog kruga:

$$UX' = d\alpha \cos(\delta + d\delta) = d\alpha \cos \delta. \quad (3.82)$$

Ako je  $PX' = \pi - \delta$ , onda je  $UX = d\delta$ . Trougao  $UXX'$  nije sferni, pošto jedna strana trougla nije luk velikog, već malog kruga ali, s obzirom na činjenicu da je ovaj trougao mali, može se uvesti takva aproksimacija. U tom slučaju,  $UXX'$  je pravougli trougao sa pravim uglom kod temena  $U$ . Tada se mogu napisati jednačine:

$$\begin{aligned} UX &= XX' \cos(2\pi - \chi) = -XX' \cos \chi \\ UX' &= XX' \sin(2\pi - \chi) = XX' \sin \chi. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Uvodeći (3.81) sledi:

$$\begin{aligned} \cos \delta d\alpha &= k \sin \vartheta \sin \chi \\ d\delta &= -k \sin \vartheta \cos \chi. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Konačno, posmatrajmo sferni trougao  $OPX$ . Sa slike se može videti da je  $\gamma PX = \alpha$  i  $\gamma PO = \alpha_0$ . Imajući to u vidu, zaključuje se da je  $OPX = \alpha - \alpha_0$ . Formirajmo sinusnu jednačinu za sferni trougao  $OPX$ :

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin(\alpha - \alpha)} = \frac{\sin \chi}{\sin(\pi - \delta_0)}. \quad (3.85)$$

Sinusno-kosinusni obrazac za stranu  $\vartheta$  i nalegli ugao  $\chi$  ima oblik:

$$\sin \vartheta \cos \chi = \sin(\pi - \delta) \cos(\pi - \delta_0) - \cos(\pi - \delta) \sin(\pi - \delta_0) \cos(\alpha - \alpha_0). \quad (3.86)$$

Sređivanjem (3.85) i (3.86) i njihovom zamenom u (3.84), dobija se konačni rezultat za promene nebeskih ekvatorskih koordinata:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{k \cos \delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos \delta} \\ d\delta &= k (\sin \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos \delta \sin \delta_0). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Da bi se na opisani način računale promene  $d\alpha$  i  $d\delta$ , potrebno je samo poznavati koordinate tačke  $O$  i u jednačine (3.87) uneti koeficijent  $k$ , posle čega se, ako je  $k$  izraženo u radijanima, promene  $d\alpha$  i  $d\delta$

dobijaju, takođe, u radijanima. Da bismo promene ekvatorskih koordinata dobili u jedinicama koje inače koristimo za ovu vrstu koordinata (časovi za rektascenziju i stepeni za deklinaciju), identitet (3.87) dobija sledeću formu:

$$\begin{aligned} d\alpha^S &= \frac{k'' \cos \delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0)}{15 \cos \delta} \\ d\delta'' &= k'' (\sin \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \cos \delta \sin \delta_0). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Ako je koeficijent  $k$  izražen u lučnim sekundama,  $d\alpha$  se dobija u sekundama, a  $d\delta$  u lučnim sekundama.

Kao što je u naslovu i rečeno, ovaj postupak se, zbog uvedenih aproksimacija, koristi kada su promene koordinata male. Ako su promene takve da tačnost prvog reda nije dovoljna, potrebno je primeniti neku drugu metodu.

### 3.4.1 Priraštaji horizontskih koordinata

Priraštaji horizontskih koordinata izražavaju male promene horizontskih koordinata u vremenu. Da bismo iz izračunali, napišimo kosinusnu jednačinu za  $z$  (3.53) u implicitnom obliku:

$$F : \cos z - \sin \Phi \sin \delta - \cos \Phi \cos \delta \cos t = 0, \quad (3.89)$$

nađimo njen totalni diferencijal i izrazimo, odatle,  $dz$ :

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\sin \Phi \cos \delta \cos t - \cos \Phi \sin \delta}{\sin z} d\Phi + \\ &+ \frac{\cos \Phi \sin \delta \cos t - \sin \Phi \cos \delta}{\sin z} d\delta + \\ &+ \frac{\cos \Phi \cos \delta \sin t}{\sin z} dt. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Kako je, iz sinusne teoreme:

$$\cos \delta \sin t = \sin z \sin A, \quad (3.91)$$

zanemarivanjem promene zenitnog odstojanja u funkciji od deklinacije i širine, sledi:

$$dz = \cos \Phi \sin A dt, \quad (3.92)$$

čime je diferencijalna promena zenitnog odstojanja izražena u funkciji časovnog ugla. U prvom vertikalnu je promena zenitnog odstojanja:

$$dz = \cos \Phi dt, \quad (3.93)$$

dok je u meridijanu jednaka nuli:

$$dz = 0, \quad (3.94)$$

što znači da se zvezda kreće po horizontalnom koncu instrumenta.

Računanje diferencijalne promene azimuta izvodimo iz implicitno napisane sinusno-kosinusne jednačine za osnovni paralaktički trougao:

$$\sin z \cos(180^\circ - A) = \sin(90^\circ - \Phi) \cos(90^\circ - \delta) - \cos(90^\circ - \Phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t. \quad (3.95)$$

Sređivanjem (3.95) i računanjem parcijalnih izvoda, dobija se:

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\cos z \cos A}{\sin z \sin A} dz - \frac{\cos z}{\sin z \sin A} d\Phi + \\ &+ \frac{\cos \Phi \cos \delta + \sin \Phi \sin \delta \cos t}{\sin z \sin A} d\delta + \\ &+ \frac{\sin \Phi \cos \delta \sin t}{\sin z \sin A} dt. \end{aligned} \quad (3.96)$$



Uvođenjem smene (3.92) u prvi sabirak sa desne strane jednačine (3.96), smenom (3.91) u poslednji sabirak i zanemarivanjem članova uz  $d\Phi$  i  $d\delta$ , dobija se konačni izraz za diferencijalnu promenu azimuta:

$$dA = \left( \sin \Phi + \frac{\cos \Phi \cos A}{\tan z} \right) dt. \quad (3.97)$$

Promena azimuta u prvom vertikalalu je, tada:

$$dA = \sin \Phi dt. \quad (3.98)$$

Priraštaj azimuta za zvezde koje kulminiraju severno od zenita računa se zamenom izraza:

$$\cos \delta \cos q = \sin z \sin \Phi + \cos z \cos \Phi \cos A \quad (3.99)$$

u jednačinu (3.97), odakle, posle sređivanja, sledi:

$$dA = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} dt. \quad (3.100)$$

Analizom relacije (3.100) vidi se da severne zvezde imaju najmanju promenu u prvom vertikalalu (kada je  $q = 90^\circ$ ), kada se zvezda kreće po vertikalnom koncu končanice.

Kod primene jednačina: (3.92), (3.97) i (3.100), treba obratiti pažnju na jedinice koje se koriste. Pošto se časovni ugao, najčešće, izražava u vremenskim jedinicama, a zenitno odstojanje i azimut u lučnim, prema tome treba prilagoditi i jedinice, odakle slede formule pogodne za računanje diferencijalnih promena horizontskih koordinata:

$$\begin{aligned} dz'' &= 15 \cdot \cos \Phi \sin A dt^S \\ dA'' &= 15 \left( \sin \Phi + \frac{\cos \Phi \cos A}{\tan z} \right) dt^S \\ &= 15 \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} dt^S. \end{aligned} \quad (3.101)$$

### 3.4.2 Diferencijalne relacije između ekvatorskih i ekliptičkih koordinata

Diferencijalne relacije između nebeskih ekvatorskih i ekliptičkih koordinata se dobijaju diferenciranjem jednačina (??) - (??), odakle se dobija:

$$d\alpha = \frac{\cos r \cos \beta d\lambda - \sin r d\beta - \sin \delta \cos \alpha d\epsilon}{\cos \delta} \quad (3.102)$$

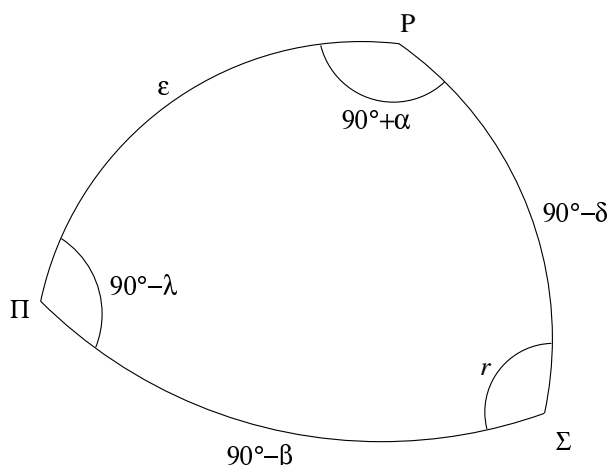
$$d\delta = \sin r \cos \beta d\lambda + \cos r d\beta + \sin \alpha d\epsilon. \quad (3.103)$$

Obrnute relacije glase:

$$d\lambda = \frac{\cos r \cos \delta d\alpha + \sin r d\delta + \sin \beta \cos \lambda d\epsilon}{\cos \beta} \quad (3.104)$$

$$d\beta = -\sin r \cos \delta d\alpha + \cos r d\delta - \sin \lambda d\epsilon, \quad (3.105)$$

gde je  $r$  ugao kod temena  $\Sigma$  u sfernom trouglu čija su temena: severni nebeski pol ( $P$ ), severni ekliptički pol ( $\Pi$ ) i zvezda ( $\Sigma$ ), kao na slici 3.14.



Slika 3.14: Ekliptički trougao

# Poglavlje 4

## Vreme

### 4.1 Tipovi vremenskih skala

Generalno, vremenske skale koje se koriste u Astronomiji možemo podeliti u tri grupe:

- prirodne,
- teorijske i
- statističke.

**Prirodnim** vremenskim skalama se nazivaju one koje se mogu dobiti iz direktnih astronomskih merenja. To su, istovremeno, skale koje su prve i nastale i koje su se prve koristile za merenje vremena. Napredak ljudske zajednice je zahtevao veću tačnost merenja vremena, što prirodne vremenske skale nisu mogle da zadovolje, pa su uvedene **teorijske** skale vremena, uvodeći dinamičke teorije. Problem koji se pojavio bila je činjenica da se dinamičko vreme nije moglo dobiti u realnom vremenu, već samo a posteriori. Konačno, problemi su prevaziđeni uvođenjem **atomskih** vremenskih skala, koje su, uvodeći dužinu sekunde jednaku trajanju sekunde dinamičkog vremena, problem merenja prenele na subatomske nivo, što je drastično povećalo ukupnu tačnost merenja i održavanja vremena. Sistemi vremena koji se koriste u Astronomiji prikazani su na slici 4.1.

### 4.2 Prirodne vremenske skale

Prirodne vremenske skale se mogu dalje podeliti na:

- zvezdana i
- sunčeva (pravo, srednje i svetsko)

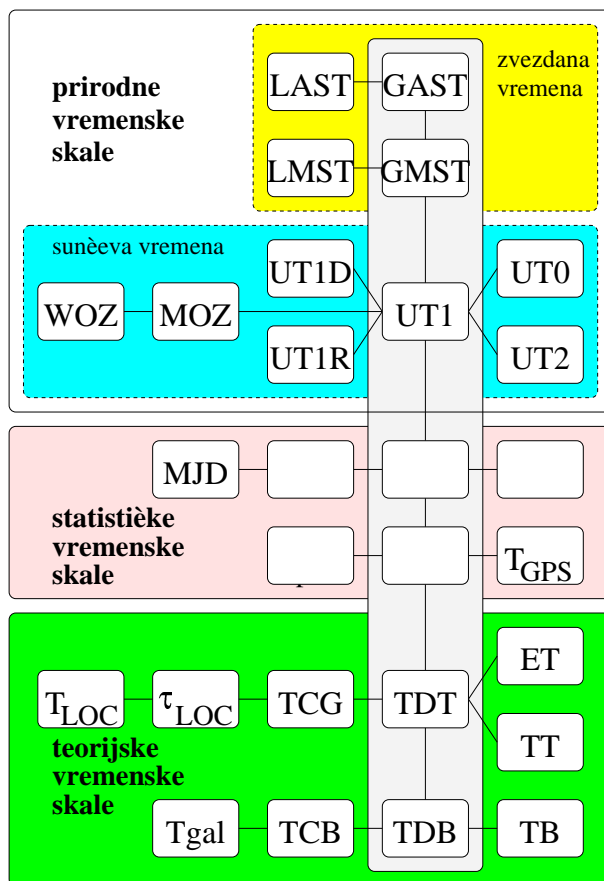
vremena. Vremenski trenuci u prirodnim vremenskim skalama se mogu dobiti direktnim merenjima i, stoga, su dugi niz godina predstavljali osnovu svih vremenskih sistema.

#### 4.2.1 Zvezdano vreme

**Zvezdano vreme** se definiše kao časovni ugao  $\gamma$  tačke. Tako je zvezdano vreme u Greenwichu dato kao:

$$S = t_G(\gamma). \quad (4.1)$$

Ako se u jednačini 4.1 koristi pravi ekvinočij (prava  $\gamma$  tačka), radi se o **pravom zvezdanom vremenu** (GAST). Ukoliko se uzme u obzir nutacija i za računanje zvezdanog vremena koristi srednja  $\gamma$  tačka, kojom



Slika 4.1: Vremenski sistemi

je definisan srednji ekvinočij, dobijeno zvezdano vreme se naziva **srednjim zvezdanim vremenom** (GMST). Ako bi se zvezdano vreme računalo za proizvoljni meridijan, odgovarajuće oznake za pravo i srednje mesno zvezdano vreme bile bi, respektivno, LAST i LMST. U formuli se mesno zvezdano vreme obeležava sa  $s$ . Zvezdani dan predstavlja vremenski interval između dve gornje kulminacije  $\gamma$  tačke. Zvezdano vreme zavisi od Zemljine rotacije i, u manjoj meri, od precesije. Usled tih uticaja, ova vremenska skala je neravnomerna.

Mesno zvezdano vreme se, ako su poznate rektascenzija  $\alpha$  i časovni ugao  $t$ , računa prema izrazu:

$$s = \alpha + t. \quad (4.2)$$

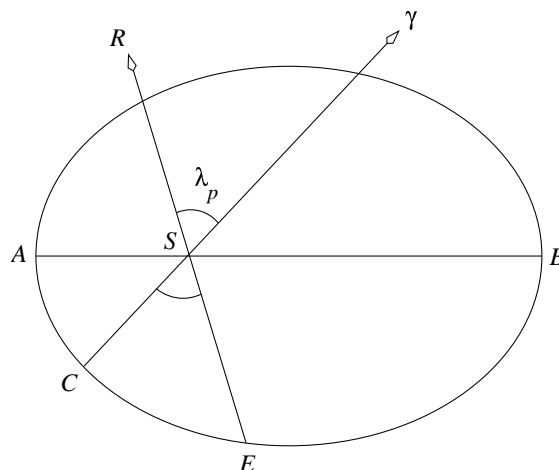
Veza između mesnog i Greenwichkog zvezdanog vremena je linearna i zavisi od geografske dužine meridijana mesta opažanja:

$$S = s - \Lambda. \quad (4.3)$$

#### 4.2.2 Pravo, srednje i svetsko vreme

Srednje zvezdano vreme je ravnomerna vremenska skala, ukoliko zanemarimo male promene do kojih dolazi usled neravnomernosti Zemljine rotacije. Ipak, ova vremenska skala se ne koristi u svakodnevnom životu, već samo u meridijanskim posmatranjima, zbog činjenice da se kulminacije  $\gamma$  tačke dešavaju u različito doba dana, u poređenju sa kulminacijama Sunca. Usled toga, ustanovljeno je merenje vremena prema kretanju Sunca.

Tokom svog godišnjeg prividnog kretanja oko Zemlje, Sunce menja svoj položaj u odnosu na zvezde i prolazi kroz različita sazvežđa. Skup sazvežđa kroz koje Sunce prividno prolazi naziva se **zodijakom** ( $\zeta\delta\nu$  - životinja). Putanja po kojoj se Sunce prividno kreće opisuje veliki krug na nebeskoj sferi koji se naziva ekliptikom. Ekliptika i koordinatni sistem vezan za nju opisani su u poglavlju 3.1.4. Promene ekvatorskih koordinata Sunca tokom godine prikazane su na slici 4.3, odakle se vidi da se Sunčeva deklinacija kreće



Slika 4.2: Zemljina eliptična putanja

od  $-23.5^\circ$  do  $+23.5^\circ$ , koliko iznosi nagib ekliptičke u odnosu na ekvatorsku ravan. Trenutak početka leta, kada Sunce ima najveću deklinaciju, naziva se **letnjim solsticijem**, dok je **zimski solsticij** trenutak početka zime, kada Sunce ima minimalnu deklinaciju. Tačke preseka ravni ekvatora i ekliptike, kada je Sunčeva deklinacija nula, nazivaju se tačkama **ravnodnevnic** ili **ekvinocijima**. Trenutak početka proleća je određen trenutkom prelaska znaka deklinacije Sunca iz negativnog u pozitivni znak, kroz tačku **prolećne ravnodnevnic**. U tački **jesenje ravnodnevnic** deklinacija Sunca prelazi iz pozitivnog u negativni znak i tada počinje jesen. Počeci godišnjih doba, kao što je opisano, odnose se na posmatrača na severnoj polulopti.

Prema 1. Keplerovom zakonu, planete se oko Sunca kreću po eliptičnim putanjama. U jednoj od dve žiže eliptične putanje nalazi se Sunce (tačka  $S$  na slici 4.2). Tačka na kojoj je Zemlja najudaljenija od Sunca naziva se **afel**, označimo je sa  $B$ , dok se najbliža tačka putanje naziva **perihel** (tačka  $A$  na slici 4.2). Ako posmatramo prividno Sunčevo kretanje oko Zemlje, možemo uočiti tačke **perigeuma** i **apogeuma**, najbliže i najdalje tačke Sunčeve putanje od Zemlje. Srednje rastojanje Zemlja-Sunce naziva se **astronomskom jedinicom** i iznosi  $1,496 \cdot 10^8$  km vrlo se često koristi za izražavanje velikih rastojanja. Prvi Keplerov zakon se, matematički, izražava jednačinom:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (4.4)$$

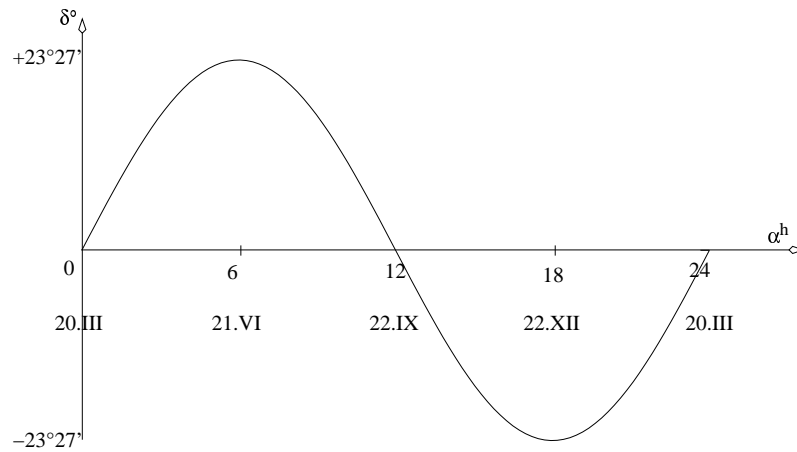
gde je:

- $r$  - radijus-vektor planete,
- $\nu$  - prava anomalija (polarni ugao računat od perihela),
- $p$  - parametar elipse i
- $e$  - ekscentričnost putanje.

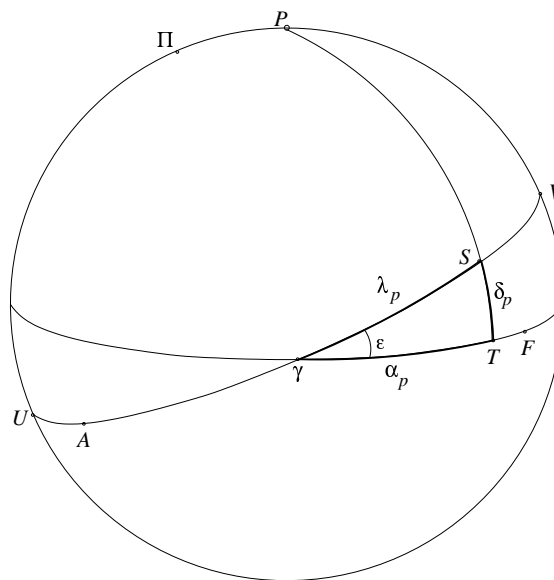
Zemljina putanja oko Sunca ima vrlo mali ekscentricitet koji iznosi svega 0,016.

Merenjem vremena između dve gornje kulminacije središta Sunčevog diska dobijamo **pravi Sunčevi dan**. Časovnim uglom pravog Sunca meri se **pravo vreme**.

Pravo vreme, međutim, ne ispunjava uslov stalnosti, pošto se njegova dužina menja tokom godine. Prema 2. Keplerovom zakonu, radijus-vektor Sunce-planeta opisuje jednake površine u jednakim vremenskim intervalima, drugim rečima, planeta se kreće konstantnom sektorskom brzinom. Usled toga, priraštaji longitude Sunca se menjaju tokom godine, tako da najveći priraštaj ima u perihelu, a najmanji u afelu, što dovodi do promene dužine dana tokom godine. Ovo se može i grafički prikazati, kao na slici 4.2. Ako se Zemlja nalazi u tački  $C$  u trenutku prolećne ravnodnevnic, posle proizvoljnog vremenskog intervala doći će u položaj  $E$ , kome odgovara longituda Sunca  $\lambda_p$ , Sunce će se nalaziti u pravcu zvezde  $R$ . Oдавde se vidi da je Zemljina ugaona brzina promenljiva.



Slika 4.3: Promene ekvatorskih koordinata Sunca tokom godine



Slika 4.4: Priraštaji rektascenzije i longitude Sunca

Osim toga, usled nagiba ekliptike u odnosu na ekvatorsku ravan, rektascenzija i longituda Sunca imaju različite priraštaje. Posmatrajmo sliku 4.4. Neka je severni nebeski pol označen sa  $P$ , a severni ekliptički pol sa  $\Pi$ . Tada je deklinacija Sunca  $\delta_p = \overline{TS}$ , rektascenzija  $\alpha_p = \overline{\gamma T}$ , a longituda  $\lambda_p = \overline{\gamma S}$ . Ako je nagib ekliptike označen sa  $\epsilon$ , rektascenzija se, iz trougla  $\gamma TS$  može izračunati iz jednačine:

$$\tan \alpha_p = \cos \epsilon \tan \lambda_p, \quad (4.5)$$

odakle se vidi razlika u priraštajima rektascenzije i longitude. Najveće priraštaje Sunce ima u ekvinocijima, a najmanje u solsticijima.

Matematička interpretacija drugog Keplerovog zakona je:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\nu}{dt} = C. \quad (4.6)$$

U proučavanju kretanja nebeskih tela značajan je i 3. Keplerov zakon koji glasi: Kvadrati vremena obilaženja planeta oko Sunca srazmerna su kubovima poluosa njihovih putanja, što se izražava relacijom:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.} \quad (4.7)$$

Stoga je uvedena fiktivna tačka koja se ravnomerno kreće po ekliptici, uz dodatni uslov da zajedno sa pravim Suncem prolazi kroz apogej i perigej, što znači da je njegova longituda jednaka srednjoj longitudi pravog Sunca. Ova tačka je nazvana **srednjim ekliptičkim Suncem**.

Međutim, zbog nagiba ekliptike, ravnomerna promena longitude srednjeg ekliptičkog Sunca uzrokuje različite promene rektascenzije pravog Sunca. Zbog toga se uvodi pojam **srednjeg ekvatorskog Sunca** ili, kraće, **srednjeg Sunca**, kao tačke koja se ravnomerno kreće po ekvatoru i zajedno sa srednjim ekliptičkim Suncem prolazi kroz tačku prolećne ravnodnevnice, što znači da je rektascenzija srednjeg Sunca jednaka longitudi srednjeg ekliptičkog Sunca. Vremenski interval između dve gornje kulminacije srednjeg Sunca naziva se **srednjim danom**. **Srednje vreme** se meri časovnim uglom srednjeg Sunca.

Pošto se srednje vreme meri između dve gornje kulminacije srednjeg Sunca, da se prelazak između dva datuma ne bi dešavao u podne, usvojena je jedinica za merenje vreme koja se naziva **svetsko vreme**, koje počinje u ponoć (dakle, u trenutku donje kulminacije srednjeg Sunca):

$$UT = t_s \pm 12^h, \quad (4.8)$$

gde je sa  $t_s$  označeno srednje vreme.

Razlika između pravog i srednjeg vremena se naziva **vremenskim izjednačenjem**:

$$\eta = t_p - t_s, \quad (4.9)$$

gde su  $t_p$  i  $t_s$  pravo i srednje vreme, respektivno. Ako vremensko izjednačenje izrazimo preko rektascenzija:

$$\eta = \alpha_s - \alpha_p, \quad (4.10)$$

videćemo da se ono ne može izračunati unapred, s obzirom da se odnosi na dve različite vremenske skale; srednje vreme se može izračunati u svakom trenutku UT, dok se pravo vreme može izračunati samo preko efemeridskog vremena, koje se dobija a posteriori (o efemeridskom vremenu biće reči u posebnom poglavlju). Stoga se u godišnjacima publikuje, takozvano, efemeridsko vremensko izjednačenje:

$$\eta^* = \alpha_E - \alpha_p. \quad (4.11)$$

Efemeridsko vremensko izjednačenje možemo izraziti preko efemeridskog časovnog ugla Sunca u trenutku efemeridske kulminacije, što predstavlja efemeridsko vreme prolaska Sunca kroz efemeridski meridijan, što dovodi do:

$$\eta^* = t_p^E - t_E = t_p^E - ET + 12^h. \quad (4.12)$$

U zavisnosti od toga koji astronomski događaj posmatramo, dužina godine se razlikuje, što dovodi do različitih definicija pojma godine.

**Tropska godina** predstavlja srednji vremenski interval između dva prolaska Sunca kroz tačku prolećne ravnodnevnice ( $\gamma$  tačku), odnosno, vremenski interval tokom kojeg longituda Sunca priraste za  $360^\circ$ .

**Siderička godina** je period Sunčeve revolucije u odnosu na zvezde.

**Beselova godina** je period tokom koga rektascenzija srednjeg Sunca priraste za  $24^h$ . Ovaj vremenski interval se poklapa sa dužinom tropske godine, ukoliko se vekovne promene ne uzmu u razmatranje. Stvarna razlika između Beselove i tropske godine (usled vekovnih promena) iznosi  $0^s, 148T$ , gde je  $T$  vreme izraženo u julijanskim vekovima, računato od 1900. godine. Za početak Beselove godine uzima se trenutak kada je rektascenzija Sunca:

$$\alpha_s = 18^h 40^{\text{min}} = 280^\circ, \quad (4.13)$$

što uvek pada blizu početka kalendarske godine. Beselova epoha se koristila kao fundamentalna epoha za izradu zvezdanih kataloga sve do 1976. godine, kada je uveden julijanski sistem.

Naziv	Dužina [dan]
Tropska	365,2422
Julijanska	365,2500
Siderička	365,2564
Anomalistička	365,2596
Eklipsna	346,6201

Tablica 4.1: Dužine definisanih godina

**Julijanska godina** uvodi jednostavniji sistem, gde je dužina godine 365,25 dana. Kao i kod Beselove godine, trenuci u godini se daju u decimalnom zapisu. Od 1976. godine IAU uvodi novi sistem konstanti, u okviru kojeg je julijanska epoha J2000.0 uvedena kao fundamentalna.

**Anomalistička godina** je vremenski interval tokom kojeg Zemlja obiđe oko Sunca u odnosu na perihel svoje putanje.

**Eklipsna godina (godina pomračenja)** je period između dva prolaska Sunca kroz uzlazni čvor Mesečeve putanje. Kao što se može videti iz tabele 4.1, dužina eklipsne godine se znatno razlikuje od ostalih.

**Platonska godina** je vremenski period tokom kojeg trenutni nebeski pol opiše precesioni krug oko pola ekliptike. Trajanje platonske godine je oko 25700 godina.

Pregled dužina opisanih definisanih godina dat je u tabeli 4.1. Ovom tabelom nije obuhvaćena platonska godina.

Tropska godina se može iskoristiti za nalaženje veze između zvezdanog i srednjeg vremena. Pošto tropska godina predstavlja interval tokom kojeg rektascenzija srednjeg Sunca prirašte za  $24^h$ , dnevni priraštaj se može izračunati iz:

$$d\alpha_s = \frac{24^h}{365,2422} = 3^{\min} 56^s, 55536 \quad (4.14)$$

što je, istovremeno, vrednost za koju je srednji dan duži od zvezdanog dana. Na godišnjem nivou, odnos između srednjeg i zvezdanog dana je:

$$1 \text{ srednji dan} = \frac{366,2422}{365,2422} = 1 + \frac{1}{365,2422} = (1 + \mu) \text{ zvezdanih dana} \quad (4.15)$$

Posmatrajući vezu (4.2), mereći rektascenziju od srednje  $\gamma$  tačke i korišćenjem srednjeg Sunca, možemo napisati:

$$S = UT - 12^h + \alpha_s. \quad (4.16)$$

Konačno, zvezdano vreme u Greenwichu je:

$$S = S_0 + (1 + \mu) UT, \quad (4.17)$$

gde je  $S_0$  srednje vreme u ponoć u Greenwichu i računa se iz jednačine:

$$S_0 = 6^h 41^{\min} 50^s, 54841 + 8640184, 812866T + 0^s, 093104T^2 - 6^s, 2 \cdot 10^{-6}T^3. \quad (4.18)$$

Vreme izraženo u julijanskim vekovima je, ovde, označeno sa  $T$ .

U upotrebi je nekoliko varijanti svetskog vremena. Vremenska skala dobijena direktno iz astronomskih merenja, na primer, meridijanskih posmatranja zvezda, označava se sa UT0 i odnosi se na trenutni položaj nebeske polarne osovine, što implicira i trenutnu vrednost geografske longitude mesta  $\lambda$ . Uzimanjem u obzir uticaja kretanja Zemljinih polova na longitudi posmatrača, dolazi se do vremenske skale UT1, vremena određenog rotacijom Zemlje. Odgovarajuća relacija koja povezuje skale UT0 i UT1 glasi:

$$UT1 = UT0 - (x \sin \lambda_0 + y \cos \lambda_0) \tan \phi_0, \quad (4.19)$$

gde je:



- $x$  i  $y$ , uglovne vrednosti odstupanja pravog od srednjeg pola,
- $\phi_0$  i  $\lambda_0$ , vrednosti geografske latituda i longitude u odnosu na srednji ekvinočij.

Ukoliko se, dodatno, uračunaju i neravnomernosti Zemljine rotacije koje nastaju usled sezonskih promena brzine, dolazi se do skale UT2. Ipak, najčešće se u računama koristi varijanta UT1 i, uopšte, ako u formulama nije naznačeno na koju se skalu svetskog vremena odnosi, oznaka UT obično znači UT1. O promenama u Zemljinoj rotaciji će biti govora u posebnom poglavlju. Vremenska skala UT1 je vreme Zemljinog časovnika, koja napravi pun obrt za, otprilike,  $24^{\text{h}}$ . Kratkotrajna nestabilnost ove skale je reda  $10^{-8}$ , dok se trajanje dana produžava za oko  $0,002 \frac{\text{s}}{\text{vek}}$ . UT1 je jedan od proizvoda IERS i bazirana je na opažanjima dugobazisne interferometrije (*Very Long Basis Interferometry* - VLBI). Njome se određuje pravac IERS referentnog meridijana u **međunarodnom nebeskom referentnom sistemu** (*International Celestial Reference System* - ICRS).

### 4.2.3 Julijanski dan i modifikovani julijanski dan

Računanje proteklog broja dana između dva datuma može biti komplikovano, zbog toga što je potrebno voditi računa o prestupnim godinama ili mesecima različitog trajanja. Iz tog razloga uveden je pojam **Julijanskog dana**. Svi dani su numerisani sukcesivno, počev od julijanskog dana 0, koji počinje u podne 1. januara 4713. godine pre nove ere. Tako, na primer, podne 1. januara 2000. godine je JD 2451545.

Julijanski dan se odnosi na svetsko vreme (UT). Časovi i delovi časa posle podneva pretvaraju se u decimalni deo dana. Na primer, ponoć 2. januara 2000. godine ima JD 2451545.5.

Istorijski posmatrano, Julijanski dan nema nikakve veze sa julijanskim kalendarom. Ideja je potekla od strane francuskog učenjaka Josepha Justusa Scaligera (1540-1609). U svom radu „Opus de emendatione temporis“ (Studija unapređenja vremena) upoređivao je prethodne kalendare, ispravljajući njihove greške i uvodeći red u hronološki sistem. Uveo je pojam Julijanske epohe, sa trajanjem od 7980 godina, čija je dužina nastala kao proizvod tri ciklusa: (1) Metonovog ciklusa, prosečne dužine od 6939.6 dana, što iznosi oko 235 uzastopnih mesečevih i 19 solarnih ciklusa, (2) solarnog ciklusa, perioda posle koga početak nedelje pada u isti dan i (3) 15-godišnjeg fiskalnog ciklusa, vezanog za naplaćivanje taksi u Egiptu. Scaliger je izračunao da se, u prošlosti, ova tri ciklusa sastaju 4713. godine p.n.e, pa je, usvajajući 1. januar te godine, predložio sukcesivno brojanje dana upravo od tog datuma. Naziv Julijanska epoha je u čast njegovog oca Julija. I pored toga što julijanski dan nema veze sa astronomskim događajima, zadržao se u upotrebi zbog svoje pogodnosti računanja dužih vremenskih intervala.

Pošto je vrednost julijanskog dana prilično veliki broj, iz praktičnih razloga uveden je i pojam **modifikovanog julijanskog dana**, koji se dobija oduzimanjem 2 400 000 dana od julijanskog dana. Pored toga, početak modifikovanog julijanskog dana pomeren je u ponoć, pa konačna veza glasi:

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2\,400\,000, 5, \quad (4.20)$$

što znači da se dani u MJD dobijaju od ponoći, 17. novembra 1858. godine.

## 4.3 Teorijske (dinamičke) vremenske skale

### 4.3.1 Efemeridsko vreme

Pošto su ustanovljene neravnomernosti u Zemljinoj rotaciji, uočena je potreba za uvođenjem nove vremenske skale koja bi ispunjavala osnovni uslov ravnomernosti. Stoga je 1958. godine usvojeno da se za zvaničnu vremensku skalu ustanovi **efemeridsko vreme**, koje se zasniva na periodu Zemljinog obilaska oko Sunca. Od 1960. godine ova vremenska skala se koristi za izražavanje vremena u astronomskim godišnjacima.

Kao polazna jedinica za merenje efemeridskog vremena usvojena je tropska godina za  $12^{\text{h}}$  efemeridskog vremena 0. januara 1900. godine.

Efemeridska vremenska skala je definisana Newtonovom mehanikom i smatrana je apsolutnom. Relativističke popravke su uvedene kao Newtonovi poremećaji.

Određenu analogiju između Sunčevih vremenskih skala i efemeridskog vremena moguće je izvesti definisanjem efemeridskog vremena kao efemeridskog časovnog ugla  $t_E$  **srednjeg efemeridskog Sunca**, fiktivne tačke koja se ravnomerno kreće po srednjem ekvatoru brzinom koja odgovara srednjem kretanju pravog Sunca. **Efemeridski časovni ugao** se meri od **efemeridskog meridijana**, koji bi se poklapao sa Greenwichkim meridijanom da je rotacija Zemlje ravnomerna. Pošto to nije slučaj, efemeridski meridijan se malo pomera ka istoku.

Stoga je efemeridsko vreme, matematički izraženo:

$$ET = 12^h + t_E. \quad (4.21)$$

Rektascenzija efemeridskog srednjeg Sunca je, u stvari, srednja longituda Sunca  $L$ , koja se može izračunati iz izraza:

$$L = 279^\circ 41' 48'',04 + 129\,602\,768'',13T + 1'',089T^2, \quad (4.22)$$

gde je  $T$  vreme izraženo u julijanskim vekovima od  $12^h$  0. januara 1900. godine. Tropska godina može da se подели na:

$$N = \frac{1\,296\,000 \cdot 36\,525 \cdot 86\,400}{129\,602\,768,13} = 31\,556\,925,9747 \quad (4.23)$$

efemeridskih sekundi.

Veza između efemeridskog i svetskog vremena je jednostavna i definiše se preko popravke  $\Delta T$  kao:

$$\Delta T = ET - UT. \quad (4.24)$$

Popravka  $\Delta T$  se računa a posteriori, pošto se popravke za neravnomernost kretanja Zemlje ne mogu unapred predvideti.

### 4.3.2 Savremene dinamičke vremenske skale

Efemeridsko vreme je zasnovano na Newtonovoj predrelativističkoj teoriji. Uz tu činjenicu, bitno je napomenuti da se efemeridsko vreme dobija a posteriori, odnosno, nije trenutno dostupno. Iz tih razloga, od 1984. godine se više ne koristi kao osnovna astronomska skala vremena u godišnjacima. Zamenjuje je skala **terestričkog dinamičkog vremena** (TDT), određena tako da se očuva kontinuitet sa dotadašnjom referentnom skalom. TDT je, formalno, uvedeno još 1977. godine, ali se ova skala nije u godišnjacima koristila sve do 1984.

Dužina sekunde skale TDT se ne razlikuje od ET, ali je njena teorija osavremenjena relativističkim aspektima. TDT se implementira preko atomske skale TAI, koja se dobija, praktično, u realnom vremenu sa visokom preciznošću i ravnomernošću. Pošto se određuje na osnovu merenja na Zemlji i odnosi se na posmatrača na Zemlji, TDT spada u **sopstvena vremena** i koristi se za geocentrične efemeride.

Kako se baricentar Sunčevog sistema koristi kao referentni početak za veliki broj različitih merenja, potrebno je definisati i **baricentrično dinamičko vreme** (TDB), radi svođenja vremenskih trenutaka na vreme koje bi imao posmatrač u baricentru. TDB je **koordinatno vreme** koje se, za razliku od sopstvenih vremena, može koristiti za bilo koju tačku na heliocentričnoj putanji. Iako se ne može direktno izmeriti, može se koristiti kao nezavisna promenljiva, što znači da odgovara zahtevima koji se traže od jednog dinamičkog sistema vremena.

Veza između terestričkog i baricentričnog dinamičkog vremena izvodi se iz jednačina Keplerovog kretanja, modifikovanog tako da prati relativističke postulate [Gre98]:

$$TDB = TDT + 0^s,001\,658 \sin E, \quad (4.25)$$

gde je  $E$  ekscentrična anomalija Zemljine putanje oko Sunca. Kompletno izvođenje jednačine (4.25) dato je u [Gre98]. Eliminisanje ekscentrične anomalije iz (4.25) može se sprovesti primenom izraza:

$$e \sin E = e \sin (M + e \sin M) \simeq e \sin M + \frac{1}{2}e^2 2M, \quad (4.26)$$

posle čega se dobija:

$$\text{TDB} = \text{TDT} + 0^{\text{s}},001\,658 \sin M + 0^{\text{s}},001\,014 \sin 2M, \quad (4.27)$$

gde je  $M$  prava anomalija.

### 4.3.3 Statističke vremenske skale

Jedinica za merenje vremena u SI sistemu je SI sekunda koja se definiše kao vremenski interval tokom kojeg se izvrši 9 192 631 770 prelazaka elektrona sa jednog hiperfinog energetskog nivoa na drugi u pobuđenom stanju atoma cezijuma 133. Osnovna atomska vremenska skala se naziva **međunarodnim atomskim vremenom** (*International Atomic Time* - TAI) i vezana je za skalu efemeridskog vremena izrazom:

$$\text{ET} = \text{TAI} + 32^{\text{s}},184. \quad (4.28)$$

S obzirom na identitet skala ET i TDT, u formuli (4.28) se, umesto, ET može koristiti i TDT. Osim ove male razlike, između sistema TDT i TAI nisu ustanovljene sistematske razlike. Naime, dužina SI sekunde je određena, upravo, prema dinamičkom vremenu. Time je merenje i održavanje vremena prešlo na subatomske nivo. Početak skale TAI je tako određen da je razlika UT1-TAI 1. januara 1958. godine bila jednaka nuli. Nestabilnost skale TAI je za 6 redova veličina manja od nestabilnosti UT1.

S obzirom na pojavu usporenja Zemljine rotacije i na veliku postojanost atomskog vremena, vremenom dolazi do udaljavanja skale svetskog vremena UT od atomskog vremena TAI. Da se ova razlika ne bi nagomilavala, uvodi se skala **svetskog koordiniranog vremena** (*Coordinated Universal Time* - UTC). UTC predstavlja varijantu atomskog vremena i razlikuje se od TAI za ceo broj sekundi. U skalu UTC se uvode prestupne sekunde tako da razlika između skala UT1 i UTC bude uvek manja od  $0,9^{\text{s}}$ . Dogovorom je ustanovljeno da se prestupne sekunde uvode, po potrebi, 30. juna i 31. decembra, pri čemu se unapred publikuje datum kada će prestupna sekunda biti uvedena. Odluku o uvođenju prestupne sekunde donosi Međunarodni servis za Zemljinu rotaciju i referentne sisteme (*International Earth Rotation and Reference System Service* - IERS) i publikuje je u svom Biltenu C.

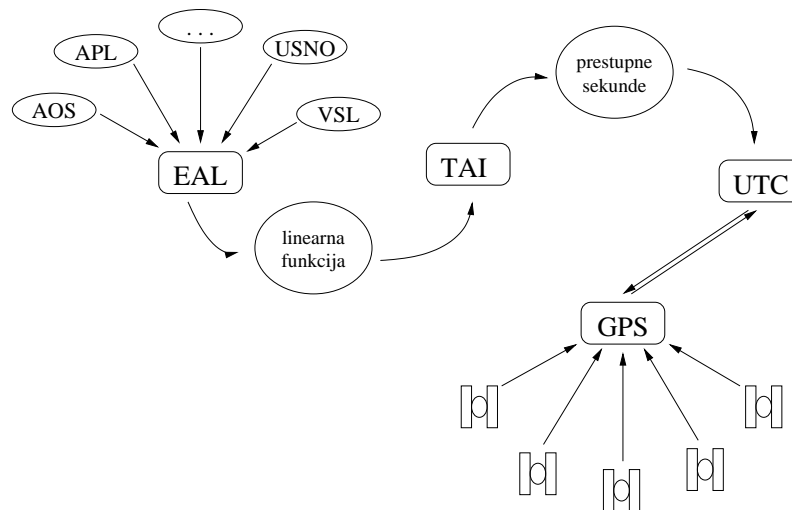
### 4.3.4 Računanje i distribucija vremena

Opisane atomske vremenske skale održava oko 260 atomskih časovnika u 60 laboratorija širom sveta. Sva merenja se skupljaju u zajedničkom centru, Međunarodnom birou za mere i tegove (*Bureau International des Poids et Mesures* - BIPM) gde se, ocenom svih merenja, dobija plivajuća vremenska skala EAL. Primenom linearne funkcije na dobijeni model izračunava se vreme TAI, na koje se, konačno, dodaje aktuelan broj prestupnih sekundi. Na taj način izračunato vreme se publikuje nacionalnim službama za održavanje vremena. Shema računanje vremena UTC je data na slici 4.5.

Osim navedenih vremenskih skala, postoje još dva sistema atomskog vremena u praktičnoj upotrebi: TGPS i TGLONASS. Ova dva sistema vremena nastaju po sličnom principu kao i TAI, osim što se za njihovo računanje koriste atomski časovnici na satelitima sistema GPS i GLONASS, respektivno. Mada su, po svojoj prirodi, atomske vremenske skale, njihova vremena se, zbog relativistickih efekata, malo razlikuju od TAI. Međutim, njihova veza sa TAI je poznata, publikuje se na dnevnoj osnovi i veoma lako je preći sa jednog na drugi sistem. Na primer, za početak TGPS vremena usvaja se ponoć između subote i nedelje, 6. januara 1980. godine. Tada, na početku prve GPS nedelje, razlika između skala TGPS i TAI je bila  $19^{\text{s}}$ . Pošto se u skale TGPS i TGLONASS ne uvode prestupne sekunde, i one se udaljavaju od UTC.

Distribucija vremena zainteresovanim korisnicima se vrši na razne načine:

- putem radio signala,



Slika 4.5: Računanje vremena

- emitovanjem sa posebnih geostacionarnih satelita,
- preuzimanjem sekundnih impulsa sa GPS prijemnika,
- preko računarskih mreža primenom NTP itd.

Veći broj opservatorija emituje, po određenom algoritmu, signale atomskog vremena na posebnim talasnim dužinama, uglavnom u opsegu kratkih talasa. Da bi se prihvatili i koristili ovi signali, potrebno je, pre svega, poznavati algoritam kojim se emituju, a tu se misli na identifikovanje sekundnih impulsa kojima se označavaju: ceo minut, deseti i stoti delovi sekunde razlike UT1-UTC. Osim toga, potrebno je uz sebe imati i časovnik kojim će se vršiti upoređivanje vremena.

Jedan savremeniji način prihvatanja atomskog vremena je korišćenje poruka sa geostacionarnih satelita, na primer, nemačkog DCF77. Časovnici sa ugrađenim prijemnicima za ovu vrstu signala se proizvode u raznim formatima, uključujući i ISA, PCI i PCMCIA za ugradnju u stane i prenosne računare. Upotreba signala sa geostacionarnih satelita je ograničena na područje iznad koga se sateliti nalaze.

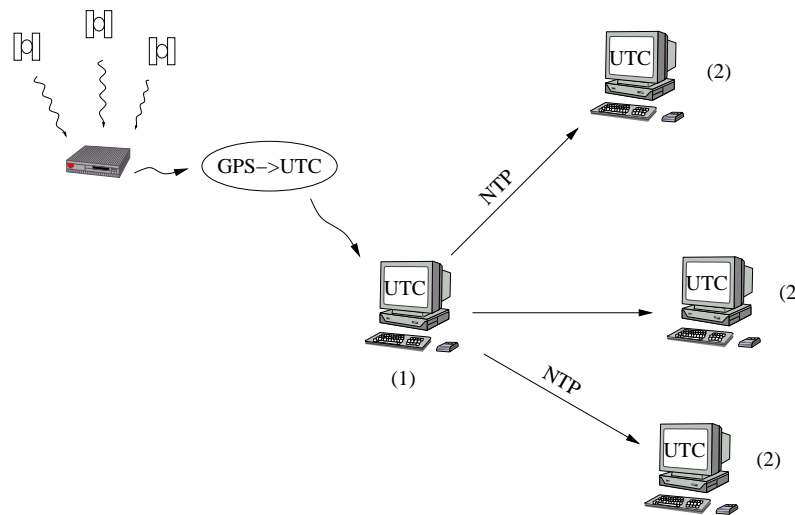
Nakon ekspanzije jeftinih GPS prijemnika, otvorila se i mogućnost veoma preciznog prihvatanja atomskog vremena bilo gde gde je moguće primati GPS signale. Za ovakvu sinhronizaciju časovnika potrebno je imati GPS prijemnik sa izvedenim izlazom za 1PPS (*1 Pulse Per Second*). On se izvodi, obično, u vidu BNC priključka, mada se u prodaji nalaze i razvojni GPS sistemi u formi čipa, gde se 1PPS izvodi kroz jednu od nožica mikrokontrolera. U zavisnosti od tačnosti GPS prijemnika, impulsi 1PPS su tačnosti 60-100 ns.

Ako se bilo koji od navedenih izvora atomskog vremena prikači na računar, dobija se sistem za distribuciju tačnog vremena preko računarskih mreža, preko protokola za distribuciju vremena (*Network Time Protocol* - NTP). U jednoj NTP mreži razlikuju se (1) serveri i (2) klijenti. Server je uređaj na koji je povezan primarni vremenski etalon, a klijenti su računari koji svoje kvarcne časovnike sinhronizuju na osnovu korekcija koje dobijaju preko NTP. Primenom NTP se vreme u računarskoj mreži može sinhronizovati sa tačnošću od 0,02 s, za najudaljenije računare u mreži. Vreme se na NTP serveru meri sa tačnošću reda  $\mu$ s. Jedan jednostavni sistem za distribuciju tačnog vremena upotrebom GPS i NTP je prikazan na slici 4.6.

### 4.3.5 Zonsko i ukazno vreme

S obzirom na vezu merenja vremena sa kretanjem Zemlje oko Sunca, kroz istoriju se postavljao problem usklađivanja vremenskih skala između različitih država, pošto su za državna vremena obično usvajana srednja vremena u glavnom gradu države.

Iz tog razloga je, međunarodnim sporazumom, 1884. godine uveden **sistem zonskog vremena**, prema kome je planeta podeljena na 24 zone, širine  $15^\circ$ . Za početni meridijan je usvojen meridijan koji prolazi



Slika 4.6: Distribucija vremena

kroz astronomsku opservatoriju u Greenwichu, a nulta zona se prostire  $7,5^\circ$  na istok i zapad od njega. Između dve susedne zone figuriše razlika od jednog časa. Svaka zona je dobila i svoj naziv. Tako, na primer, vreme u nultoj zoni se naziva **srednjim greenwichkim** vremenom (GMT - *Greenwich Mean Time*), a vreme u prvoj zoni, kojoj pripada i Srbija, **srednjeevropskim** vremenom (CET - *Central European Time*). Smer računanja vremena je takav da se iznosi vremena povećavaju kretanjem ka istoku, a smanjuju prema zapadu. Meridijan koji se nalazi na  $180^\circ$  od početkog naziva se **datumskom granicom**, što se naročito odnosi na putnike koji prelaze taj meridijan. Ukoliko se prelazak vrši sa zapada na istok, dva puta se računa isti dan, a u slučaju prelaska sa istoka na zapad, preskače se jedan dan.

Linije između vremenskih zona nisu potpuno prave, kako bi pratile granice država koje seku granične meridijane. Veći broj država u svetu se uklopio u ovakvu zonsku podelu. Izuzetak su one čiji je geografski položaj takav da nalaze između dve vremenske zone. Primer takve države je Indija koja je, zbog svog geografskog položaja, usvojila vremensku zonu 5,5 časova udaljenu od GMT. Raspored vremenskih zona je dat na slici 4.7 [cia06].

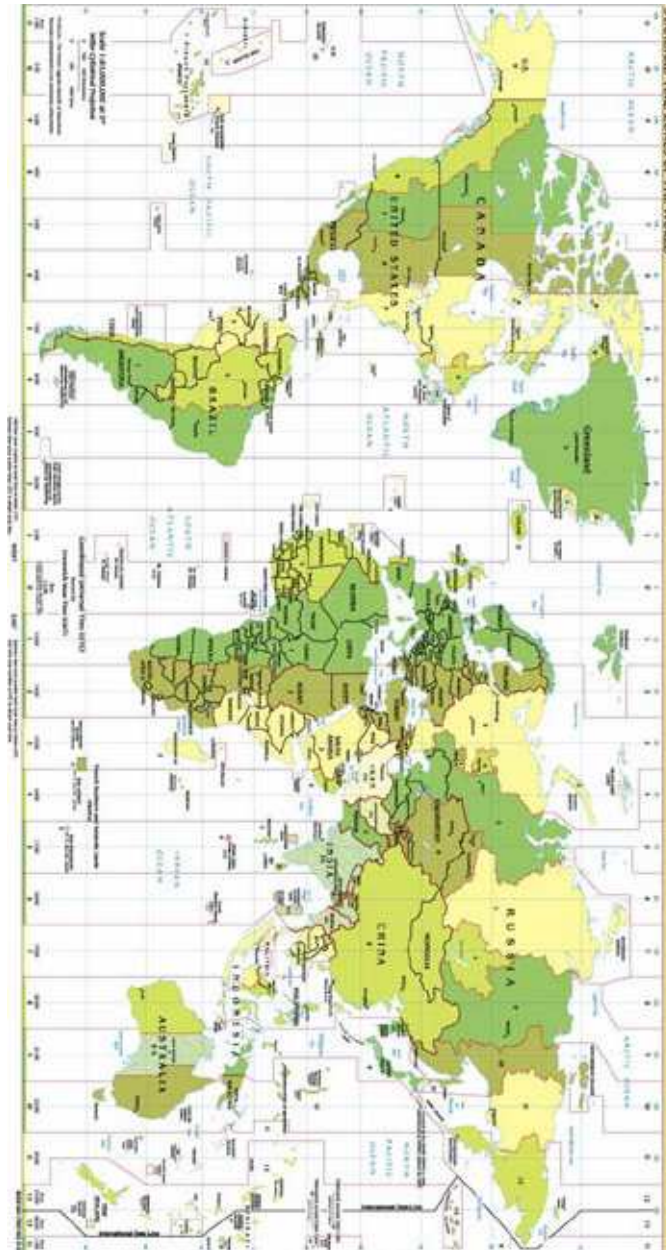
U prethodnom veku je razmatrana potreba pomeranja satova za jedan, dva ili tri časa u određeno doba godine, radi povećanja ekonomskih privrednih efekata. U drugoj polovini prošlog veka je ustanovljeno pravilo u većem broju zemalja da se u letnjem periodu časovnici pomeraju za jedan čas unapred. Pošto se državno vreme menjalo ukazom državnih organa, takva vremenska skala je dobila naziv **ukazno vreme**. U našoj zemlji ovo vreme se naziva **letnjim vremenom**, dok se u anglo-saksonsom govornom području koristi termin *daylight savings*. Krajem marta meseca satovi se pomeraju za jedan čas unapred, a krajem oktobra se vraćaju unazad, takođe za jedan čas. Ovo pravilo nisu usvojile sve zemlje, a i u onima koje koriste ukazno vreme, u poslednje vreme se razmatra opravdanje njegovog daljeg korišćenja.

## 4.4 Kalendari

Za merenje dužih vremenskih intervala koriste se kalendari. Istorijski osmatrano, kalendari se mogu podeliti na verske i civilne, pri čemu se određeni kalendari mogu koristiti za obe svrhe. Prema nebeskim pojavama na kojima su bazirani, kalendari se dele u tri osnovne grupe:

- lunarni,
- lunisolarni i
- solarni.

Lunarni kalendari su najstariji. Baziraju se na cikličnom ponavljanju Mesečevog izgleda. Pokazalo se da su nepodesni za upotrebu u svakodnevnom životu, pošto je, tokom dužih vremenskih perioda, dolazilo do pomeranja pojava vezanih za godišnja doba.



Slika 4.7: Vremenske zone

Zbog toga se prešlo na upotrebu lunisolarnih kalendara (na primer, jevrejski), ali ni ova grupa kalendara nije uspela da uskladi ponavljanje Mesečevih mena i godišnjih doba.

Tako se došlo do solarnih kalendara kod kojih se pažnja obraća samo na godišnja doba, a ne više na Mesečeve mene.

#### 4.4.1 Julijanski kalendar

Julijanski kalendar je nastao na osnovu starog rimskog kalendara, koji je bio lunarni. S obzirom na teškoće do kojih je dolazilo tokom njegove upotrebe, osetila se potreba za redefinisanjem kalendara. Julijanski kalendar, nazvan u čast Julija Cezara, projektovao je egipatski astronom Sosigen, po ugledu na egipatski solarni kalendar, koji je imao 365 dana. Prema njegovom predlogu, radi unapređenja kalendara, posle tri proste godine uvodi se jedan prestupni dan, čime je prosečna dužina godine dovedena na 365,25 dana, što je bolje približenje dužini tropske godine od egipatskog kalendara, pošto se greška od jednog dana čini na 128 godina. Prestupna godina je ona čiji je broj deljiv sa četiri.

Godina	Proleće	Leto	Jesen	Zima
1995	21.3.	21.6.	23.9.	22.12.
1996	20.3.	21.6.	22.9.	21.12.
1997	20.3.	21.6.	22.9.	21.12.
1998	20.3.	21.6.	23.9.	22.12.
1999	21.3.	21.6.	23.9.	22.12.
2000	20.3.	21.6.	22.9.	21.12.
2001	20.3.	21.6.	22.9.	21.12.
2002	20.3.	21.6.	23.9.	22.12.
2003	21.3.	21.6.	23.9.	22.12.
2004	20.3.	21.6.	22.9.	21.12.

Tablica 4.2: Počeci godišnjih doba

#### 4.4.2 Gregorijanski kalendar

Ipak, posle dužeg vremenskog perioda, julijanski kalendar je počeo da zaostaje za prirodnim pojavama, što se najbolje uočavalo po datumu ravnodnevnice, koji se pomerao sve više prema početku godine. Da bi se greška u kalendaru anulirala, predložena je nova reforma kalendara. Papa Grgur XIII je, na predlog Italijana Liliya reformisao kalendar, pri čemu se reforma odnosi na sledeće:

- 4. oktobar 1582. će se računati kao 15. oktobar i
- prestupne godine će se uvoditi svake četvrte godine, a u slučaju da prestupna godina treba da padne u godinu završetka veka (1800, 1900, 2000,...), ona će biti prestupna samo ako je njen broj vekova deljiv sa četiri. Ovakve godine se nazivaju **sekularnim**.

Ovaj kalendar se naziva **gregorijanskim kalendarom**. Tačniji je od julijanskog, pošto se greška od jednog dana pravi na 3300 godina.

Gregorijanski kalendar su usvojile sve katoličke zemlje, dok se u ostale zemlje uvodio postepeno. Danas je ovaj kalendar opšti zvanični kalendar. U tabeli 4.2 su prikazani počeci godišnjih doba u poslednjih deset godina. Iz tabele se, donekle, uočava nesavršenost gregorijanskog kalendara, na osnovu pomeranja ravnodnevnice unapred.

#### 4.4.3 Milankovićeva reforma

Na saboru pravoslavnih crkava, održanom u istambulu 1923. godine, usvojena je reforma julijanskog kalendara koju je predožio Milutin Milanković. Ova reforma se sastojala u sledećem:

- dovesti kalendar na isti datum sa gregorijanskim, što je značilo izbacivanje 13 prekobrojnih dana i
- kao prestupne godine računati sve one čiji su brojevi deljivi sa 4 bez ostatka, a u slučaju da se radi o godini kojom se završava vek, ona je prestupna samo ako broj njenih vekova podeljen sa 9 daje kao ostatak 2 ili 6.

Milankovićev kalendar ima još manje odstupanje od gregorijanskog, međutim, iako je predlog prihvaćen, kalendar nikad nije ušao u primenu.





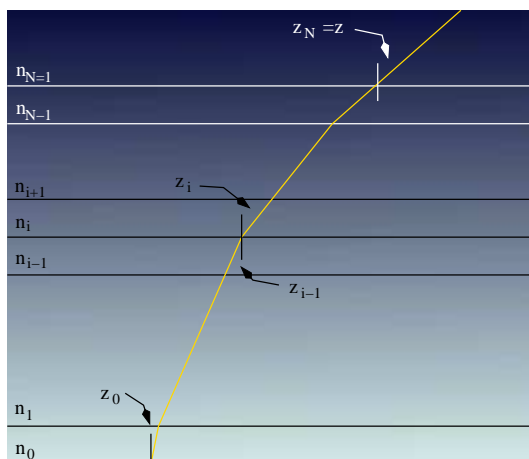
## Poglavlje 5

# Promene položaja nebeskih tela

### 5.1 Refrakcija

Zemljina atmosfera je sastavljena od slojeva različitih gustina. Pri prolasku elektromagnetnog talasa kroz takvu sredinu, dolazi do zakrivljenja njegove putanje. Pojava skretanja elektromagnetnog talasa kroz atmosferu zove se **astronomska refrakcija**. Pojava postoji, kako u vidljivom delu spektra, tako i u opsegu radio-talasa. Razlika u tretiranju refrakcije u vidljivom i radio delu spektra je u tome što, kod proučavanja refrakcije optičkih pravaca, najveći uticaj ima troposfera, najgušći atmosferski sloj koji se prostire do visine od svega nekoliko kilometara iznad površi Zemlje. Putanja radio-talasa se, međutim, menja prilikom prolaska kroz jonizujući sloj atmosfere (jonosferu), pa je izvođenje izraza za uticaj refrakcije radio-talasa, donekle, drugačije.

U zavisnosti od potreba za koje se vrši obračun uticaja refrakcije, možemo posmatrati dva modela atmosfere. U prvoj aproksimaciji, smatraćemo da su atmosferski slojevi raspoređeni u vidu planparalelnih pojaseva, čime se zanemaruje uticaj zakrivljenosti Zemlje. U preciznijem tumačenju ove pojave, atmosferu ćemo modelirati po principu sfernosimetričnih slojeva, čime formule postaju komplikovanije, ali se tačnost tako izračunatih refrakcija poboljšava. Konačno, s obzirom na lokalne atmosferske i gravitacione uticaje, za radove najviše tačnosti koriste se tablice refrakcija, čiji su elementi dobijeni eksperimentalnim putem.



Slika 5.1: Planparalelni model atmosfere

### 5.1.1 Ravanski model refrakcije

Aproksimirajući atmosferu modelom planparalelnih slojeva (slika 5.1), može se primeniti Snellov zakon koji povezuje indekse prelamanja različitih slojeva sa sinusima upadnih uglova zraka:

$$n_i \sin z_i = n_{i-1} \sin z_{i-1}, \quad (5.1)$$

gde je:

$n_i$  indeks prelamanja  $i$ -tog sloja atmosfere, a

$z_i$  zenitno odstojanje svetlosnog zraka koji dolazi na površ sloja  $i$ .

Indeks prelamanja opada sa povećanjem visine iznad površi Zemlje. Ako indeks prelamanja atmosferskog sloja na površi Zemlje označimo sa  $n_0$ , indeks prelamanja najvišeg sloja sa  $n$ , uz pretpostavku da postoji  $N$  slojeva, onda važi relacija:

$$n_0 > n_1 > n_2 > \dots > n_{N-1} > n = 1. \quad (5.2)$$

Razvojem (5.1) sledi:

$$n_0 \sin z_0 = n_1 \sin z_1 = \dots = n_{N-1} \sin z_{N-1} = \sin z. \quad (5.3)$$

Kao što se može videti iz jednačine (5.3), prostiranje zraka kroz planparalelne slojeve atmosfere ne zavisi od načina podele slojeva, pa se može napisati:

$$n_0 \sin z_0 = \sin z. \quad (5.4)$$

Zenitno odstojanje  $z$  iz izraza (5.4) se naziva **topocentričnim zenitnim odstojanjem**, što predstavlja zenitno odstojanje na kome bi se pojavio (svetlosni ili radio) izvor u odsustvu atmosfere.

Obeležimo ugao refrakcije sa:

$$R = z - z_0. \quad (5.5)$$

Zamenom (5.5) u (5.4), sledi:

$$\sin(z_0 + R) = n_0 \sin z_0. \quad (5.6)$$

Razvijanjem (5.6) dobija se konačni izraz za ugao refrakcije  $R$ :

$$R = (n_0 - 1) \tan z_0, \quad (5.7)$$

gde se  $R$  dobija u radijanima. Jednačina (5.7) dobro aproksimira uticaj refrakcije za izvore bliske zenitu. U slučaju većih zenitnih odstojanja, pretpostavljanje planparalelnih slojeva atmosfere dovodi do greške u računanju refrakcije, pa se u tim slučajevima mora uzeti u obzir zakrivljenost Zemlje. Kao što se iz izraza (5.7) može videti, on zavisi samo od vrednosti indeksa prelamanja i zenitnog odstojanja, oba merena na fizičkoj površi Zemlje. Za standardne uslove atmosfere, koji pretpostavljaju atmosferski pritisak od 1013,24 mbar (760 mmHg) i temperaturu od 0°C, indeks prelamanja je:

$$n_0 = 1,0002927. \quad (5.8)$$

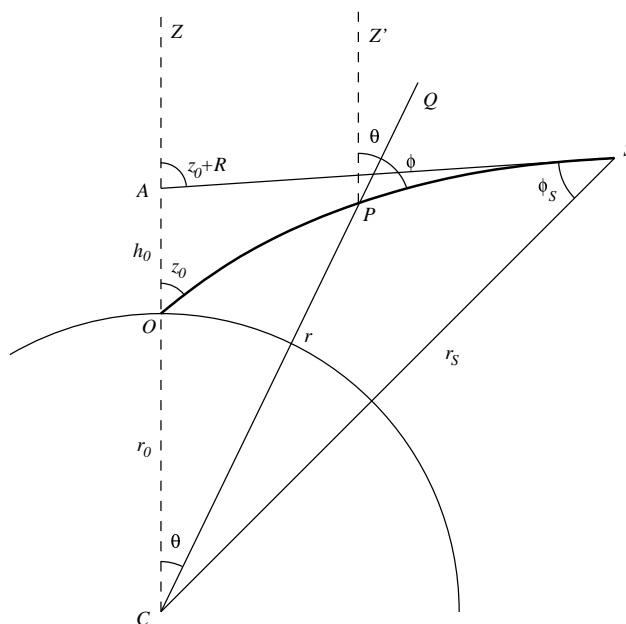
Usvajanjem ove vrednosti indeksa prelamanja, iz (5.7) možemo izračunati:

$$K = 60'', 4, \quad (5.9)$$

vrednost koja se naziva **konstantom refrakcije**. Prema Dale-Gladstoneovom zakonu o proporcionalnosti indeksa prelamanja sa gustinom vazduha, može se napisati formula za refrakciju za nestandardne uslove atmosfere:

$$R = K \frac{P/1013.24}{1 + t/273} \tan z_0, \quad (5.10)$$

gde je:



Slika 5.2: Sferno-simetrična atmosfera

- $K$  - konstanta refrakcije
- $P$  - atmosferski pritisak, izražen u mbar
- $t$  - temperatura, izražena u  $^{\circ}\text{C}$
- $z_0$  - zenitno odstojanje.

Refrakcija se dobija u lučnim sekundama, ako se konstanta refrakcije izrazi, takođe, u lučnim sekundama.

S obzirom na kompleksnu prirodu svetlosti, dodatno poboljšanje jednačine za refrakciju može se ostvariti uvođenjem talasne dužine opažanog izvora. Prelamajući se kroz Zemljinu atmosferu, složena svetlost tačkastog lika izvora se rasipa duž linije lokalne vertikale. Zato uvodimo sledeći izraz za računanje promene indeksa prelamanja:

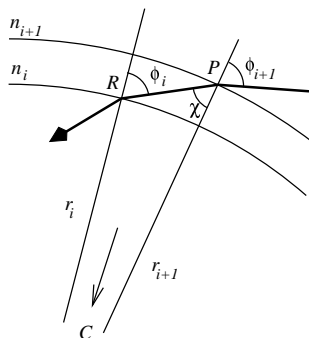
$$n_0 - 1 = 2,871 \cdot 10^{-4} \left( a + \frac{0,00567}{\lambda^2} \right), \quad (5.11)$$

gde je  $\lambda$  talasna dužina izražena u  $\mu\text{m}$ . Uvođenjem (5.11) u (5.10) dobija se približna formula za refrakciju popravljena za talasnu dužinu:

$$R = 21'',3 \frac{P(1 + 0,00567/\lambda^2)}{273 + t} \tan z_0. \quad (5.12)$$

### 5.1.2 Sferno-simetrični model atmosfere

U slučaju kada se posmatrani izvor nalazi na većim zenitnim odstojanjima, primena približne formule za refrakciju ne daje dovoljno tačne rezultate. Stoga se uvodi model sferno-simetrične atmosfere (slika 5.2). Opažač se nalazi u tački  $O$  na fizičkoj površi Zemlje, na geocentričnoj udaljenosti  $r_0$  od centra  $C$ . Pravac lokalnog zenita definisan je polupravom  $COZ$ . Udaljeni izvor koji je predmet posmatranja nalazi se u tački  $S$ , na geocentričnoj udaljenosti  $r_S$ . Putanja zraka definisana je krivom  $OPS$ , gde je tačka  $P$  proizvoljna tačka izlomljene putanje zraka. Povucimo kroz tačku  $P$  geocentrični vektor i produžimo ga do tačke  $Q$  u produžetku putanje. U tački  $P$  povucimo polpravu  $PZ'$ , paralelnu sa pravcem lokalnog zenita. Ako je ugao  $\vartheta = OCP$ , tada je i ugao  $Z'PQ$  takođe jednak  $\vartheta$ , kao ugao sa paralelnim kracima. Konstruišimo, dalje, asimptotu na putanju zraka, koja seče pravac lokalne vertikale u tački  $A$ , a ugao  $ASC$  obeležimo sa  $\phi_S$ . Posmatrač u tački  $O$  udaljeni izvor vidi pod uglom  $z_0$ . Zenitno odstojanje oslobođeno uticaja



Slika 5.3: Prelamanje svetlosti u sferno-simetričnom modelu

refrakcije je  $z = z_0 + R$ , a to je ono zenitno odstojanje koje bi izmerio posmatrač u tački  $A$ , koja se nalazi na pravcu lokalne vertikale, na visini  $h_0$  iznad tačke  $O$ . Obeležimo, na kraju, ugao  $QPS$  sa  $\phi$ .

Polarne koordinate tačke  $P$  su, tada  $(r, \vartheta)$ . Zadatak se svodi na rešavanje jednačine:

$$\vartheta = \vartheta(r). \quad (5.13)$$

Zenitno odstojanje je, prema slici 5.2:

$$z = \vartheta + \phi \quad (5.14)$$

Pošto je ugao  $\phi$  ugao između radijalnog pravca i tangente na krivu (5.13), sledi:

$$\tan \phi = r \frac{d\vartheta}{dr}. \quad (5.15)$$

Izvođenje zakona refrakcije u slučaju atmosfere aproksimirane sferno-simetričnim slojevima sprovodi se na osnovu slike 5.3, na kojoj su prikazana dva proizvoljna paralelna sloja atmosfere  $i$  i  $i+1$ , sa indeksima prelamanja  $n_i$  i  $n_{i+1}$ , geocentričnim poluprečnicima  $r_i$  i  $r_{i+1}$  i upadnim uglovima  $\phi_i$  i  $\phi_{i+1}$ , respektivno. Ako prelomni ugao kroz sloj  $i+1$  obeležimo sa  $\chi = RPC$ , iz zakona prelamanja svetlosti sledi:

$$n_{i+1} \sin \phi_{i+1} = n_i \sin \chi_i. \quad (5.16)$$

Pošto se prelamanje svetlosti vrši u ravni vertikale, trougao  $RPC$  je ravanski, pa se iz njega ugao  $\chi$  može eliminisati primenom sinusne teoreme:

$$\frac{\sin r_{i+1}}{\sin(\pi - \phi_i)} = \frac{\sin r}{\sin \chi}. \quad (5.17)$$

Sređivanjem jednačine (5.17), izražavanjem u funkciji  $\chi$  i zamenom u (5.16), sledi:

$$r_{i+1} n_{i+1} \sin \phi_{i+1} = r_i n_i \sin \phi_i, \quad (5.18)$$

odakle se vidi da proizvod  $rn \sin \phi$  ostaje očuvan sve do granice kontinualne promene indeksa prelamanja. Zato se, za indeks prelamanja na površi Zemlje, može napisati:

$$rn \sin \phi = r_0 n_0 \sin z_0, \quad (5.19)$$

s obzirom na to da je na fizičkoj površi Zemlje (u tački  $O$ , na slici 5.2),  $\vartheta = 0$  i  $\phi = z_0$ .

Da bi se izvela formula za diferencijalnu promenu refrakcije, naći ćemo totalni diferencijal funkcije (5.15), pri tome uvodeći smenu (5.14):

$$dz = d\phi + \frac{dr}{r} \tan \phi. \quad (5.20)$$

Totalni diferencijal funkcije (5.19) je:

$$n \sin \phi dr + r \sin \phi dn - rn \cos \phi d\phi = 0. \quad (5.21)$$

Razvijanjem (5.21) i primenom (5.20) sledi:

$$dz = -\frac{dn}{n} \tan \phi. \quad (5.22)$$

Primenjujući identitet:

$$\frac{1}{\sin^2 \phi} = 1 + \cot^2 \phi \quad (5.23)$$

i uvodeći ga u (5.19), dobija se izraz:

$$\tan \phi = \frac{r_0 n_0 \sin z_0}{\sqrt{r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0}}. \quad (5.24)$$

Ukoliko izraz za  $\tan \phi$  iz jednačine (5.24) zamenimo u (5.22), njegovim integraljenjem dobija se izraz za računanje refrakcije:

$$R = r_0 n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \sqrt{r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0}}. \quad (5.25)$$

Računanje refrakcije je, takođe, moguće izvesti i integraljenjem putanje zraka, što se vrši integraljenjem jednačine (5.15), što rezultuje sledećim integralom:

$$\vartheta = r_0 n_0 \sin z_0 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2 - r_0^2 n_0^2 \sin^2 z_0}}. \quad (5.26)$$

Kada je putanja zraka udaljenog izvora određena, ostaje još problem određivanja visine  $h_0$ , koja je zanemarljiva za mala zenitna odstojanja. Za izvore bliskim zenitu, međutim, vrednost ove veličine se značajno povećava, da bi za izvore na samom horizontu imala vrednost od  $h_0 \approx 1,5$  km. Korekcije za  $h_0$  se uvode samo pri opažanju Meseca na malim visinama, kao i kod opažanja veštačkih Zemljinih satelita, gde se njen uticaj ne može zanemariti.

Preciznije razmatranje refrakcije u sferno-simetričnom modelu predviđa uvođenje i analizu promene gustine atmosfere sa udaljavanjem od fizičke površi Zemlje. Postoje različiti modeli promene gustine sa povećanjem  $r$ . Na primer, hipoteza Simpsona i Bougera predlaže opadanje gustine s visinom u aritmetičkoj progresiji. Geometrijsku progresiju objašnjava hipoteza Newtona i Bessela, dok model Laplacea i Guldina pretpostavlja kombinaciju aritmetičke i geometrijske progresije.

### 5.1.3 Tablice refrakcije

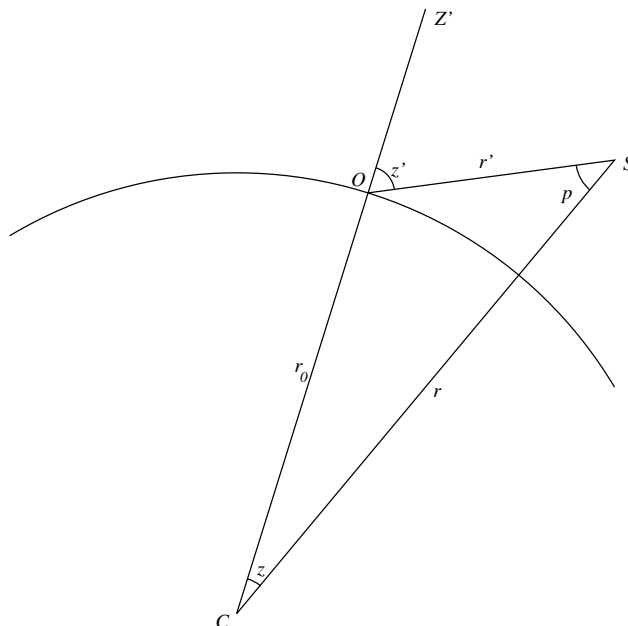
Ipak, sve pomenute hipoteze ne nude dovoljno dobra rešenja za izvore koji se nalaze blizu horizonta. Za tretiranje izvora koji se nalaze tačno na horizontu, mada je nepoznata, obično se usvaja standardna vrednost od  $R = 34'$ , koja se naziva **horizontskom refrakcijom**. Sledeća aproksimacija se odnosi na Sunce: s obzirom da je prividna veličina Sunčevog diska oko  $16'$ , izlazak Sunca se računa za gornji rub Sunčevog diska. Ako se uzme u obzir vrednost horizontske refrakcije, centar Sunca se u trenutku izlaska, u stvari, nalazi na  $50'$  ispod horizonta.

Tablice refrakcije se koriste u najpreciznijim radovima. Na primer, tablice Pulkovske opservatorije [Aba85] su izračunate prema složenoj Guldinovoju teoriji. Za srednje vrednosti zenitnih odstojanja vrednosti u tablicama predstavljaju kombinaciju razvoja indeksa prelamanja i lokalnih uslova dobijenih iz merenja. Za velika zenitna odstojanja, uslovi prelamanja svetlosti su nepoznati i promenljivi, pa su vrednosti u tablicama skoro isključivo rezultat merenja.

Refrakcija se, prema [Aba85], računa sledećom formulom:

$$\log r = \log r_0 + \lambda \gamma + AB + C + D + F + H, \quad (5.27)$$

gde je  $r_0$  vrednost **normalne (srednja) refrakcije**, koja je jednaka refrakciji pri temperaturi od  $0^\circ\text{C}$  i  $1013,24$  mbar. Ako se uzmu obzir mereni temperatura i pritisak na stanici, govori se o **pravoj refrakciji**. Objašnjenja ostalih parametara jednačine (5.27) data su u [Aba85].



Slika 5.4: Geocentrična paralaksa

Najveći problem u astrogeodetskim određivanjima predstavljaju **anomalije refrakcije**, kao rezultat odstupanja od teorijskog modela refrakcije. Posmatrajući, kao približnu, tako i formulu refrakcije u sferno-simetričnom modelu, refrakcija se smanjuje kako se približavamo zenitu. Ipak, refrakcija nema vrednost 0 u samom zenitu, već u tački bliskoj lokalnom zenitu koja se naziva **zenitom refrakcije**. Sama pojava se naziva **zenitskom refrakcijom**, a uzrokovana je nagibom atmosferskih slojeva.

## 5.2 Paralaksa

Posmatranja nebeskih tela se vrše iz topocentra, koji se kreće usled dnevnog kretanja Zemlje. Da bi se merenja izvršena na različitim mestima na Zemlji mogla upoređivati, vrše se svođenja na geocentar. Međutim, zbog kretanja geocentra, usvaja se baricentar Sunčevog sistema kao početak inercijalnog koordinatnog sistema.

Paralaksa se definiše kao ugao pod kojim se vidi neki objekat. Iz prethodnog paragrafa, zaključuje se da se uticaj paralakse može podeliti na dva dela: (1) geocentričnu paralaksu, koja se obračunava tokom svođenja merenja sa topocentra na geocentar i (2) godišnju paralaksu, kojom se merenja sa geocentra svode na baricentar.

Za geocentričnu paralaksu se u literaturi često sreće i naziv **dnevna paralaksa**.

### 5.2.1 Geocentrična paralaksa

Posmatrajmo sliku 5.4 i uočimo na njoj tačku topocentar u tački  $O$ . Ako je  $C$  geocentar, tada je poluprava  $CZ'$  pravac geocentričnog zenita. geocentrični radijus vektor topocentra je  $r_0$ . Udaljeni izvor se nalazi u tački  $S$ , čiji je geocentrični radijus vektor  $r$ . Posmatrač u topocentru meri zenitno odstojanje  $z'$  u odnosu na geocentrični zenit  $Z'$ . Označimo vektor  $OS$  sa  $r'$ . Ugao  $z$  se formalno naziva **geocentričnim zenitnim odstojanjem**. Tada se ugao  $p$  naziva **geocentričnom paralaksom**. Sa slike se uočava identitet:

$$z' = z + p. \quad (5.28)$$

Tačke  $O$ ,  $C$  i  $S$  se nalaze u istoj ravni, koja ne predstavlja ravan mesnog meridijana. Primenimo na trougao  $OCS$  sinusnu jednačinu za ravanski trougao:

$$\frac{\sin p}{r_0} = \frac{\sin(\pi - z')}{r} = \frac{\sin z}{r'}, \quad (5.29)$$

odakle se, posle sređivanja izraza, dobija:

$$\sin p = \frac{r_0}{r} \sin z' = \frac{r_0}{r'} \sin z. \quad (5.30)$$

Analizom jednačine (5.30) može se uočiti da paralaksa  $p$  raste sa povećanjem geocentričnog zenitnog odstojanja  $z$ , kao i da je za udaljenije izvore iznos paralakse manji. Takođe, pošto je trougao  $OCS$  ravanski, geocentrična paralaksa ne utiče na azimut izvora. Za izvor koji se nalazi na horizontu ( $z' = \frac{\pi}{2}$ ) i posmatrača na ekvatoru ( $r_0 = a$ ), paralaksa ima iznos:

$$\sin P = \frac{a}{r} \quad (5.31)$$

i naziva se **ekvatorskom horizontskom paralaksom**, ili skraćeno, horizontskom paralaksom. Sada se geocentrična paralaksa izvora u proizvoljnom položaju može izraziti preko horizontske paralakse kao:

$$\sin p = \frac{r_0}{a} \sin P \sin z'. \quad (5.32)$$

Treba napomenuti da se geocentrična paralaksa ne obračunava za izvore izvan Sunčevog sistema, pošto ima zanemarljiv iznos ( $0,00003$ ) u odnosu na tačnost merenja ( $0'',5 - 0'',01$ ). S druge strane, za izvore u Sunčevom sistemu, geocentrična paralaksa ima znatan uticaj i obavezno se uzima u obzir. Zbog kretanja Zemlje i objekata Sunčevog sistema, iznos horizontske paralakse se menja. Tako, na primer, horizontska paralaksa Meseca, zbog ekscentričnosti njegove putanje, varira od  $54'$  do  $61'$ .

## 5.2.2 Uticaj geocentrične paralaksa na ekvatorske koordinate

Ako se pretpostavi da je geocentrična paralaksa dovoljno mala, tada se jednačina (5.30) može napisati kao:

$$dz = \frac{r_0}{r} \sin z. \quad (5.33)$$

Ako primenimo opšte formule za mala pomeranja duž nebeske sfere, usvojimo za koeficijent  $k = r_0/r$  i identifikujemo geocentar kao tačku  $O(\alpha_0, \delta_0)$ , tada je  $\delta_0 = \phi'$  geocentrična širina mesta opažanja, a  $\alpha_0 = s$ , mesno zvezdano vreme. Odatle je  $t = \alpha_0 - \alpha$  časovni ugao izvora. Primenom jednačina za mala pomeranja, dobija se:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{r_0 \cos \phi' \sin t}{r \cos \delta} \\ d\delta &= \frac{r_0}{r} (\cos \phi' \cos t \sin \delta - \sin \phi' \cos \delta). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ove formule su tačne do prvog reda ( $r_0/r$ ), pa se ne mogu koristiti za računanje paralakse Meseca, već samo za računanje paralakse objekata na heliocentričnim putanjama dalje od Zemlje.

## 5.2.3 Godišnja paralaksa

Neka je (slika 5.5) tačkom  $C$  označen baricentar Sunčevog sistema, tačkom  $E$  proizvoljni položaj Zemlje na putu oko Sunca i tačkom  $X$  udaljeni izvor čiju godišnju paralaksu treba izračunati. Baricentrični radijus-vektor Zemlje označimo sa  $R$ , baricentrični radijus-vektor udaljenog izvora sa  $r$ , a njegov geocentrični radijus-vektor sa  $r'$ . Tada se iznos godišnje paralakse dobija iz jednostavne vektorske jednačine:

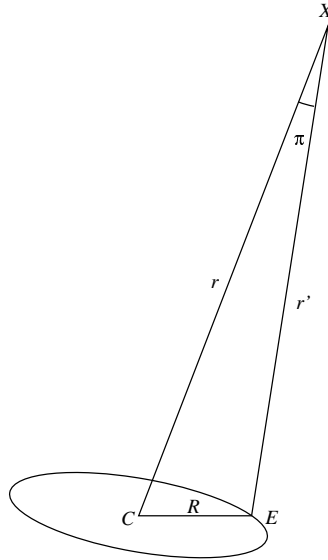
$$r = r' + R. \quad (5.35)$$

Za tela Sunčevog sistema ova jednačina će se koristiti u tačnom obliku, dok su za udaljene izvore dovoljne izvesne aproksimacije. Elongacija izvora u odnosu na Sunce je ugao kod temena  $E$  u ravnom trouglu  $CXE$ . Primenjujući sinusnu jednačinu, sledi:

$$\frac{\sin p}{R} = \frac{\sin E}{\sin r}. \quad (5.36)$$

Matematička interpretacija godišnje paralakse data je sledećom jednačinom:

$$\sin \pi = \frac{1}{r}, \quad (5.37)$$



Slika 5.5: Godišnja paralaksa

gde se baricentrični radijus-vektor izvora  $r$  izražava u astronomskim jedinicama, što odgovara godišnjoj paralaksi za  $R = 1$  i  $E = 90^\circ$ . Pošto su paralakse zvezda veoma male, sa dovoljnom tačnošću se može napisati:

$$r = \pi^{-1}. \quad (5.38)$$

Praktična jedinica za iskazivanje velikih rastojanja zove se **parsek** i odgovara paralaksi od jedne lučne sekunde. Uticaj paralakse na nebeske ekvatorske koordinate može se izvesti direktnom primenom izraza za male promene koordinata nebeskih tela duž nebeske sfere. Tačka  $O$ , u ovom slučaju, predstavlja Sunce, a koeficijent  $k$  je iznos godišnje paralakse. Ako za koordinate Sunca usvojimo  $(\alpha_S, \delta_S)$ , primenom obrazaca za računanje malih pomeranja sledi:

$$\begin{aligned} d\alpha^S &= -\frac{\pi \sin(\alpha - \alpha_S) \cos \delta_S}{15 \cos \delta} \\ d\delta'' &= -\pi [\sin \delta \cos \delta_S \cos(\alpha - \alpha_S) - \cos \delta \sin \delta_S], \end{aligned} \quad (5.39)$$

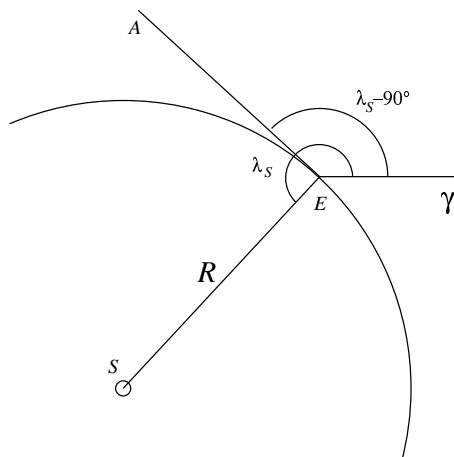
gde je paralaksa izražena u lučnim sekundama. U opštim izrazima za mala pomeranja formule su izvedene za pozitivne vrednosti  $d\alpha$  i  $d\delta$ , odnosno, pomeranje se vršilo od tačke  $O$ . Kako se u slučaju godišnje paralakse pomeranje vrši **prema** Suncu, promene imaju suprotan znak.

### 5.3 Aberacija

Otkrivanje pojave aberacije vezuje se za britanskog astronoma Jamesa Bradleyja, koji je, istražujući uočenu promenu deklinacije zvezde  $\gamma$  Draconis od oko  $20''$ , primetio da je promena deklinacije usmerena ne u pravcu Sunca, kako bi se očekivalo da promena dolazi usled paralakse, već u pravcu čija se longituda razlikuje za  $90^\circ$  u odnosu na longitudu Sunca. Proučavajući pojavu, pronašao je njen uzrok i obrazložio ga.

Do pojave aberacije dovodi kretanje Zemlje, čija je brzina reda  $30 \text{ km/s}$ , što iznosi  $10^{-4}$  od brzine svetlosti, pa se ne može zanemariti. Kada bi se Zemlja kretala u pravcu posmatranog izvora, pojava aberacije se ne bi mogla uočiti. Međutim, kako se Zemlja kreće u proizvoljnom smeru u odnosu na izvor, svetlosni zrak koji iz durbina stigne do izvora, u povratku ne pada u žižnu ravan objektiva, već je pomeren za odgovarajući iznos. Tačka na nebeskoj sferi prema kojoj se kreće Zemlja zove se **apeks**. Skretanje pristiglog zraka u odnosu na žižnu ravan objektiva zavisi od pravca kretanja Zemlje. Ako je ovo kretanje upravno na izvor koji se posmatra, iznos aberacije je najveći, a ugao skretanja zraka se, u tom slučaju, naziva **konstantom aberacije**. Konstanta aberacije se može izvesti posmatranjem kretanja Zemlje u odnosu na neku zvezdu. Za razliku od geocentrične paralakse, koja se mogla zanemariti za udaljene izvore, svako Zemljino kretanje prouzrokuje aberaciono pomeranje reflektovanog zraka izvora,





Slika 5.6: Aberacija svetlosti

pa se zato računavaju za sva nebeska tela. Dnevno Zemljino kretanje oko svoje ose prouzrokuje **dnevnu aberaciju**, dok se **godišnjom aberacijom** naziva pojava koja nastaje usled Zemljinog godišnjeg kretanja oko Sunca.

### 5.3.1 Godišnja aberacija

Da bismo izveli formulu za godišnju aberaciju, pretpostavimo da se posmatrač nalazi u tački  $E$  (slika 5.5). Označimo njegov pravac ka udaljenom izvoru  $X$  sa  $\vec{s}^*$ . Ne ulazeći detaljnije u njeno izvođenje, primenićemo formulu za aberacionu korekciju prvog reda [Gre98, (8.16)], zamenjujući, pri tome, brzinu Zemlje sa  $\vec{R}$ , što dovodi do jednačine:

$$\vec{d}s = \vec{s}^* - \vec{s}' = c^{-1} \vec{s}' \times (\vec{s}' \times \vec{R}). \quad (5.40)$$

Ukoliko jedinični vektor  $\vec{s}'$  zamenimo sa  $\vec{s}$ , sledi:

$$\vec{d}s = c^{-1} \left[ \vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{s}) \vec{s} \right]. \quad (5.41)$$

Iz prethodnih jednačina se mogu izvesti promene ekvatorskih koordinata usled godišnje aberacije:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\dot{Y} \cos \alpha - \dot{X} \sin \alpha}{c \cos \delta} \\ d\delta &= c^{-1} \left( \dot{Z} \cos \delta - \dot{X} \cos \alpha \sin \delta - \dot{Y} \sin \alpha \sin \delta \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ovde je brzina svetlosti izražena u astronomskim jedinicama po danu, da bi bila u skladu sa ostalim elementima jednačine (5.42):

$$c = 173,14 \text{ AJ/d}. \quad (5.43)$$

Približni vektor položaja Zemlje u ekliptičkom sistemu koordinata se može izraziti kao [Gre98, (8.19)]:

$$\vec{R} = (-\cos \lambda_S, \sin \lambda_S, 0), \quad (5.44)$$

gde je  $\lambda_S$  longituda prava ekliptička longituda Sunca. Ako se brzina Zemlje napiše vektorski kao:

$$\vec{R} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1, \quad (5.45)$$

gde je:

- $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}$  - transverzalna komponenta brzine Zemlje

- $V_1 = eV_0$  - konstantna brzina paralelna maloj osi Zemljine eliptične putanje

tada se vektori  $\vec{V}_0$  i  $\vec{V}_1$  mogu napisati kao:

$$\begin{aligned}\vec{V}_0 &= V_0 (\sin \lambda_S, -\cos \lambda_S, 0) \\ \vec{V}_1 &= eV_0 (-\sin \omega, \cos \omega, 0).\end{aligned}\quad (5.46)$$

Koristeći se rezultatima (5.42) i prelaskom na ekliptičke koordinate sledi:

$$\begin{aligned}d\lambda &= -\chi \frac{\cos(\lambda - \lambda_S)}{\cos \beta} \\ d\beta &= \chi \sin \beta \sin(\lambda - \lambda_S).\end{aligned}\quad (5.47)$$

Konstanta aberacije je, odatle:

$$\chi = \frac{V_0}{c} = \frac{k}{c} \sqrt{\frac{1+m}{a(1-e^2)}}, \quad (5.48)$$

gde je:

- $k$  - Gausova konstanta;
- $m$  - masa Zemlje;
- $c$  - brzina svetlosti;
- $a$  - velika poluosa Zemljine putanje i
- $e$  - prvi brojni ekscentricitet putanje Zemlje.

Konstanta aberacije se dobija kao bezdimenzioni broj. Primenjujući sistem konstanti Međunarodne astronomske unije, sledi da je:

$$\chi = 20'', 49552. \quad (5.49)$$

Zamenom vrednosti za komponente brzine vektora Zemlje u (5.42) i uvođenjem konstante aberacije  $\chi$ , dobijamo konačne izraze za uticaj godišnje aberacije na nebeske ekvatorske koordinate:

$$\begin{aligned}d\alpha &= -\chi \frac{\sin \lambda_S \sin \alpha + \cos \lambda_S \cos \alpha \cos \epsilon}{\cos \delta} \\ d\delta &= -\chi [\sin \lambda_S \cos \alpha \sin \delta - \cos \lambda_S \cos \epsilon (\tan \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta)].\end{aligned}\quad (5.50)$$

Kako je napred rečeno, pravac apeksa je, u slučaju godišnje aberacije, uvek tačka čija je longituda za  $\pi$  manja od longitude Sunca. Grafički je položaj apeksa prikazan na slici (5.6) tačkom  $A$ , dok je pravac prema tački prolećne ravnodnevnice označen sa  $\gamma$ . Longituda Sunca (tačka  $S$ ) je  $\lambda_S$ , a pravac ka apeksu ima longitudu  $\lambda_s - 90^\circ$ .

### 5.3.2 Dnevna aberacija

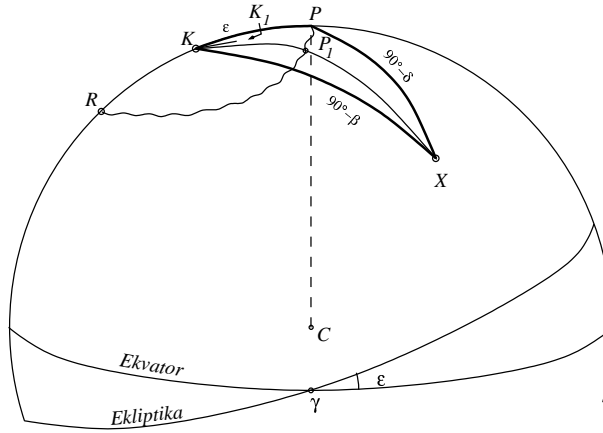
Dnevna aberacija nastaje usled Zemljinog dnevnog kretanja oko svoje ose. Zbog ekvatorske brzine rotacije Zemlje od  $1,6 \cdot 10^{-6}$ , ovaj uticaj nikad ne prelazi 0,3". Stoga se relativistički efekti mogu zanemariti i dozvoliti klasičan pristup.

Ako za vektor promene položaja izvora u pravcu  $\vec{s}$  usvojimo [Gre98, (4.65)]:

$$\vec{d}s = -\frac{V}{c} \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{n}), \quad (5.51)$$

gde je brzina posmatrača  $V\vec{n}$  ( $\vec{n}$  - jedinični vektor u pravcu kretanja posmatrača), a za promene nebeskih ekvatorskih koordinata primenimo izraze za mala pomeranja po nebeskoj sferi, sledi:

$$\begin{aligned}d\alpha &= \frac{V \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 - \alpha)}{c \cos \delta} \\ d\delta &= \frac{V}{c} [\cos \delta \sin \delta_0 - \sin \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 - \alpha)],\end{aligned}\quad (5.52)$$



Slika 5.7: Precesija, nutacija i sopstveno kretanje

gde su  $\alpha_0$  i  $\delta_0$  koordinate apeksa koji se nalazi u pravcu jediničnog vektora  $\vec{n}$ .

Ako sa  $\omega$  označimo ugaonu brzinu Zemlje, a posmatrač se nalazi na geografskoj širini  $\phi'$  i geocentričnom rastojanju  $R$ , tada je brzina posmatrača u odnosu na centar Zemlje:

$$V = R\omega \cos \phi'. \quad (5.53)$$

Brzina posmatrača je uvek usmerena ka istoku, što znači da je vektor  $\vec{n}$  usmeren ka istočnoj tački horizonta, pa je:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= s + 6^h \\ \delta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Primenjujući (5.54) na (5.52) i zamenjujući  $t = s - \alpha$ , izrazi za promenu ekvatorskih koordinata su:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{R\omega \cos \phi' \cos t}{c \cos \delta} \\ d\delta &= \frac{R\omega \cos \phi' \sin \delta \sin t}{c}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

S obzirom na malu vrednost ovog uticaja, mogu se uvesti i dodatne aproksimacije, ne narušavajući, pritom, tačnost. Zamenom geocentrične širine  $\phi'$  astronomskom  $\Phi$  i zamenom vrednosti ugaone brzine Zemlje:

$$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}, \quad (5.56)$$

možemo napisati finalne izraze za uticaj dnevne aberacije na nebeske ekvatorske koordinate:

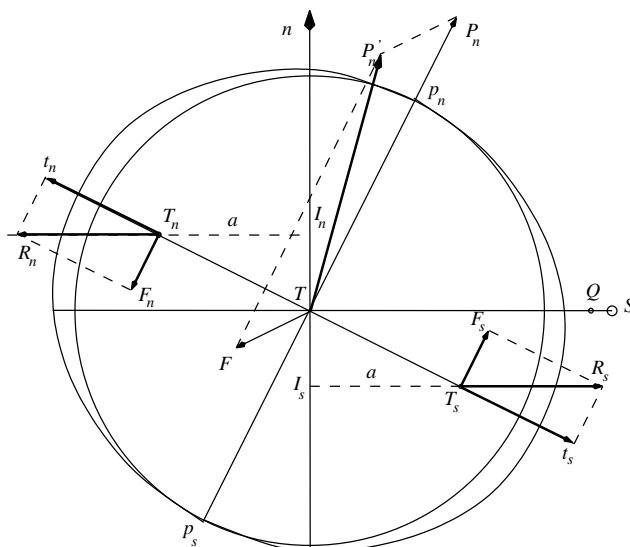
$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{0^S,0213 \cos \Phi \cos t}{\cos \delta} \\ d\delta &= 0'',320 \cos \Phi \sin \delta \sin t. \end{aligned} \quad (5.57)$$

## 5.4 Precesija

### 5.4.1 Uvod

Precesija je pojava do koje dolazi usled promene položaja polova ekvatora i ekliptike. Pojava je bila poznata još u staroj Grčkoj, otkrio je astronom Hiparh, mereći dužinu tropske godine i upoređujući je sa podacima od pre 150 godina. Za dužinu tropske godine dobijao je vrednosti za oko 22 minuta manje od onih u prethodnom opažačkom materijalu. Na osnovu izmerenih položaja zvezda, primetio je da se oni razlikuju od prethodnih. Iz toga je izveo zaključak da se tačka prolećne ravnodnevnicke pomera po ekliptici prema Suncu, zbog čega je pojavu i nazvao **precesijom**, što znači prednjačenje. Razlika u dužini tropske godine od  $22^{\text{min}}$  odgovara precesiji od oko  $50''$ .

Zajedničko razmatranje precesije, nutacije i sopstvenog kretanja se može izvesti sa slike 5.7. Obeležimo severni nebeski pol sa  $P$ , severni pol ekliptike sa  $K$  i sa  $X$  nebesko telo u proizvoljnom položaju. Tada



Slika 5.8: Uticaj privlačne sile Sunca na Zemlju

su: ugao  $PK = \epsilon$ ,  $PX = \frac{\pi}{2} - \delta$  i  $KX = \frac{\pi}{2} - \beta$  uglovi u sfernom trouglu  $PKX$ . Severni nebeski pol se, od ove tri tačke, najviše pomera i to usled planetne precesije i nutacije. Pol ekliptike se pomera usled lunisolarne precesije, dok se sama tačka  $X$  pomera usled sopstvenog kretanja zvezde. Uopšte, precesija i nutacija su dva vezana efekta, gde se precesija odnosi na ravnomerno kretanje nebeskog pola, a nutacija na periodično kretanje pravog oko srednjeg pola.

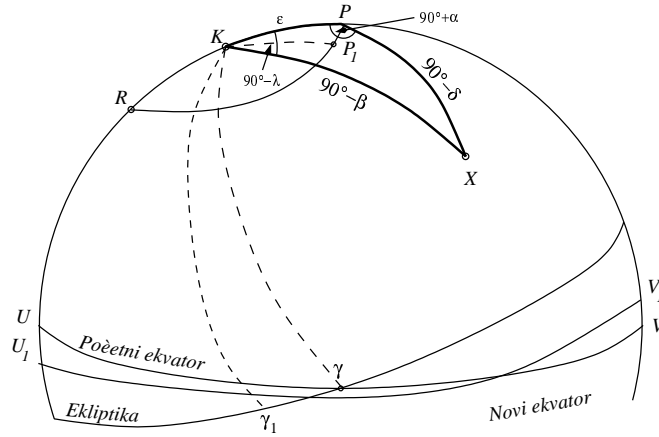
#### 5.4.2 Lunisolarna precesija

Mehanički posmatrano, do lunisolarne precesije dolazi usled torzionog privlačenja Zemlje od strane Meseca i Sunca. Da je Zemlja homogena sfera, do torzije ne bi dolazilo. Međutim, usled Zemljinog ekvatorijalnog ispupčenja i spljoštenosti na polovima, privlačne sile Meseca i Sunca stvaraju spreg sila.

Mehanika ove pojave se može objasniti tako što ćemo Zemlju zamisliti kao sferu kojoj su dodata ispupčenja na ekvatoru (slika 5.8). Neka je Sunce u tački  $S$ , a tačka  $Q$  neka predstavlja centar mase sistema Zemlja-Sunce. Težišta ekvatorijalnih ispupčenja su, tada, u tačkama  $T_n$  i  $T_s$ . Zemljina polarna osa je  $p_n p_s$ . Centrifugalna sila Zemlje i privlačna sila Sunca, koje su uvek u ravnoteži, stvaraju spreg sila čije rezultante u težišnim tačkama ispupčenja iznose  $\vec{R}_s$  i  $\vec{R}_n$ . Ove rezultante su prikazane paralelnim sa pravcem  $TS$  zbog velike udaljenosti Sunca. U stvari, pravac sila  $\vec{R}_s$  i  $\vec{R}_n$  je usmeren ka Suncu, dok im je smer suprotan, kao što i prikazuje slika 5.8. Rastavljanjem rezultanti na dve komponente, od kojih je jedna upravna, a druga paralelna Zemljinoj osi rotacije, anuliranjem upravnih komponenti, ostaje samo spreg sila paralelnih Zemljinoj osi rotacije, koji teži da Zemlju obrne oko ose u tački  $T$  i dovede ekvator do poklapanja s ekliptikom. Ovde je prikazano samo dejstvo Sunca. Na isti način se može tretirati i privlačno dejstvo Meseca, koje se od Sunčevog, praktično, razlikuje samo u intenzitetu, s obzirom na položaj Mesečeve putanje oko Zemlje, koja je nagnuta za svega  $5^\circ$  u odnosu na ravan ekliptike. Štaviše, zbog svoje blizine Zemlji,  $2/3$  ukupnog iznosa lunisolarne precesije otpada na Mesec.

Ukoliko zajednički uticaj Sunca i Meseca predstavimo silom  $F$  i uočimo da se Zemljina osa po inerciji već kreće oko svoje ose, torziju možemo smatrati poremećajem osnovnog sprega sila. Ako spreg Zemljine rotacije prikažemo vektorom  $\vec{P}_n$ , slaganjem sa silom  $\vec{F}$ , dobićemo rezultatni vektor Zemljine rotacije,  $\vec{P}'_n$ .

Matematičku formu lunisolarne precesije ćemo dobiti na osnovu slike 5.9. Neka je severni nebeski pol u trenutku  $t$  u tački  $P$ , pol ekliptike u  $K$ , a nebesko telo neka je predstavljeno tačkom  $X$ , koja ima nebeske ekvatorske  $\alpha$  i  $\delta$  i ekliptičke koordinate  $\beta$  i  $\lambda$ . Rektascenzija je, tada,  $KPX = \alpha$ , a deklinacija  $PX = \frac{\pi}{2} - \delta$ . Srednji ekvinocij za epohu  $t$  obeležimo sa  $\gamma$ . Tačka  $P_1$  je položaj pola u trenutku  $t + \tau$ . Lunisolarna precesija se, grubo posmatrano, može zamisliti kao kretanje pola po malom krugu  $PP_1R$ . Pun precesioni krug polarna osa obiđe oko ose ekliptike za oko 25700 godina. Ovaj period se naziva **platonskom godinom**. Godišnje pomeranje tačke  $P$  po ovom malom luku označimo sa  $\phi$ , što odgovara



Slika 5.9: Lunisolarna precesija

vrednosti od oko  $50''$ . Kako pravac srednje torzije mora ležati, istovremeno, u ravnima ekvatora i ekliptike, izvodi se zaključak da je pravac torzije usmeren ka  $\gamma$  tački. Nagib ekliptike označimo sa  $\epsilon$ , što odgovara luku velikog kruga  $KP$ . Luk  $PKP_1 = \phi\tau$  označava dužinu pomeranja pola duž luka  $PP_1R$ . Pomeranjem nebeskog pola, dolazi i do promene položaja ekvatora u odnosu na ekliptiku, a sledstveno tome, do promene položaja  $\gamma$  tačke u  $\gamma_1$ . Pošto je  $PK\gamma = P_1K_1\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ , izvodi se zaključak da je ugao  $\gamma\gamma_1 = \phi\tau$ .

Izvedimo promene ekliptičkih koordinata usled lunisolarne precesije. Za sada ćemo pretpostaviti da je pol ekliptike nepokretan. Stoga se promena dešava samo u nebeskoj longitudi, pa sledi:

$$\begin{aligned} d\lambda &= \phi\tau \\ d\beta &= 0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Izvođenje izraza za promenu ekvatorskih koordinata je, donekle, složenije. Moramo se poslužiti sfernom trigonometrijom, primenjujući kosinusnu teoremu na trougao  $PKX$  i deklinaciju:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\epsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\epsilon \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right). \quad (5.59)$$

Nađimo totalni diferencijal funkcije (5.59). Pošto se promena dešava samo u latitudi, diferenciranje se vrši samo po  $\delta$  i  $\lambda$ , posle čega se dobija:

$$\cos\delta d\delta = \sin\epsilon \cos\beta \cos\lambda d\lambda. \quad (5.60)$$

Uvedimo ekvatorske koordinate primenom sinusne teoreme:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}. \quad (5.61)$$

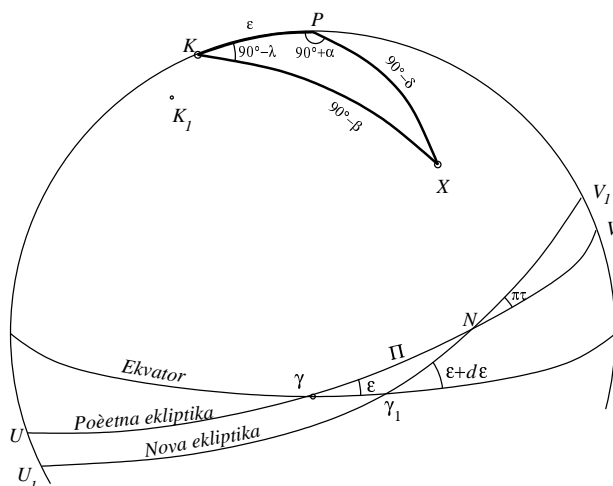
Zamenom (5.61) u (5.60) i primenom (5.58) dovodi do izraza za promenu deklinacije:

$$d\delta = \phi\tau \sin\epsilon \cos\alpha. \quad (5.62)$$

Promenu rektascenzije možemo dobiti nalaženjem totalnog diferencijala (5.61). Posle diferenciranja (5.61), zamenom (5.58) i (5.62) i primenom sinusno-kosinusne teoreme na rezultat, dobija se konačan izraz za promenu rektascenzije:

$$d\alpha = \phi\tau (\cos\epsilon + \sin\epsilon \sin\alpha \tan\delta). \quad (5.63)$$

Posledica lunisolarne precesije je promena izgleda zvezdanog neba. Usled promene položaja nebeske polarne osovine, pomera se i položaj svetskog pola i to u pravcu zvezde Vege, gde će se i naći za nekih 12.000 godina.



Slika 5.10: Planetna precesija

### 5.4.3 Planetna precesija

Ekliptika se definiše kao srednja ravan putanje baricentra Zemlja-Mesec. Osim lunisolarne precesije, postoji još jedan efekat koji menja položaj ekliptike, a koji dolazi usled privlačnih sila planeta Sunčevog sistema. Menjajući, donekle, nagib ekliptike u odnosu na ekvator, u precesionom kretanju deluje u direktnom smeru. Ova posledica promene koordinatnog sistema se označava kao **planetna precesija**. Promena položaja pola ekliptike usled planetne precesije kreće se u granicama od  $\pm 4^\circ$ . Pomeranje  $\gamma$  tačke po ekliptici, kao posledica ovog efekta, iznosi oko  $\theta = 0''$ , 13 na godišnjem nivou.

Za približno izvođenje planetne precesije poslužićemo se slikom 5.10. Jednostavnosti radi, pretpostavićemo da su nebeski pol (a, samim tim i ekvator) nepokretni. Sa  $K$  i  $\gamma$  označimo pol ekliptike i ekvinocij za neku epohu  $t$ , a sa  $K_1$  i  $\gamma_1$  njihove položaje za epohu  $t + \tau$ . Tada je ekliptika za epohu  $t$  data kao  $U\gamma V$ , dok je položaj ekliptike posle vremenskog intervala  $\tau$  dat sa  $U_1\gamma_1 V_1$ . Neka su  $N$  i  $N_1$  presečne tačke ekliptika u dve epohe. Promena nagiba ekliptike se može zamisliti kao njihanje ekliptike oko preseka  $NN_1$ . Ovu rotaciju označimo sa  $\pi$ , ugao  $V_1NV = \pi\tau$ , a položaj tačke  $N$  u odnosu na ekvinocij  $\gamma$  kao  $\gamma N = \Pi$ .

Pošto je pretpostavljeno da se nebeski pol ne kreće, uticaj planetne precesije na ekvatorske koordinate je jednostavno izračunati. Pošto se pomeranje ekvinocija vrši duž ekvatora, nema promene po deklinaciji, pa je:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\lambda_1\tau, \\ d\delta &= 0, \end{aligned} \quad (5.64)$$

gde se  $\lambda_1\tau$  naziva **godišnjim iznosom planetne precesije**, koji predstavlja pomeranje ekvinocija po luku  $\gamma\gamma_1$ . P  $\lambda_1$  se može izračunati iz sfernog trougla  $\gamma\gamma_1N$ . Napišimo sinusnu teoremu za trougao  $\gamma\gamma_1N$ :

$$\frac{\sin \Pi}{\sin(\pi - (\varepsilon + d\varepsilon))} = \frac{\sin \lambda_1\tau}{\sin \pi\tau}. \quad (5.65)$$

Pošto je  $\tau$  mali ugao, posle sređivanja se dobija:

$$\lambda_1 = \pi \frac{\sin \Pi}{\sin \varepsilon}. \quad (5.66)$$

Promena nagiba ekliptike se izvodi iz četvoroelementnog obrasca:

$$\cos \varepsilon \cos \lambda_1\tau = \sin \lambda_1\tau \cot \Pi + \sin \varepsilon \cot(\varepsilon + d\varepsilon), \quad (5.67)$$

odakle se, sređivanjem, primenom aproksimacija za male uglove i uvođenjem izračunatog izraza za  $\lambda_1$  iz (5.66) dobija:

$$d\varepsilon = \pi\tau \cos \Pi. \quad (5.68)$$

Promene ekliptičkih koordinata usled planetne precesije se izvode iz kosinusne jednačine za trougao  $KPX$ , uz primenu diferencijalnih promena rektascenzije i deklinacije, izvedenih ranije:

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha. \quad (5.69)$$

Diferenciranje (5.69) i izražavanje ekliptičkih koordinata u funkciji ekvatorskih dovodi do:

$$d\beta = \pi\tau \sin(\Pi - \lambda). \quad (5.70)$$

Promena longitude se može izvesti diferenciranjem (5.61), eliminacijom proizvoda  $\cos \delta \sin \alpha$  primenom sinusne jednačine, posle čega se dobija:

$$d\lambda = \pi\tau [\tan \beta \cos(\Pi - \lambda) - \sin \Pi \cot \varepsilon]. \quad (5.71)$$

Konačno, uticaj planetne precesije na ekliptičke koordinate dat je jednačinama:

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\lambda_1 \tau \cos \varepsilon + \pi\tau \tan \beta \cos(\Pi - \lambda), \\ d\beta &= \pi\tau \sin(\Pi - \lambda). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Numeričke vrednosti parametara  $\Pi$  i  $\pi$  se računaju metodama nebeske mehanike, primenom izraza:

$$\begin{aligned} \Pi &= 174^\circ, 8764 + 0^\circ, 9137T, \\ \pi &= 0'', 4700 - 0'', 0007T, \end{aligned} \quad (5.73)$$

gde je  $T$  vreme izraženo u julijanskim vekovima, računato od epohe J2000,0.

#### 5.4.4 Opšta precesija

Superponovanje lunisolarne i planetne precesije naziva se **opštom precesijom**. Ona proizlazi iz kombinovanog kretanja ekvatora i ekliptike. Promene nebeskih ekvatorskih koordinata usled opšte precesije se mogu izračunati iz ranije izvedenih izraza za promene usled lunisolarne i planetne precesije. Njihovim sabiranjem sledi:

$$\begin{aligned} d\alpha &= m\tau + n\tau \sin \alpha \tan \delta, \\ d\delta &= n\tau \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Konstante  $m$  i  $n$  imaju sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned} m &= \phi \cos \varepsilon - \lambda_1, \\ n &= \phi \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.75)$$

gde je  $m$  godišnji iznos precesije u rektascenziji, a  $n$  godišnji iznos precesije u deklinaciji. Promene ekliptičkih koordinata se računaju iz izraza:

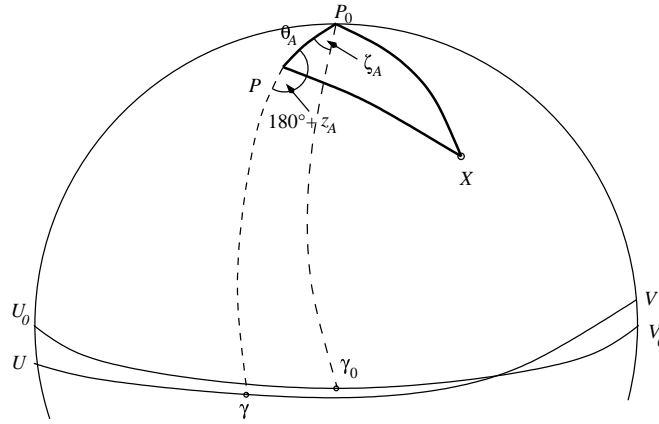
$$\begin{aligned} d\lambda &= p\tau + \pi\tau \tan \beta \cos(\Pi - \lambda), \\ d\beta &= \pi\tau \sin(\Pi - \lambda). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Faktor  $p$  se naziva **godišnjim iznosom opšte precesije (u longitudi)** i računa se kao:

$$p = \phi - \lambda_1 \cos \varepsilon. \quad (5.77)$$

Parametri  $p$ ,  $m$  i  $n$  nisu konstantni, već imaju male sekularne promene. Njihove vrednosti se, u funkciji od julijanskih vekova računatih od referentne epohe J2000,0, mogu izračunati kao:

$$\begin{aligned} p &= 50'', 2910 + 0'', 0222T, \\ m &= 3^S, 07496 + 0^S, 00186T, \\ n &= 1^S, 33621 - 0^S, 00057T = 20'', 0431 - 0'', 0085T. \end{aligned} \quad (5.78)$$



Slika 5.11: Precesioni uglovi

### 5.4.5 Izvođenje tačnih formula

Stroge formule za precesiju se mogu izvesti na osnovu slike 5.11. Neka su, za epohu  $t_0$ , definisani nebeski pol  $P_0$  i ekvinočij  $\gamma_0$ , a za epohu  $t = t_0 + \tau$  nebeski pol  $P$  i ekvinočij  $\gamma$ . Tačkom  $X$  je prikazano proizvoljno nebesko telo, čije su ekvatorske koordinata za epohu  $t_0$   $(\alpha_0, \delta_0)$ , a posle vremenskog intervala  $\tau$ ,  $(\alpha, \delta)$ . Ugao  $\zeta_A = PP_0\gamma_0$  je mali ugao za koji se nebeski pol kretao duž velikog kruga  $P_0\gamma_0$ . Ugao  $\gamma_0P_0X = \alpha_0$ , pa je ugao kod temena  $P_0 = \zeta_A + \alpha_0$ . Komplement deklinacije za epohu  $t_0$  je  $\frac{\pi}{2} - \delta_0 = P_0X$ . Neka je ugao  $\gamma PP_0 = \pi + z_A$ , gde je  $z_A$  mali ugao. Označimo, još, u sfernom trouglu ugao kod temena  $P$  sa  $P_0PX = \pi - (\alpha - z_A)$ . Luk između nebeskog pola u dve epohe obeležimo sa  $P_0P = \theta_A$ . Pošto su sad poznati svi elementi sfernog trougla  $P_0PX$ , može se pristupiti nalaženju veze između koordinata dve epohe. Napišimo, najpre, sledeće dve sinusno-kosinusne i kosinusnu jednačinu, kojom ćemo ekvatorske koordinate za epohu  $t$  izraziti u funkciji koordinata referentne epohe  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos (\alpha - z_A) &= \cos \theta_A \cos \delta_0 \cos (\alpha_0 - \zeta_A) - \sin \theta_A \sin \delta_0, \\ \cos \delta \sin (\alpha - z_A) &= \cos \delta_0 \sin (\alpha_0 + \zeta_A), \\ \sin \delta &= \sin \theta_A \cos \delta_0 \cos (\alpha_0 + \zeta_A) + \cos \theta_A \sin \delta_0. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Obrnuta transformacija se može dobiti iz izraza:

$$\begin{aligned} \cos \delta_0 \cos (\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos \theta_A \cos \delta \cos (\alpha - z_A) + \sin \theta_A \sin \delta, \\ \cos \delta_0 \sin (\alpha_0 + \zeta_A) &= \cos \delta \sin (\alpha - z_A), \\ \sin \delta_0 &= -\sin \theta_A \cos \delta \cos (\alpha - z_A) + \cos \theta_A \sin \delta. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Koeficijenti  $\zeta_A$ ,  $z_A$  i  $\theta_A$  se računaju iz teorije precesije, kao stepeni razvoji redova vremenskog intervala  $\tau$  do trećeg reda. Ako se vreme proteklo od početne epohe J2000,0 označi sa  $T$ , sledi:

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 0^\circ,640\,616\,1T + 0^\circ,000\,083\,9T^2 + 0^\circ,000\,005\,0T^3, \\ z_A &= 0^\circ,640\,616\,tT + 0^\circ,000\,304\,1T^2 + 0^\circ,000\,005\,1T^3, \\ \theta_A &= 0^\circ,556\,753\,0T - 0^\circ,000\,118\,5T^2 - 0^\circ,000\,011\,6T^3. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Koeficijenti  $\zeta_A$ ,  $z_A$  i  $\theta_A$  definišu položaj trenutne epohe ekvinočija  $\gamma$  u odnosu na referentni ekvinočij  $\gamma_0$ . Položaj nebeskog pola za referentnu epohu se može definisati preko nagiba ekliptike, koji se, iz teorije precesije, računa primenom identiteta:

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21'', 448 - 46'', 815T - 0'', 001T^2 + 0'', 002T^3. \quad (5.82)$$

Primena formula za računanje precesije se značajno pojednostavljuje uvođenjem matričnog računa, gde ćemo sferne ekvatorske koordinate izraziti u sistemu Dekartovih pravouglinih koordinata. Ako se vektorom  $\vec{s}_0$  označi vektor položaja tačke  $X$  u referentnoj epohi, a vektorom  $\vec{s}$  položaj iste tačke za epohu  $t$ , imamo:

$$\vec{s}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \sin \delta_0 \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$



Za epohu  $t$  važi:

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (5.84)$$

Primenimo na  $z$  koordinatu jednačine (5.84) treću jednačinu (5.79):

$$z = \cos \zeta_A \sin \theta_A x_0 - \sin \zeta_A \sin \theta_A y_0 + \cos \theta_A z_0. \quad (5.85)$$

Kombinovanjem prve dve jednačine (5.79) i njihovim sređivanjem dobijaju se i preostale dve Dekartove koordinate:

$$\begin{aligned} x &= (\cos \zeta_A \cos z_A \cos \theta_A - \sin \zeta_A \sin z_A) x_0 - \\ &\quad - (\cos \zeta_A \sin z_A + \sin \zeta_A \cos z_A \cos \theta_A) y_0 - \cos z_A \sin \theta_A z_0, \\ y &= (\sin \zeta_A \cos z_A + \cos \zeta_A \sin z_A \cos \theta_A) x_0 + \\ &\quad + (\cos \zeta_A \cos z_A - \sin \zeta_A \sin z_A \cos \theta_A) y_0 - \sin z_A \sin \theta_A z_0. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Precesiona matrica je, tada, oblika:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.87)$$

gde se odgovarajući elementi računaju primenom sledećih jednačina:

$$\begin{aligned} P_{11} &= -\sin \zeta_A \sin z_A + \cos \zeta_A \cos z_A \cos \theta_A, \\ P_{12} &= -\cos \zeta_A \sin z_A - \sin \zeta_A \cos z_A \cos \theta_A, \\ P_{13} &= -\cos z_A \sin \theta_A, \\ \\ P_{21} &= \sin \zeta_A \cos z_A + \cos \zeta_A \sin z_A \cos \theta_A, \\ P_{22} &= \cos \zeta_A \cos z_A - \sin \zeta_A \sin z_A \cos \theta_A, \\ P_{23} &= -\sin z_A \sin \theta_A, \\ \\ P_{31} &= \cos \zeta_A \sin \theta_A, \\ P_{32} &= -\sin \zeta_A \sin \theta_A, \\ P_{33} &= \cos \theta_A. \end{aligned} \quad (5.88)$$

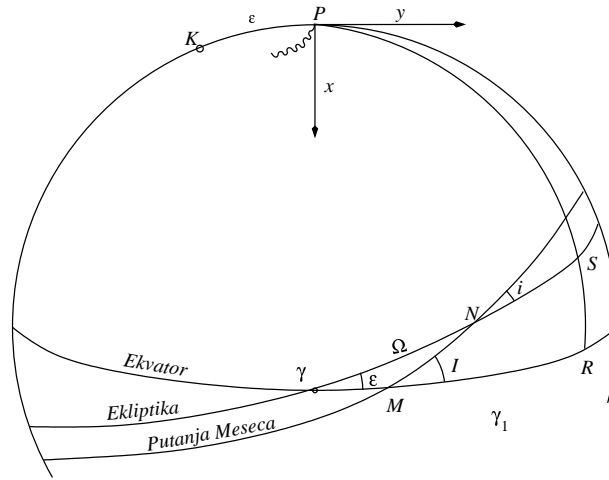
Matrično, obračun uticaja precesije između referentne epohe  $\vec{s}_0$  i epohe  $\vec{s}$  se vrši jednostavnom jednačinom:

$$\vec{s} = \mathbf{P} \vec{s}_0, \quad (5.89)$$

gde je  $\mathbf{P}$  precesiona matrica.

## 5.5 Nutacija

Precesija i nutacija su deo istog kretanja nebske polarne osovine. Razdvajanje ova dva kretanja je izvršeno u prošlosti, nakon što je astronom Bredli uočio periodičnu promenu u opštoj precesiji  $\Delta\psi$ , kao i u nagibu ekliptike  $\Delta\epsilon$ . Pojava je nazvana **astronomskom nutacijom**. Kao i u slučaju precesije, i ovde se radi o promenama ekvatorskih koordinata nebeskih tela usled promene koordinatnog sistema. Kasnije je nutacija definisana kao periodično kretanje pravog oko srednjeg pola.



Slika 5.12: Nutaciono kretanje

Kretanje tela u Sunčevom sistemu je složeno. Zbog nagiba Zemljinog ekvatora u odnosu na ekliptiku, Sunce menja svoj položaj u odnosu na ekvator. Meseć, takođe, svojim kretanjem, menja svoj položaj u odnosu na Zemlju. Osim toga, Sunce i Meseć menjaju svoj međusobni položaj, kao i položaj u odnosu na Zemlju. Usled oga, dolazi do torzionog privlačenja Sunca i Meseća u odnosu na Zemlju.

Primenjujući model čvrste Zemlje, ovo torzino kretanje je proporcionalno sa  $\sin 2\delta_{\odot}$ , što znači da nestaje u tačkama ekvinocija, pošto je, tada,  $\sin 2\delta_{\odot} = 0$ . Vektor torzionog kretanja, obeležimo ga sa  $\mathbf{R}$ , leži u ravni ekvatora, u pravcu  $\alpha_{\odot} - \frac{\pi}{2}$ . Napisan u funkciji pravouglanih ekvatorskih koordinata, vektor  $\mathbf{R}$  je:

$$\mathbf{R} = K_0 \sin 2\delta_{\odot} \left[ \cos \left( \alpha_{\odot} - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \alpha_{\odot} - \frac{\pi}{2} \right), 0 \right], \quad (5.90)$$

gde je  $K_0$  proizvoljna konstanta. Primenjujući osnovne trigonometrijske identitete, jednačina (5.90) se može napisati i u obliku:

$$\mathbf{R} = 2K_0 \sin \delta_{\odot} [\sin \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot}, -\cos \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot}, 0]. \quad (5.91)$$

Jednačina (5.91) se može pojednostaviti prevođenjem ekvatorskih u ekliptičke koordinate. Pri tome ćemo koristiti sliku 5.12, na kojoj je talasastom linijom prikazano nutaciono kretanje Zemljinog pola. Osim ravni ekvatora i ekliptike, na slici je prikazana i putanja Meseća, koji u značajnoj meri utiče na prirodu kretanja Zemljinog pola. Nagib ekliptike je i ovde označen sa  $\epsilon$ . Uzlazni čvorovi Mesečeve putanje u odnosu na ekvator i ekliptiku su obeleženi sa  $M$  i  $N$ , respektivno, dok su odgovarajući nagibi putanje označeni, redom, sa  $I$  i  $i$ . Rektascenzija uzlaznog čvora Mesečeve putanje na ekliptici iznosi  $\Omega$ .

Nutaciono kretanje se može podeliti na veći broj članova različitog perioda. Neki su čisto solarni, drugi, pak, zavise od vrlo složeno Mesečevog kretanja. Ovde ćemo izvesti samo solarne članove.

Koristeći se jednačinama sferne trigonometrije za transformaciju ekvatorskih u ekliptičke koordinate, dolazimo do sledećih izraza:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} &= \cos L \\ \sin \delta_{\odot} &= \sin L \sin \epsilon \\ \sin \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot} &= \sin L \cos \epsilon. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Uvodeći (5.92) u (5.91), sledi:

$$\mathbf{R} = K_0 \sin \epsilon [\cos \epsilon (1 - \cos 2L), -\sin 2L, 0] \quad (5.93)$$

Kretanje pola se može dobiti integraljenjem jednačine (5.93). Postavimo početak koordinatnog sistema u srednji pol i neka je:

$$\mathbf{s} = (x, y, z) \quad (5.94)$$

vektor položaja nebeskog tela u odnosu na srednji pol. Tada su komponente vektora kretanja pola usled solarne nutacije:

$$\frac{x}{\sin \epsilon} = \psi_1 \left[ t - \frac{1}{2} \left( \frac{dL}{dt} \right)^{-1} \sin 2L \right] \quad (5.95)$$

$$y = \frac{1}{2} \psi_1 \left( \frac{dL}{dt} \right)^{-1} \tan \epsilon \cos 2L \quad (5.96)$$

$$z = 1. \quad (5.97)$$

Faktor  $\psi_1$  u jednačinama (5.95) i (5.96) je konstanta, koja odražava uticaj Sunca u lunisolarnoj precesiji, na koji otpada, otprilike, 1/3 ukupnog iznosa. Osim ovog uticaja, postoje još dva člana, nutacija u longitudi i nutaciju u nagibu ekliptike, čiji periodi iznose šest meseci.

Mesečevo kretanje je veoma složeno i izvođenje nutacionih članova koji zavise od Meseca prevazilazi sadržaj ove knjige. Napomenućemo samo da precesioni član sa najdužim periodom ima period od 18,6 godina i to je zbog retrogradnog pomeranja linije čvorova Mesečeve putanje.

Po važećoj nutacionoj teoriji Međunarodne astronomske unije (IAU - *International Astronomical Union*) iz 2000. godine, uzima se u obzir 108 nutacionih članova u longitudi i nagibu.

Uopšteno posmatrano, pomeranje pravog nebeskog pola u odnosu na srednji usled nutacije deli se na dve komponente:

- $\Delta\psi$  - nutaciju u longitudi i
- $\Delta\epsilon$  - nutaciju u nagibu ekliptike.

Ovi elementi se računaju na osnovu sledećeg izraza:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum a_{ijklm} \sin(iM' + jM + kF + lD + m\Omega) \\ \Delta\epsilon &= \sum b_{ijklm} \cos(iM' + jM + kF + lD + m\Omega), \end{aligned} \quad (5.98)$$

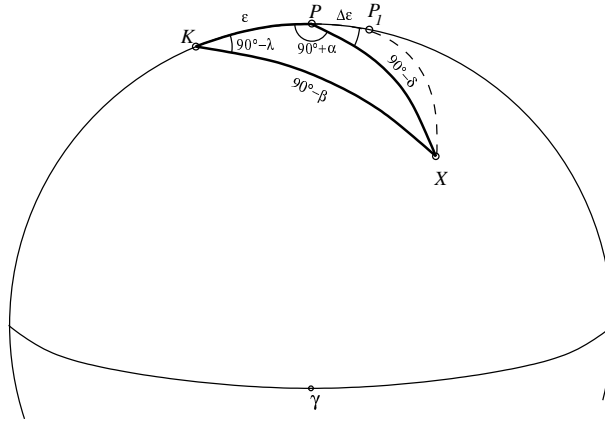
gde su:

- $M'$  - srednja Mesečeva anomalija,
- $M$  - srednja anomalija sunca,
- $F$  - srednji argument Mesečeve putanje,
- $D$  - srednja elongacija Meseca računata u odnosu na Sunce i
- $\Omega$  - rektascenzija uzlaznog čvora Mesečeve putanje,

parametri Mesečeve putanje. Celobrojne konstante  $i, j, k, l$  i  $m$  su definisane IAU konstantama prema nutacionoj teoriji 2000. Njihovim uvođenjem u (5.98) izrazi za nutacione elemente glase:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -17'', 1996 \sin \Omega - 1'', 3187 \sin(2F - 2D + 2\Omega) - 0'', 2274 \sin(2F - 2\Omega) \\ \Delta\epsilon &= 9'', 2025 \cos \Omega + 0'', 5736 \cos(2F - 2D + 2\Omega) + 0'', 0927 \cos(2F - 2\Omega) \end{aligned} \quad (5.99)$$

Putanja kretanja pravog oko srednjeg pola usled nutacije je elipsa, sa konkavnim delom uvek okrenutim ka polu ekliptike.



Slika 5.13: Uticaj nutacije na ekvatorske koordinate

### 5.5.1 Uticaj nutacije na ekvatorske koordinate

Izvođenje jednačina za uticaj nutacije na ekvatorske koordinate započecemo od jednačina za lunisolarnu precesiju. Ako je  $\Delta\psi = \psi\tau$ , onde je, na osnovu (5.62) i (5.63):

$$\begin{aligned} d\alpha &= \Delta\psi (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \tan \delta) \\ d\delta &= \Delta\psi \sin \epsilon \cos \alpha \end{aligned} \quad (5.100)$$

Posmatrajmo sliku 5.13. Uočimo srednji pol u tački  $P$ , pravi pol, pomeren za iznos nutacije u nagibu  $\Delta\epsilon$  u tačku  $P'$  i nebesko telo  $X$ . Ekliptički pol je u tački  $K$ . Tačke  $K$ ,  $P$  i  $X$  čine sferni trougao koji ćemo razmatrati u nastavku. Pomeranje pola u tačku  $P'$  ne utiče na ekliptičke koordinate, ali će zato ekvatorske koordinate biti promenjene. Napišimo sinusnu jednačinu za stranu  $90^\circ - \delta$ :

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda \quad (5.101)$$

i nađimo njen totalni diferencijal:

$$\cos \delta d\delta = (-\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda) d\epsilon. \quad (5.102)$$

Diferenciranje se vrši samo po  $\delta$  i  $\epsilon$ , pošto su, kako smo gore ustanovili, ekvatorske koordinate nepromenljive usled pomeranja pola. Napišimo i sinusno-kosinusnu jednačinu:

$$\sin(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ + \alpha) = \sin \epsilon \cos(90^\circ - \beta) - \cos \epsilon \sin(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ - \lambda). \quad (5.103)$$

Njenim sređivanjem i uvođenjem u (5.102) sledi:

$$d\delta = \Delta\epsilon \sin \alpha. \quad (5.104)$$

Napišimo, dalje, sinusnu jednačinu:

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta \quad (5.105)$$

i nađimo njen totalni diferencijal:

$$\sin \alpha \cos \delta d\alpha + \cos \alpha \sin \delta d\delta = 0. \quad (5.106)$$

Rešavanjem sistema jednačina (5.104) i (5.106) dobijaju se definitivni izrazi za priraštaje u rektascenziji i deklinaciji:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\Delta\epsilon \cos\alpha \tan\delta \\ d\delta &= \Delta\epsilon \sin\alpha \end{aligned} \quad (5.107)$$

Za računanje su pogodnije vektorske jednačine. Neka je  $\vec{s}' = (x', y', z')$  vektor pravog, a  $\vec{s} = (x, y, z)$  vektor srednjeg položaja nebeskog pola. Tada je:

$$\vec{s}' - \vec{s} = \vec{ds} = (dx, dy, dz) \quad (5.108)$$

pomeranje srednjeg nebeskog pola usled nutacije. Napišimo diferencijalne promene ekvatorskih koordinata u vektorskom obliku:

$$\vec{s}' - \vec{s} = d\alpha \begin{bmatrix} -\sin\alpha \cos\delta \\ \cos\alpha \cos\delta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos\alpha \sin\delta \\ -\sin\alpha \sin\delta \\ \cos\delta \end{bmatrix}, \quad (5.109)$$

odakle slede pravouglove komponente:

$$dx = -(y \cos\epsilon + z \sin\epsilon) \Delta\psi \quad (5.110)$$

$$dy = x \cos\epsilon \Delta\psi - y \Delta\epsilon \quad (5.111)$$

$$dz = y \sin\epsilon \Delta\psi + y \Delta\epsilon. \quad (5.112)$$

Uticaoj nutacije se, tada, može napisati vektorski, kao:

$$\vec{s}' = \mathbf{N}\vec{s}, \quad (5.113)$$

gde je  $\mathbf{N}$  matrica nutacije, koja se računa na sledeći način:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos\epsilon & -\Delta\psi \sin\epsilon \\ \Delta\psi \cos\epsilon & 1 & -\Delta\epsilon \\ \Delta\psi \sin\epsilon & \Delta\epsilon & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.114)$$

Ovako izražen uticaoj nutacije može se vrlo jednostavno kombinovati sa primenom precesije. Zajedno izražena ova dva uticaja glase:

$$\mathbf{s} = \mathbf{NP}\mathbf{s}_0 \quad (5.115)$$

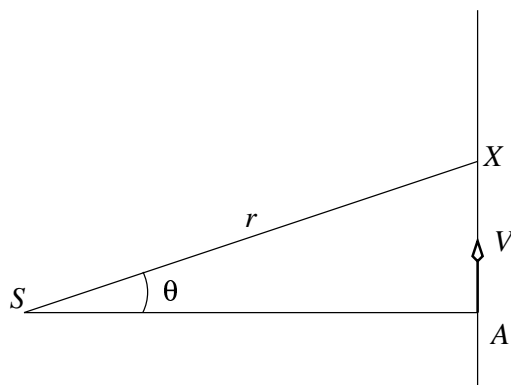
gde je  $\mathbf{P}$  matrica precesije izračunata iz jednačine (5.89).

## 5.6 Zvezdano kretanje

### 5.6.1 Komponente zvezdanog kretanja

Pored svih uticaja na ekvatorske koordinate do kojih dolazi usled promene koordinatnog početka, ostaje još jedan efekt, čiji je uzrok relativna promena položaja nebeskih tela u odnosu na koordinatni početak. Posmatranjem prostorne komponente četvorodimenzinog prostorno-vremenskog kontinuuma, promenu položaja nebeskog tela možemo uvek razložiti na dve komponente:

- $V_r \vec{s}$ , radijalnu i
- $\vec{V}_T$ , transverzalnu komponentu.



Slika 5.14: Zvezdano kretanje u pravcu Sunca

U Geodetskoj astronomiji, gde se bavimo merenjem relativnih uglovnih položaja nebeskih tela projektovanih na nebesku sferu jediničnog poluprečnika, možemo uočiti samo transverzalnu komponentu. Bari-centrična radijalna brzina nebeskog tela se može izmeriti iz Dopplerovog pomaka, merenjem spektralne slike zvezde. Zvezde koje se udaljavaju imaju spektralnu sliku pomerenu ka crvenom delu spektra (otuda i naziv **crveni pomak**), dok će izvori koji se približavaju baricentru Sunčevog sistema pokazivati plavi pomak, odnosno, pomeranje spektralne slike ka plavom delu spektra.

Ukupno zvezdano kretanje se, vektorski, može prikazati jednačinom:

$$\vec{V} = V_r \vec{s} + \vec{V}_T, \quad (5.116)$$

gde je  $\vec{s}$  jedinični vektor pravca prema nebeskom telu čije zvezdano kretanje posmatramo. Odavde se mogu komponente izraziti prema jednačinama:

$$V_r = \vec{V} \cdot \vec{s} \quad (5.117)$$

$$\vec{V}_T = \vec{s} \times (\vec{V} \times \vec{s}). \quad (5.118)$$

Komponente zvezdanog kretanja možemo izračunati posmatrajući sliku 5.14. Neka je sa  $S$  označeno Sunce, u tački  $X$  se nalazi zvezda, a tačka  $A$  se nalazi u presečnoj tački putanje zvezde i normale na njenu putanju povučenu iz Sunca. Neka se zvezda duž putanje  $AX$  kreće brzinom  $V$ , pri tome opisujući ugao  $\vartheta$  u trouglu  $SAX$ . Zvezda se od Sunca nalazi na rastojanju  $r$ . Tada će se, primenom trigonometrijskih izraza na pravougli trougao  $SAX$  dobiti:

$$V_r = V \sin \vartheta = \frac{1}{n} \frac{dt}{dt} \quad (5.119)$$

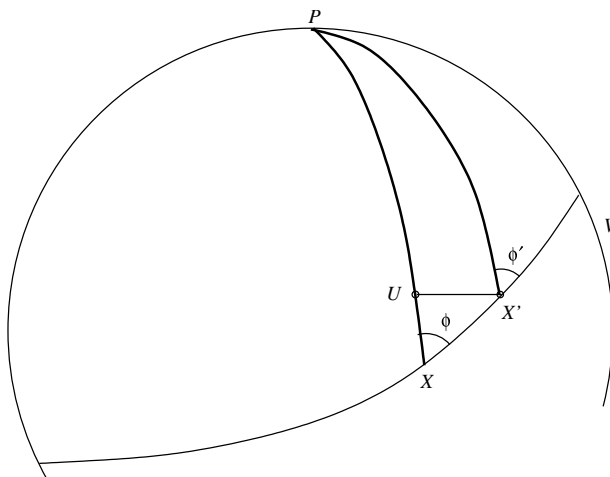
$$V_T = V \cos \vartheta = \frac{1}{n} r \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (5.120)$$

gde je  $n$  broj sekundi u jednoj godini, čime su komponente zvezdanog kretanja dobijene u  $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ , pod uslovom da je  $r$  izraženo u km, a  $\vartheta$  u radijanima.

### 5.6.2 Sopstveno kretanje

Prvi pojam koji ćemo definisati u vezi sa sopstvenim kretanjem je **godišnje sopstveno kretanje**. Pod ovim pojmom se podrazumeva ukupno pomeranje nebeskog tela u odnosu na nepokretni ekvator i tačku prolećne ravnodnevnice. Izraženo u lučnim sekundama po godini, iznosi:

$$\mu = \frac{1}{\sin 1''} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (5.121)$$



Slika 5.15: Komponente sopstvenog kretanja

Ako se rastojanje zvezde izrazi preko njene godišnje paralakse  $\pi$ :

$$r = \frac{1}{a\pi \sin 1''} \quad (5.122)$$

Astronomska jedinica  $a$  iznosi  $1,496 \cdot 10^8$  i predstavlja srednje rastojanje Zemlja-Sunce. Uvođenjem (5.122) i (5.121) u (5.120) dobija se definitivan izraz za transverzalnu komponentu zvezdanog kretanja:

$$V_T = \frac{a}{n} \frac{\mu}{\pi}. \quad (5.123)$$

Uvođenjem numeričkih vrednosti, sledi:

$$V_T = 4,74 \frac{\mu}{\pi} \left[ \frac{\text{km}}{\text{s}} \right]. \quad (5.124)$$

Sopstveno kretanje se, dalje, može razdvojiti na dve komponente (slika 5.15):

- $\mu_\alpha$  - komponentu po rektascenziji i
- $\mu_\delta$  - komponentu po deklinaciji.

Neka se zvezda brzinom  $V$  kreće od tačke  $X$  ( $\alpha, \delta$ ) prema tački  $X'$  ( $\alpha + d\alpha, \delta + d\delta$ ). Uočimo položaj srednjeg pola u tački  $P$  i sferni trougao  $PXX'$ . Obeležimo ugao kod temena  $X$  sa  $\phi$  i nazovimo ga **položajnim uglom sopstvenog kretanja**. Ako pretpostavimo da je zvezdi potrebno  $dt$  godina da iz tačke  $X$  stigne u tačku  $X'$ , tada je  $XX' = \phi dt$ . Povucimo visinu iz tačke  $X'$  na stranu  $PX$  i presečnu tačku obeležimo sa  $U$ . Strana  $UX'$  je mali krug na nebeskoj sferi, ali zbog svojih diferencijalnih karakteristika, bez gubitka u tačnosti, trougao  $UXX'$  smatraćemo pravouglim trouglom u ravni.

Tada je:

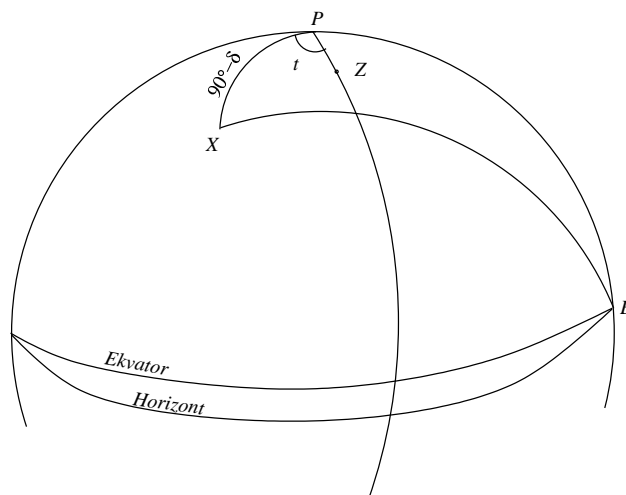
$$UX' = d\alpha \cos(\delta + d\delta), \quad (5.125)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} d\alpha \cos \delta &= \mu dt \sin \phi \\ d\delta &= \mu dt \cos \phi \end{aligned} \quad (5.126)$$

Komponente sopstvenog kretanja su prvi izvodi ekvatorskih koordinata po vremenu, pa je:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{15} \mu \frac{\sin \phi}{\cos \delta} \\ \mu_\delta &= \frac{d\delta}{dt} = \mu \cos \phi \end{aligned} \quad (5.127)$$



Slika 5.16: Radijalna brzina zvezde

### 5.6.3 Baricentrična radijalna brzina

Kao što je ranije napomenuto, u praktičnom delu Geodetske astronomije nećemo se baviti merenjem radijalne brzine nebeskih tela, ali će biti proučena sa teorijskog aspekta.

Radijalna brzina predstavlja veličinu koja označava brzinu kretanja izvora u pravcu neke referentne tačke. Zbog toga, razlikovaćemo:

- $V_r''$ , topocentričnu,
- $V_r'$ , geocentričnu i
- $V_r$ , baricentričnu

radijalnu brzinu, u zavisnosti od toga koju referentnu tačku posmatramo. Doplerov efekt  $z$  se može izraziti jednačinom:

$$1 + z = \frac{\nu}{\nu_0}, \quad (5.128)$$

gde je  $\nu_0$  frekvencija laboratorijskog, a  $\nu$  frekvencija merenog izvora. Pošto direktno možemo meriti samo topocentričnu radijalnu brzinu, izrazimo Doplerov pomak kao:

$$z = \frac{V_r''}{c}, \quad (5.129)$$

gde je  $c$  brzina svetlosti. Međutim, merenje treba svesti na baricentar Sunčevog sistema. Ako se nebesko telo kreće u pravcu jediničnog vektora  $\vec{s}$ , onda se, redom, geocentrična i baricentrična radijalna brzina tog nebeskog tela mogu izraziti jednačinama:

$$\begin{aligned} V_r' &= V_r'' + \vec{v}'' \cdot \vec{s} \\ V_r &= V_r' + \vec{v} \cdot \vec{s}, \end{aligned} \quad (5.130)$$

gde je  $\vec{v}''$  brzina posmatrača u odnosu na geocentar, a  $\vec{v}$  brzina geocentra u odnosu na baricentar Sunčevog sistema.

Izrazi za računanje brzine  $\vec{v}''$  su izvedeni u poglavlju 5.3.2. Posmatrajmo sliku 5.16. Apeks dnevne aberacije je istočna tačka horizonta, ovde prikazan u tački  $E$ . Nebesko telo  $X$  ima mesne ekvatorske koordinate  $(t, \delta)$ . Severni nebeski pol je predstavljen tačkom  $P$ , a lokalni zenit je u tački  $Z$ . Ugao  $XPZ = t$ , dok je ugao  $XPE = 90^\circ + t$ . Konačno, komplement deklinacije nebeskog tela  $X$  je  $90^\circ - \delta = PX$ .



Ako u formulu za radijalnu topocentričnu brzinu (5.53) zamenimo veličinu ugaone brzine i geocentrični poluprečnik Zemlje, sledi da je:

$$v' \left[ \frac{\text{km}}{\text{s}} \right] = 0,465 \cos \phi', \quad (5.131)$$

gde je  $\phi'$  geocentrična širina posmatrača. Iz trougla  $XPE$ , posle primene kosinusne teoreme, sledi:

$$\vec{v}' \cdot \vec{s} = v' \cos XE = -v' \cos \delta \sin t, \quad (5.132)$$

pa geocentričnu radijalnu brzinu možemo izziti u funkciji topocentrične radijalne brzine kao:

$$V_r' \left[ \frac{\text{km}}{\text{s}} \right] = V_r'' - 0,465 \cos \phi' \cos \delta \sin t. \quad (5.133)$$

Konačno, baricentrična radijalna brzina se računa iz jednačine:

$$V = V_r' + 1731,5 \left[ \begin{array}{ccc} \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right], \quad (5.134)$$

gde su, redom,  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  i  $\dot{Z}$  komponente brzine kretanja Zemlje, dok su:  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  pravouglo ekvatorske koordinate Zemlje. Ovi podaci se preuzimaju iz JPL (Jet Propulsion Laboratory) efemerida DE405/LE405.



## Poglavlje 6

# Srednji i prividni položaj nebeskog tela

### 6.1 Uvod

U prethodnim poglavljima se raspravljalo o uticajima koji menjaju koordinate nebeskih tela. Ovde ćemo sumirati sve pomenute efekte, a na kraju izvesti praktične formule za svođenje koordinata nebeskih tela.

Pre svega, treba napraviti razliku između pojmova datim u naslovu ove glave:

**(standardni, kataloški) srednji položaj** ekvatorske koordinate za referentnu epohu (J2000), srednji ekvinocij i baricentričnu nebesku sferu

**prividni položaj** ekvatorske koordinate za epohu merenja, pravi ekvinocij, pravi ekvator i geocentričnu nebesku sferu.

U literaturi se pominje još i pojam **pravog položaja**, koji se odnosi na pravi ekvinocij i pravi ekvator na baricentričnoj nebeskoj sferi. Ovo je samo prelazna veličina pri svođenju srednjeg na prividni položaj.

Računanje prividnog mesta zvezde se može uraditi na dva načina:

- primenom Beselovih brojeva i
- primenom matrica rotacije.

Kako je druga metoda savremenija i pogodna za upotrebu računara, ovde će ona i biti opisana.

Na slici 6.2 grafički je prikazan postupak svođenja srednjeg položaja nebeskog tela na prividni. Kao što se sa slike vidi, koriste se podaci iz kataloga Hipparcos i podaci JPL efemerida DE405/LE405. Iz Hipparcosa se dobijaju, s jedne strane, srednje koordinate zvezde  $(\alpha_0, \delta_0)$ , koje se koriste za računanje geocentričnog vektora položaja zvezde, i, s druge strane, komponente sopstvenog kretanja  $\mu$ , paralaksa  $\pi$  i radijalna brzina  $v$ , odakle se izračunava vektor sopstvenog kretanja  $m$ . Kada se ovim podacima pridodaju: vektor baricentričnog položaja Zemlje  $\vec{E}_B$ , vektor brzine Zemlje  $\vec{E}_B$  i Zemljine heliocentrične koordinate  $\vec{E}$ , primenom vektora sopstvenog kretanja i baricentričnih koordinata sračunava se geocentrični vektor položaja  $\vec{P}$ . Uzimanjem u obzir popravke za gravitaciono odstupanje svetlosti dolazimo do poboljšanog geocentričnog vektora položaja  $\vec{p}_1$ . Sledeći korak je uvođenje popravke za godišnju aberaciju  $\vec{V}$ , što dovodi do sledećeg poboljšanog geocentričnog vektora položaja  $\vec{p}_2$ . Konačno, uračunavanjem precesije  $\mathbf{P}$  i nutacije  $\mathbf{N}$ , dolazimo, konačno, do prividnog mesta zvezde  $\vec{p}_3$ , odakle se, standardnom transformacijom pravouglanih Dekartovih u krivolinijske koordinate dobijaju prividne koordinate zvezde  $(\alpha, \delta)$ .

### 6.2 Potrebni podaci

Za svođenje srednjeg položaja zvezde na prividni položaj za datu epohu potrebno je posedovati sledeće izvore:

- srednje koordinate nebeskog tela i
- baricentrične i heliocentrične koordinate Zemlje, kao i vektor brzine Zemlje.

Srednje koordinate se preuzimaju iz nekog od fundamentalnih kataloga. Prema preporukama IAU, referentni katalog za astrometriju u vidljivom delu spektra je Hipparcos.

Baricentrične koordinate računaju se iz JPL efemerida. Takođe prema preporuci IAU, za opažanja u vremenskom intervalu 2000-2020 godina treba da se koriste solarne DE405 i lunarne LE405 efemeride.

Iz fundamentalnog kataloga, za datu zvezdu, potrebno je izvući sledeće podatke:

- Nebeske ekvatorske koordinate  $(\alpha_0, \delta_0)$ ;
- Komponente sopstvenog kretanja po rektascenziji i deklinaciji  $(\mu_\alpha, \mu_d)$ ;
- Paralaksu  $\pi$  i
- Radijalnu brzinu  $v$ .

Iz JPL efemerida koriste se sledeći podaci:

- vektor baricentričnog položaja Zemlje  $\vec{E}_B = (E_{B_x}, E_{B_y}, E_{B_z})$ ,
- vektor brzine Zemlje  $\dot{\vec{E}}_B = (\dot{E}_{B_x}, \dot{E}_{B_y}, \dot{E}_{B_z})$ ,
- vektor heliocentričnog položaja Zemlje  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  i
- elementi matrice nutacije  $(\Delta\psi, \Delta\varepsilon)$ .

Svi elementi JPL efemerida se mogu izračunati korišćenjem FORTRAN, C ili Java programa, koji su javno dostupni na portalu Jet Propulsion Laboratory.

## 6.3 Računanje prividnih mesta zvezda

### 6.3.1 Računanje geocentričnog vektora položaja

U katalogu Hipparcos dati su srednji položaji zvezda u nebeskom ekvatorskom koordinatnom sistemu, koordinatama  $\alpha_0$  i  $\delta_0$ . Najpre je potrebno iz nebeskih ekvatorskih koordinata sračunati baricentrični vektor položaja  $\vec{q}(q_x, q_y, q_z)$  prema jednačini:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

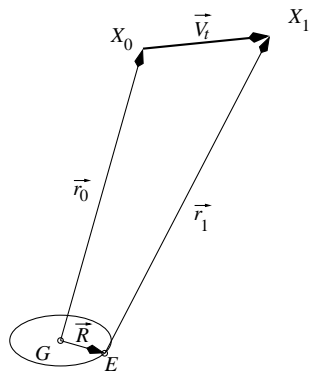
Posmatrajmo sliku 6.1. Uočimo na slici tačku  $G$ , koja predstavlja baricentar Sunčevog sistema. Tačka  $E$  je Zemlja na svojoj eliptičnoj putanji oko Sunca i njen radijus-vektor iznosi  $\vec{R}$ . Baricentrični radijus-vektor nebeskog tela  $X$  u položaju  $X_0$  je  $\vec{r}_0 = r\vec{q}$ . Geocentrični radijus-vektor istog nebeskog tela u tački  $X_1$  iznosi  $\vec{r}_1 = r\vec{P}$ . Pri tome, nebesko telo iz položaja  $X_0$  do položaja  $X_1$  putuje brzinom  $\vec{V}_t$  u odnosu na baricentar Sunčevog sistema.

Sa slike 6.1 se lako može izračunati:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{V}_t - \vec{R}. \quad (6.2)$$

Vektor sopstvenog kretanja zvezde računa se preko izraza:

$$\vec{m} = \vec{\mu} + \frac{\pi}{4,74} V_T \vec{q}, \quad (6.3)$$



Slika 6.1: Godišnja aberacija

gde je  $\pi = \frac{1}{r_0}$  iznos godišnje paralakse koji se dobija u sekundama kada se  $r_0$  izrazi u AJ. Uvođenjem (6.3) u (6.2), dobijamo:

$$\vec{r}_1 \pi \vec{p} = \vec{q} + \vec{m}T - \pi \vec{R}. \quad (6.4)$$

Napisano matrično, sopstveno kretanje se računa kao [Dač98]:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_\alpha \sin \alpha_0 \cos \delta_0 - \mu_\delta \cos \alpha_0 \sin \delta_0 + v\pi \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \mu_\alpha \cos \alpha_0 \cos \delta_0 - \mu_\delta \sin \alpha_0 \sin \delta_0 + v\pi \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \mu_\delta \cos \delta_0 + v\pi \sin \delta_0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

gde je:

$v$  Radijalna brzina zvezde, izražena u AJ/100 god. Pošto je  $v$  dato u km/s, potrebno je ovu veličinu transformisati u AJ/100 god, imajući u vidu da je  $1\text{km/s} = 21,09495 \text{ AJ/100 g}$ ;

$\pi$  Paralaksa;

$v\pi$  radijalna brzina zvezde svedena na jedinično rastojanje;

$\mu_0$  Sopstveno kretanje po rektascenziji i

$\mu'_0$  Sopstveno kretanje po deklinaciji.

Svi ovi podaci su dati u katalogu Hipparcos, odakle se mogu preuzeti. Konačno, geocentrični vektor položaja zvezde za trenutak  $T$  računa se primenom sledeće matrične jednačine:

$$\mathbf{P} = \mathbf{q} + T\mathbf{m} - \pi\mathbf{E}_B, \quad (6.6)$$

gde je:

$$T = \frac{[JD - 2451545, 0]}{36525} \quad (6.7)$$

vremenski interval između trenutka za koji se računa položaj i referentne epohe J2000,0, izražen u julijskim vekovima. Jedinični vektor položaja  $\vec{p}$  se dobija deljenjem geocentričnog vektora položaja (6.6) sa njegovim intenzitetom. Jednačina glasi:

$$\vec{p} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}_0|}, \quad (6.8)$$

gde se intenzitet računa primenom formule:

$$|\vec{P}_0| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \quad (6.9)$$

a  $P_x$ ,  $P_y$  i  $P_z$  komponente geocentričnog vektora položaja. Jedinični vektor heliocentričnog položaja Zemlje se dobija iz jednačine:

$$\vec{e} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}, \quad (6.10)$$

a njegov intenzitet se računa kao:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}. \quad (6.11)$$

### 6.3.2 Računanje popravki za gravitaciono odstupanje svetlosti i godišnju aberaciju

Uvođenjem popravke za gravitaciono odstupanje svetlosti dobija se popravljani izraz za jedinični vektor geocentričnog položaja zvezde:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p} + \frac{2\mu [\vec{e} - (\vec{p} \cdot \vec{e}) \vec{p}]}{c^2 |\vec{E}| (1 + \vec{p} \cdot \vec{e})}, \quad (6.12)$$

gde je:

$$\frac{\mu}{c^2} = 9,87 \cdot 10^{-9} [\text{AJ}]. \quad (6.13)$$

Proizvod  $(\vec{p} \cdot \vec{e})$  računa se kao skalarani proizvod vektora  $p$  i  $e$ :

$$(\vec{p} \cdot \vec{e}) = p_x e_x + p_y e_y + p_z e_z. \quad (6.14)$$

Uvođenjem aberacije sledi:

$$\vec{p}_2 = \frac{\beta^{-1} \vec{p}_1 + \vec{V} + \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{V}) \vec{V}}{1 + \beta^{-1}}}{1 + \vec{p}_1 \cdot \vec{V}}, \quad (6.15)$$

gde se  $\beta^{-1}$  računa primenom jednačine:

$$\beta^{-1} = \sqrt{1 - \mathbf{V}^T \mathbf{V}}, \quad (6.16)$$

a proizvod  $(\vec{p}_1 \cdot \vec{V})$  kao skalarani proizvod:

$$(\vec{p}_1 \cdot \vec{V}) = p_{1x} V_x + p_{1y} V_y + p_{1z} V_z. \quad (6.17)$$

Vektor  $\vec{V}$  predstavlja vektor brzine Zemlje i dobija se iz jednačine:

$$\mathbf{V} = \frac{\dot{\mathbf{E}}_B}{c} = 0,0057755 \dot{\mathbf{E}}_B. \quad (6.18)$$

### 6.3.3 Precesija i nutacija

Precesiona matrica je oblika:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \zeta_0 & -\sin \zeta_0 & 0 \\ \sin \zeta_0 & \cos \zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos z \cos \theta \cos \zeta_0 - \sin z \sin \zeta_0 & -\cos z \cos \theta \sin \zeta_0 - \sin z \cos \zeta_0 & -\cos z \sin \theta \\ \sin z \cos \theta \cos \zeta_0 + \cos z \sin \zeta_0 & -\sin z \cos \theta \sin \zeta_0 + \cos z \cos \zeta_0 & -\sin z \sin \theta \\ \sin \theta \cos \zeta_0 & -\sin \theta \sin \zeta_0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

gde se uglovi rotacije  $\zeta_0$ ,  $z$  i  $\theta$  računaju prema formulama:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= 2306, '' 2181t + 0, '' 30188t^2 + 0, '' 017998t^3 \\ z &= 2306, '' 2181t + 1, '' 09468t^2 + 0, '' 018203t^3 \\ \theta &= 2004, '' 3109t - 0, '' 42665t^2 - 0, '' 041833t^3.\end{aligned}\quad (6.20)$$

Trenutak  $t$  se računa prema (6.7). Nutaciona matrica se dobija kao proizvod tri matrice rotacije:

$$\mathbf{N} = p(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) r(-\Delta\psi) p(\varepsilon), \quad (6.21)$$

što u razvijenom obliku glasi:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) & -\sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) & \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi & 0 \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Množenjem ove tri matrice rotacije dobija se definitivni oblik matrice nutacije:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

gde pojedini elementi uzimaju sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned}n_{11} &= \cos \Delta\psi \\ n_{12} &= -\sin \Delta\psi \cos \varepsilon \\ n_{13} &= -\sin \Delta\psi \sin \varepsilon \\ n_{21} &= \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \sin \Delta\psi \\ n_{22} &= \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \Delta\psi \cos \varepsilon + \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \sin \varepsilon \\ n_{23} &= \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \Delta\psi \sin \varepsilon - \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \varepsilon \\ n_{31} &= \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \sin \Delta\psi \\ n_{32} &= \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \Delta\psi \cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \sin \varepsilon \\ n_{33} &= \sin(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \Delta\psi \sin \varepsilon + \cos(\varepsilon + \Delta\varepsilon) \cos \varepsilon.\end{aligned}\quad (6.24)$$

Pošto su vrednosti  $\Delta\varepsilon$  vrlo male, zanemarivanjem članova drugog reda, moguće je uvesti određene aproksimacije, posle čega se dobija pojednostavljen oblik matrice nutacije:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Uglovi  $\Delta\psi$  i  $\Delta\varepsilon$  se izražavaju u radijanima i moguće ih je dobiti iz JPL efemerida DE405. Srednji nagib ekliptike  $\varepsilon$  se dobija iz reda:

$$\varepsilon = 84\,381, '' 448 - 46, '' 8150t - 0, '' 000\,59t^2 + 0, '' 001\,813t^3. \quad (6.26)$$

### 6.3.4 Računanje prividnog mesta zvezde

Uvođenjem uticaja precesije i nutacije dobija se prividni geocentrični položaj zvezde kao:

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{p}_2. \quad (6.27)$$

Konačno, prividne ekvatorske koordinate se izračunavaju preko izraza:

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan \frac{y_3}{x_3} \\ \delta &= \arctan \frac{z_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2}}.\end{aligned}\quad (6.28)$$

## 6.4 Zvezdani katalogi i astronomski godišnjaci

Zvezdani katalogi i astronomski godišnjaci su izvori odakle preuzimamo potrebne podatke u vezi s koordinatama nebeskih tela.

### 6.4.1 Zvezdani katalogi

Zvezdani katalogi sadrže podatke o nebeskim telima za određenu referentnu epohu. Nazivaju se još i fundamentalnim katalogima. Postoji generalna podela na:

- posmatračke kataloge i
- opšte fundamentalne kataloge.

Posmatrački katalogi su, po pravilu, proizvodi određenih opservatorija, koji sadrže opažački materijal sakupljan na opservatoriji tokom određenog vremenskog perioda, što znači da su vezani da određenu epohu merenja (epohu kataloga).

Opšti fundamentalni katalogi nastaju uklapanjem i kombinovanjem podataka iz manjeg ili većeg broja posmatračkih i opštih kataloga. Svi podaci su svedeni na određenu standardnu epohu merenja. Postoji veliki broj opštih fundamentalnih kataloga. Najvažniji su:

- Fundamentalni katalog 5 (FK5),
- Hipparcos i
- Tycho 2.

FK5 je, do skora, bio referentni katalog za astrometrijska određivanja. Nastao je kao naslednih fundamentalnih kataloga FK3 i FK4, uočavanjem i ispravljanjem, tzv. sistematskih grešaka kataloga. Sadrži, u osnovnom delu i aneksu, oko 6000 zvezda. Referentna epoha ovog kataloga je J2000.0. Od važnijih podataka, sadržani su: srednje koordinate za epohu J2000.0 i B1950.0 (Beselova epoha), sopstveno kretanje, radijalnu brzinu, paralaksu (za neke objekte), magnitudu, spektralni tip zvezde, kao i podatke o tačnosti određivanja srednjih položaja.

Prema odluci IAU, kao novi referentni katalog za astrometriju u vidljivom delu spektra treba koristiti Hipparcos. Ovaj katalog nastaje spajanjem podataka iz većeg broja kataloga (između ostalog i FK5), ali glavni dodatak predstavljaju opažanja Hubbleovim teleskopom. Sadrži sve podatke kao i FK5. Referentna epoha kataloga je J1991.25, ali se katalog u verziji 2 može preuzeti i sa podacima svedenim na J2000.0, u cilju ostvarivanja kontinuiteta sa FK5. Sadrži podatke o oko 180000 zvezda, pri čemu su podaci podaljeni (slično kao kod FK5) na glavni deo i aneks, gde su u aneksu dati, mahom, dvojni sistemi.

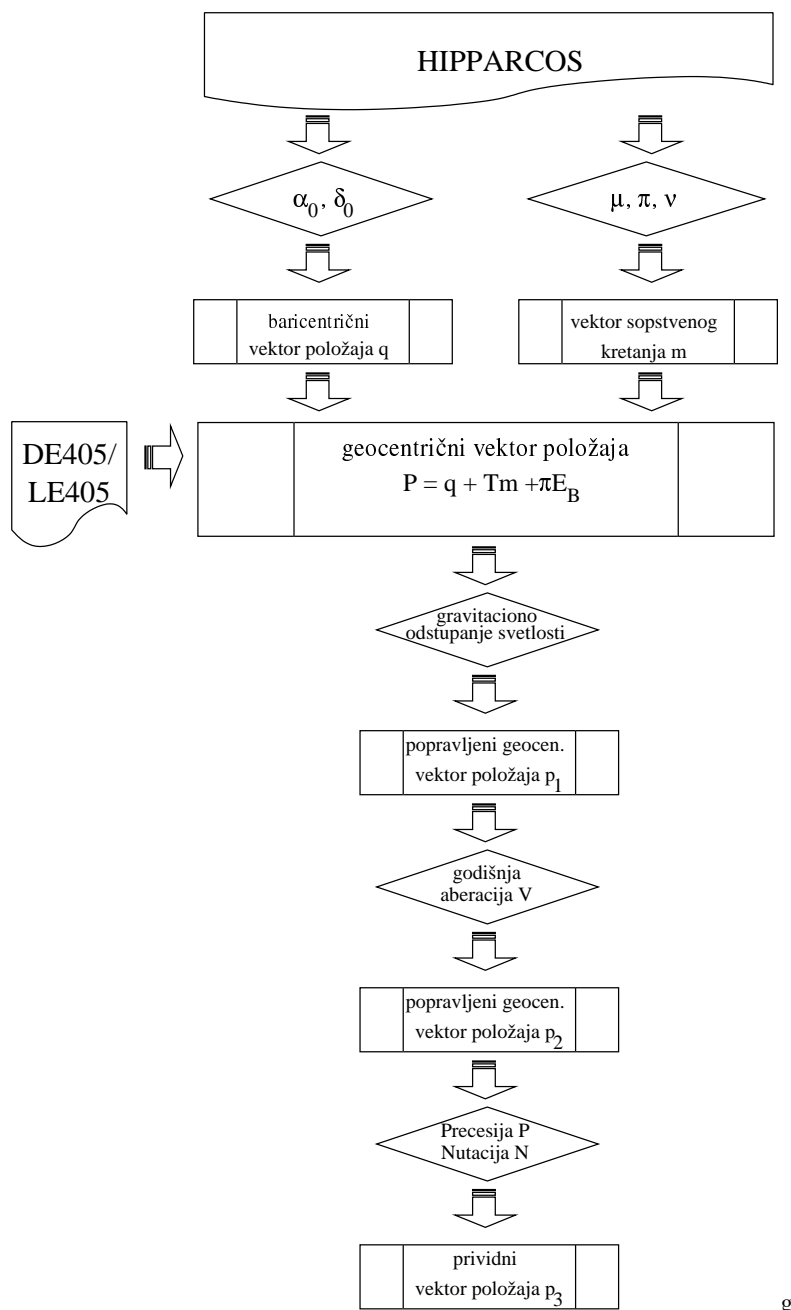
Tycho 2 je preporučeni katalog za radioastronomiju, s obzirom na veoma veliki broj katalogiziranih radio-izvora.

### 6.4.2 Astronomski godišnjaci

Astronomski godišnjaci sadrže podatke o: efemeridama Sunca, Meseca, planeta Sunčevog sistema, kao i određen broj manjih tela unutar Sunčevog sistema. Efemeride su date za UTC ili TT ponoć svakog dana u godini. Osim ovih podataka, dati su i podaci o počecima godišnjih doba, Mesečevim menama i sl. Veći broj opservatorija izdaje svoje astronomske godišnjake, a pomenućemo:

- Astronomical Almanac,
- Hvezdarska Roscenka,
- Astronomiceskii Jezeodnik i dr.





g

Slika 6.2: Shema svođenja srednjeg na prividni položaj nebeskog tela



## Poglavlje 7

# Zemljina rotacija

### 7.1 Uvod

Do relativne promene vektora Zemljine rotacije u odnosu na telo Zemlje ili inercijalni prostor dolazi usled sledećih uzroka:

- gravitacionog privlačenja Meseca, Sunca i planeta,
- neravnomernog rasporeda masa unutar Zemlje i
- ostalih uzroka različitog porekla.

Oscilacije u Zemljinoj rotaciji se mogu meriti i objasniti sledećim pojavama:

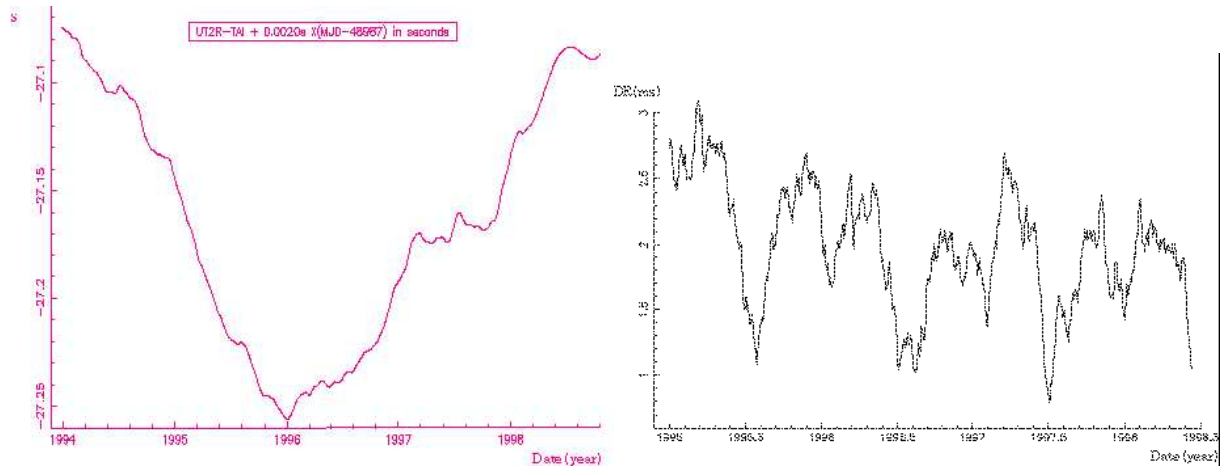
- elastičnošću Zemljine kore,
- spljoštešnoću Zemlje,
- strukturom i osobinama graničnog područja omotača i
- atmosferskim promenama vremena i klime.

Merenja Zemljine rotacije se vrše u formi vremenskih serija pod nazivom **Zemljini orijentacioni parametri** (*EOP - Earth Orientation Parameters*), koje čine sledeće komponente:

- Svetsko vreme UT,
- polarno kretanje i
- nebesko kretanje pola (precesija/nutacija).

Svetsko vreme i polarno kretanje određuju se dugobazisnom interferometrijom (*VLBI - Very Long Basis Interferometry*), dok se brze promene UT određuju tehnikama GPS, SLR i DORIS. Ova merenja se vrše u okviru IERS.

Zemljini orijentacioni parametri opisuju neravnomernosti Zemljine rotacije. Tehnički posmatrano, ove promene predstavljaju parametre rotacije ITRS u ICRS u funkciji vremena.

Slika 7.1: Varijacije  $UT1-TAI$  (levo) i  $LOD$  (desno) [IER]

## 7.2 Elementi Zemljine rotacije

### 7.2.1 Određivanje Svetskog vremena

Priroda Svetskog vremena i njegova veza sa ostalim sistemima vremena je obrađena u poglavlju 4.2.2. Ovde je dat princip njegovog određivanja, kao i detaljnija veza sa atomskim vremenskim skalama.

$UT1$  je vezano za Greenwichko srednje zvezdano vreme  $GMST$ , vezom (4.17). Koristeći oznaku iz ovog poglavlja, ova veza se može napisati i kao:

$$GMST = S_0 + (1 + \mu) UT1. \quad (7.1)$$

Svetsko vreme određuje pravac IERS referentnog meridijana unutar Međunarodnog nebeskog referentnog sistema ICRS, u odnosu na osu nebeskog efemeridskog pola CEP. Izražava se kao razlika  $UT1-UTC$  ili  $UT1-TAI$ .

Razlika između astronomski određene dužine dana i 86400 SI sekundi se naziva i **dužinom dana** ( $LOD$  - *Length of Date*). Veza između ugaone brzine Zemlje  $\omega$  sa dužinom dana je:

$$\omega = 72\,921\,151,467\,064 - 0,843\,994\,803 \cdot LOD, \quad (7.2)$$

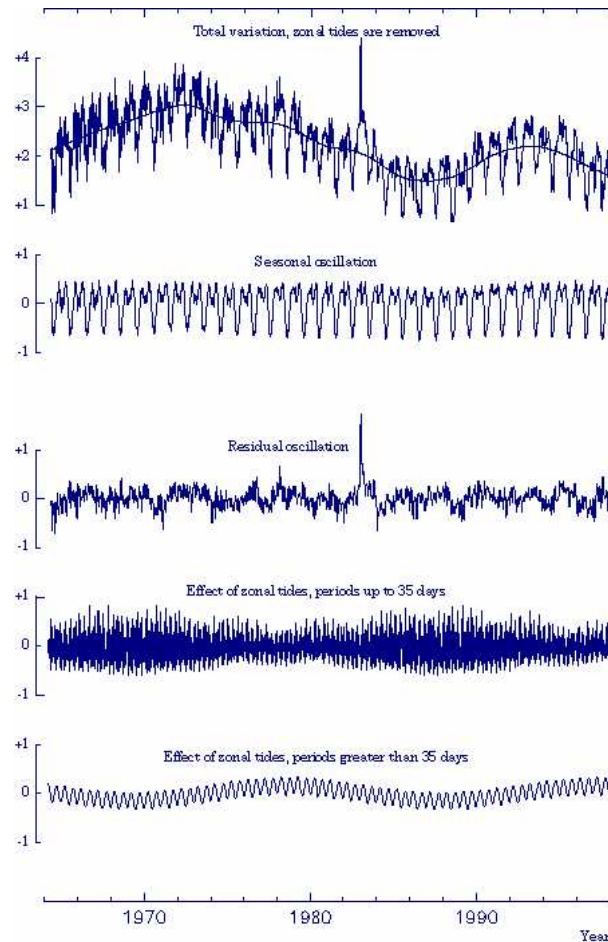
gde je  $\omega$  izraženo u picorad/s, a  $LOD$  u ms. Varijacije u vrednosti  $UT1 - TAI$  i  $LOD$  su prikazane na slici 7.1.

Do razlike između Svetskog i atomskog vremena i promene u dužini dana dolazi usled sledećih uzroka:

- varijacije u zonalnim plimama ( $< 2,5$  ms u apsolutnom iznosu),
- okeanskih plima ( $< 0,03$  ms u apsolutnom iznosu),
- cirkulacija u Zemljinoj atmosferi,
- unutrašnjih efekata i
- prenosa ugaonog momenta Mesečevog orbitalnog kretanja.

Promena dužine dana se može podeliti u nekoliko komponenti, saglasno uzrocima nastajanja (slika 7.2).

Prvi grafikon na slici 7.2 prikazuje ukupnu promenu  $LOD$ , bez oscilacija uzrokovanih plimom Zemljine kore i okeana, koje su prikazane posebno, razdvojeno na kratkoperiodične i dugoperiodične članove. Dinamički uticaj tečne kore okeana i klimatske promene u atmosferi pokazuju trend prikazan u prvom grafikonu. Ostatak atmosferskih uticaja se može razdvojiti na sezonske i rezidualne oscilacije, što uključuje 50-to dnevne oscilacije, kao i velike anomalije uzrokovane velikim klimatskim poremećajima (uragani i cunami).

Slika 7.2: Promena *LOD*

### 7.2.2 Komponente polarnog kretanja

Kretanje Zemljine ose rotacije relativno u odnosu na koru sastoji se iz tri glavne komponente [IER]:

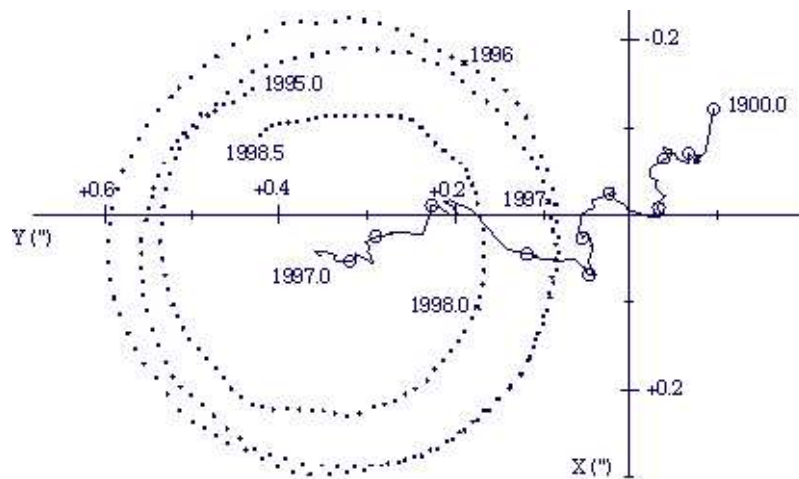
1. slobodne oscilacije sa periodom od oko 435 dana, tzv. Chandlerov period
2. godišnje oscilacije pod uticajem sezonskih premeštanja vazdušnih i vodenih masa i
3. nepravilno sekularno pomeranje.

Na slici 7.3 prikazano je kretanje Zemljine ose rotacije za period 1900-1997. godine. Tačkama su prikazani položaji pravog pola na petodnevnom intervalima. Odstupanje od Chandlerovog perioda se uočava iz karakterističnih oscilacija u tačkastoj liniji. Sekularno pomeranje pola od 1900. do 1996. godine je prikazano punom linijom.

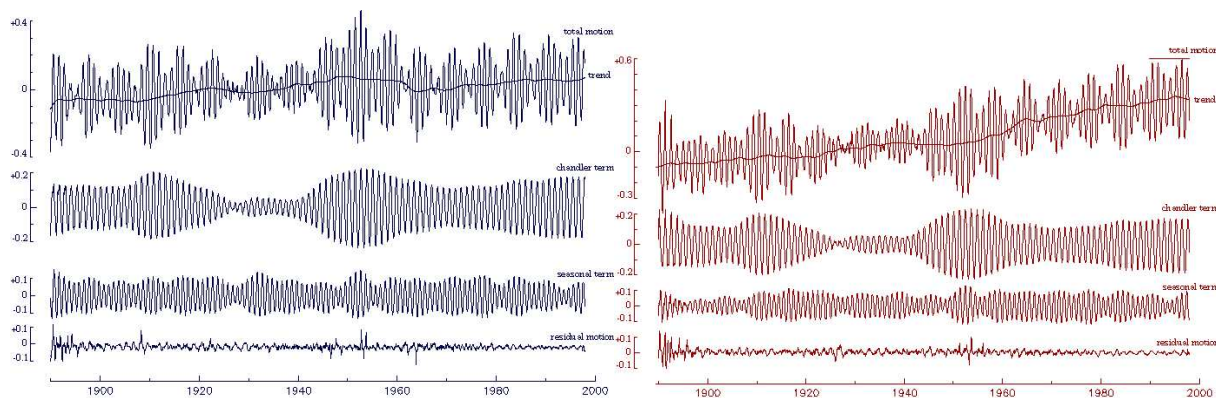
Slika 7.4 prikazuje kretanje pola razloženo po koordinatnim osama za ceo period praćenja. Gornja kriva prikazuje ukupno kretanje sa izvučenim trendom; sledeća daje Chandlerov član; na trećoj krivi su isključeni trend i Chandlerov period, što znači da ostaju samo sezonski članovi, dok je na četvrtoj krivi prikazan ostatak oscilovanja pola, do kojeg dolazi, uglavnom, zbog premeštaja atmosferskih masa. Ovi članovi imaju periode različite dužine, od dnevnih, do višegodišnjih.

### 7.2.3 Nebesko kretanje pola

Kretanje nebeskog pola je opisano precesiono-nutacionim modelom, što za rezultat daje nutaciju u longitudi  $\Delta\psi$  i nutaciju u nagibu ekliptike  $\Delta\epsilon$ . Razlike u odnosu na precesiono-nutacioni model su prikazane



Slika 7.3: Kretanje Zemljinog pola [IER]



Slika 7.4: Komponente pola: x (levo) i y (desno) [IER]

na slici 7.5. Gornji grafikon nutaciju u longitudi, a donji nutaciju u nagibu ekliptike. Promene u odnosu na model IAU su prikazane grafički na slici 7.6. Ove razlike se objašnjavaju, pre svega, razlikama u manjem broju članova modela IAU (članovi sa periodima od 18,6 godina, 1 godine, 6 meseci i 14 dana). Korišćenjem modela predloženog u Preporukama IERS 1996. ova razlika se može smanjiti do 0,"001.

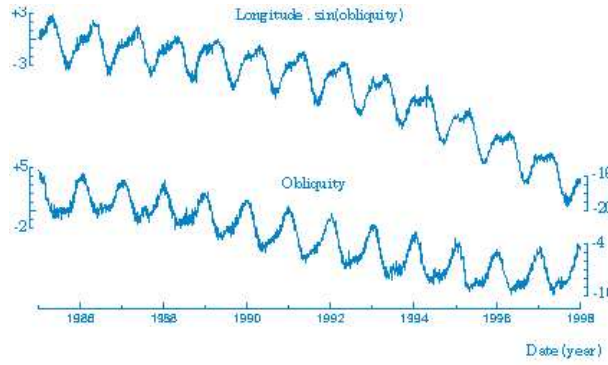
### 7.3 Svođenje sa trenutnog (pravog) pola na CIO

Usled Zemljine rotacije i uticaja opisanih u prethodnom poglavlju dolazi do posrednih promena ekvatorskih koordinata nebeskih tela, kao i do direktnih promena astronomskih koordinata tačke na Zemlji. Da bismo izveli jednačine za svođenje dobijenih trenutnih koordinata na Konvencionalni inercijalni koordinatni početak (*CIO - Conventional Inertial Origin*), posmatrajmo sliku [ŠB81].

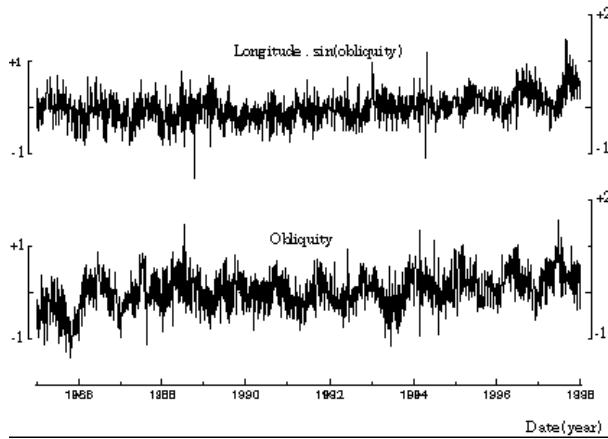
Uočimo položaj srednjeg pola u tački  $P_0$  i njegov položaj  $P$  posle vremenskog intervala  $\tau$ . Postavimo pravougli koordinatni sistem sa početkom u srednjem polu tako da osa  $x$  bude usmerena prema tangenti Greenwichkog meridijana, a  $y$  osa zapadno od ose  $x$ . Neka su, dalje,  $p$  i  $\omega$  polarne koordinate pola.

Nebesko telo  $\Sigma$  je, usled promene položaja pola, promenilo svoj azimut za  $\Delta A$ . Nebesko telo i dva položaja pola čine serni trougao sa stranama  $P_0\Sigma = 90^\circ - \Phi_0$  i  $P\Sigma = 90^\circ - \Phi$ . Spuštanjem visine  $z$  temena  $P$  na stranu  $P_0\Sigma$  dobijamo i odsečak  $\Delta\Phi = P_0H$ , koji predstavlja iznos promene latitude. Longituda se, usled promene položaja pola, promenila za  $\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda_0$ .

Tako smo formirali dva pravougla sferna trougla,  $PH\Sigma$  i  $P_0H\Sigma$ , koji dele zajedničku stranu  $PH$ . Izražavanjem ove strane iz oba pravougla sferna trougla i njihovim izjednačavanjem, dobijamo:



Slika 7.5: Nebesko kretanje pola



Slika 7.6: Razlika mutacije od modela IAU

$$PQ = p \sin(\omega - \Lambda) = -x \sin \Lambda + y \cos \Lambda = \cos \Phi \Delta \Lambda, \quad (7.3)$$

odakle se promena azimuta može izraziti kao:

$$\Delta A = \frac{-x \sin \Lambda + y \cos \Lambda}{\cos \Phi}. \quad (7.4)$$

Posmatrajmo sad pravougli sferni trougao  $\Sigma EE_0$ . Napišimo Neperovo pravilo za stranu  $\Delta \Lambda$ :

$$\sin \Delta \Lambda = \sin \Phi \sin \Delta A. \quad (7.5)$$

Aproksimirajući sinuse malih uglova njihovim vrednostima, sledi:

$$\Delta \Lambda = \sin \Phi \Delta A. \quad (7.6)$$

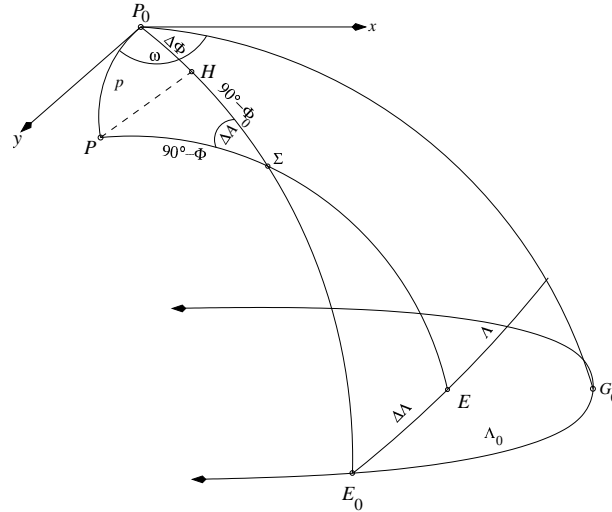
Uvodeći (7.4) u (7.6), dobijamo konačni izraz za promenu longitude usled pomeranja Zemljinog pola:

$$\Delta \Lambda = (-x \sin \Lambda + \cos \Lambda) \tan \Phi. \quad (7.7)$$

Iz trougla  $PP_0\Sigma$ , primenom kosinusne teoreme, dobijamo izraz:

$$\cos(90^\circ - \Phi) = \cos(90^\circ - \Phi_0) \cos p + \sin(90^\circ - \Phi_0) \sin p \cos(\omega - \Lambda). \quad (7.8)$$

Zbo blizine srednjeg i trenutnog pola, sinuse male uglova možemo zameniti njihovim vrednostima:



Slika 7.7: Svođenje na CIO [ŠB81]

$$\sin \Phi = \sin \Phi_0 + p \cos \Phi_0 \cos (\omega - \Lambda). \quad (7.9)$$

Razvijanjem kosinusa razlike uglova, sledi:

$$\sin \Phi = \sin \Phi_0 + p \cos \omega \cos \Lambda \cos \Phi_0 + p \sin \omega \sin \Lambda \cos \Phi_0. \quad (7.10)$$

Aproksimiranjem pravougljih koordinata pola sa:

$$x = p \cos \omega \quad (7.11)$$

$$y = p \sin \omega. \quad (7.12)$$

Zamenom (7.11) i (7.12) u (7.10) i deljenjem cele jednačine sa  $\cos \Phi_0$ , sledi:

$$\frac{\sin \Phi}{\cos \Phi_0} = \tan \Phi_0 + x \cos \Lambda + y \sin \Lambda. \quad (7.13)$$

Pošto se  $\Phi$  i  $\Phi_0$  vrlo malo razlikuju, dozvoljeno je napisati:

$$\tan \Phi = \tan \Phi_0 + x \cos \Lambda + y \sin \Lambda, \quad (7.14)$$

odakle se dobija konačan izraz za promenu astronomske latitude usled pomeranja pola:

$$\Phi - \Phi_0 = x \cos \Lambda + y \sin \Lambda. \quad (7.15)$$



## Poglavlje 8

# Međunarodne službe i organizacije

### 8.1 Međunarodni servis za Zemljinu rotaciju i referentne sisteme (IERS)

Međunarodna astronomska unija (IAU) i Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku (IUGG) su, pod prvobitnim imenom, Međunarodni servis za zemljinu rotaciju, 1987. godine ustanovili IERS. Godine 2003. IERS menja svoj naziv u “Međunarodni servis za Zemljinu rotaciju i referentne sisteme”, zadržavajući istu skraćenicu.

Osnovne oblasti bavljenja IERS su:

- Međunarodni nebeski referentni sistem (ICRS)<sup>1</sup> i njegova realizacija;
- Međunarodni nebeski referentni okvir (ICRF)<sup>2</sup>;
- Međunarodni terestrički referentni sistem (ITRS)<sup>3</sup> i njegova realizacija;
- Međunarodni terestrički referentni okvir (ITRF)<sup>4</sup>;
- Parametri Zemljine rotacije potrebnih za izučavanje promena u Zemljinoj orijentaciji i transformaciji između ICRF i ITRF;
- Geofizički podaci za interpretaciju vremensko-prostornih promena u ICRF, ITRF ili parametrima Zemljine orijentacije i modeliranje tih promena i
- Standardi, konstante i modeli.

#### 8.1.1 Struktura IERS

IERS sačinjavaju sledeće komponente:

- Tehnički centri;
- Proizvodni centri;
- Kombinatorni centri;
- Analitički koordinator;
- Centralni biro i
- Bord direktora.

---

<sup>1</sup>International Celestial Reference System

<sup>2</sup>International Celestial Reference Frame

<sup>3</sup>International Terrestrial Reference System

<sup>4</sup>International Terrestrial Reference Frame

### **Tehnički centri**

Tehnički centri su autonomni nezavisni servisi koji saraduju sa IERS. Odgovorni su za razvoj i organizovanje aktivnosti svake grupe opažanja koja se koriste u proizvodima IERS. Tehničke centre čine:

- Međunarodni GPS servis (IGS);
- Međunarodni servis za lasersko merenja dužina (ILRS);
- Međunarodni servis za dugobazisnu interferometriju (IVS) i
- Međunarodni DORIS servis (IDS).

### **Proizvodni centri**

Proizvodni centri su odgovorni IERS za proizvode koji se publikuju. Proizvodne centre čine:

- Centar za Zemljinu orijentaciju;
- Centar za predikciju;
- Centar za konvencije;
- ICRS centar;
- ITRS centar;
- Centar za globalne geofizičke fluide sa svojim biroima za: atmosferu, okeane, plime, hidrologiju, mantle, Zemljinu koru, gravitaciju/geocentar i loading.

### **Kombinatorni centri**

Kombinatorni centar ITRS je odgovoran za održavanje ITRF proizvoda dobijenih iz ITRF ulaznih podataka, kombinovanih sa rezultatima Tehničkih centrala i drugih segmenata IERS. Kombinatorni istraživački centri su zaduženi za kombinovanje postojećih podataka sa onima dobijenih različitim opažačkim tehnikama. Centri razvijaju preporučene metode, obezbeđuju detaljne opise i obezbeđuju neophodnu softversku podršku Analitičkom koordinatoru.

### **Analitički koordinator**

Analitički koordinator je odgovoran za dugotrajnu i internu saglasnost IERS referentnih okvira i drugih proizvoda. Odgovoran je, takođe, za obezbeđivanje odgovarajuće kombinacije proizvoda Tehničkih centara i jedinstven skupu zvanihnih proizvoda IERS i arhiviranje proizvoda u Centralnom birou ili na drugom mestu.

### **Centralni biro**

Centralni biro ima izvršnu ulogu u IERS, što znači da je zadužen za upravljanje IERS u skladu sa direktivama i politikom Borda direktora. Centralni biro obezbeđuje komunikaciju, koordinira aktivnosti, prati operacije, održava dokumentaciju, arhivira proizvode i relevantne informacije, sastavlja izveštaje i organizuje sastanke i radionice.

### **Savet direktora**

Bord direktora vrši glavnu kontrolu nad aktivnostima servisa i modifikuje organizacije tako da ona odražava efikasnost i pouzdanost, pri tome ostvarujući puni napredak u tehnologiji i teoriji.

### 8.1.2 Opažačke tehnike

Proizvodi koje održava IERS rezultat su raznorodnih geodetskih merenja. Rezultati se dobijaju kombinovanjem sledećih mernih tehnika:

- Globalni sistem za pozicioniranje (GPS)<sup>5</sup>;
- Lasersko merenje dužina do satelita (SLR)<sup>6</sup>;
- Lasersko merenje dužina do Meseca (LLR)<sup>7</sup>;
- Dugobazisna interferometrija (VLBI)<sup>8</sup> i
- Doplerska orbitografija radiopozicioniranjem integrisanim na satelitu (DORIS)<sup>9</sup>.

#### GPS

Za potrebe IERS, mreža od 30 permanentnih GPS stanica neprekidno prikuplja podatke na obe frekvencije. Dnevno kretanje Zemljinog pola se određuje sa tačnošću od  $\pm 0''$ , 0002. Tačnost dnevnog određivanja visokofrekventnih varijacija u svetskom vremenu *UT* je  $\pm 60$  ms. Glavna prednost GPS za potrebe IERS je mogućnost pugušćavanja terestričkog okvira sa tačnošću od  $\pm$  cm, povezivanjem regionalnih kampanja sa mrežom permanentnih stanica. Takođe, mogućnost upotrebe GPS je i u tehnikama preciznog određivanja orbita postojećih i budućih geonaučnih kosmičkih misija, kao i uspostavljanje veza sa raznim referentnim sistemima.

#### SLR

Tehnika SLR se odnosi na merenje vremenskog intervala potrebnog da impuls, emitovan od strane laserskog transmitera, stigne do satelita i vrati se do transmitera. Rastojanje između satelita i mesta opažanja je, otprilike, jednako jednoj polovini dvostruke dužine puta pomnožene sa brzinom svetlosti. Nekoliko satelita je opremljeno posebno konstruisanim reflektorima koji mogu da vrate laserski zrak natrag do mesta emitovanja. Za IERS potrebe, najčešće se koriste sateliti Lageos-1 i Lageos-2. Oni se nalaze na visini od 5900 km, ali u različitim orbitalnim ravnima. Danas je moguće izmeriti dužinu do ovih satelita sa preciznošću većom od 1 cm. Pošto je za obradu SLR merenja potrebno uvesti odgovarajuću pravku za prolazak zraka kroz troposferu, u trenutku merenja se na stanici mere i atmosferski parametri: atmosferski pritisak, temperatura i relativna vlažnost vazduha.

Od 1976. godine, kada je lansiran Lageos-1, više od 100 stanica je ostvarilo SLR merenja.

### 8.1.3 Proizvodi IERS

Kombinujući rezultate opažaćkih tehnika opisanih u poglavlju 8.1.2, IERS publikuje sledeće rezultate:

- Podatke orijentacije Zemlje;
- Konvencije;
- Međunarodni nebeski referentni sistem;
- Međunarodni nebeski referentni okvir;
- Međunarodni terestrički referentni sistem;
- Međunarodni terestrički referentni okvir i
- Podatke geofizičkih fluida.

---

<sup>5</sup>Global Positioning System

<sup>6</sup>Satellite Laser Ranging

<sup>7</sup>Lunar Laser Ranging

<sup>8</sup>Very Long Baseline Radio Interferometry

<sup>9</sup>Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite



# Popis slika

2.1	Sferni trougao . . . . .	10
2.2	Sferne polarne koordinate . . . . .	11
2.3	Nebeska sfera . . . . .	13
3.1	Mesni horizontski sistem . . . . .	16
3.2	Mesni ekvatorski koordinatni sistem . . . . .	17
3.3	Nebeski ekvatorski koordinatni sistem . . . . .	18
3.4	Nebeski ekliptički sistem . . . . .	19
3.5	Transformacija koordinata . . . . .	20
3.6	Transformacija koordinata iz ekvatorskog u ekliptički koordinatni sistem . . . . .	21
3.7	Gornja i donja kulminacija nebeskog tela . . . . .	24
3.8	Zalaz nebeskog tela . . . . .	26
3.9	Prolazak nebeskog tela kroz prvi vertikal . . . . .	27
3.10	Najveća digresija nebeskog tela . . . . .	28
3.11	Prolazak kroz dati almukantar . . . . .	29
3.12	Prolazak kroz zadati vertikal . . . . .	30
3.13	Promena položaja nebeskog tela . . . . .	31
3.14	Ekliptički trougao . . . . .	34
4.1	Vremenski sistemi . . . . .	36
4.2	Zemljina eliptična putanja . . . . .	37
4.3	Promene ekvatorskih koordinata Sunca tokom godine . . . . .	38
4.4	Priraštaji rektascenzije i longitude Sunca . . . . .	38
4.5	Računanje vremena . . . . .	44
4.6	Distribucija vremena . . . . .	45
4.7	Vremenske zone . . . . .	46
5.1	Planparalelni model atmosfere . . . . .	49
5.2	Sferno-simetrična atmosfera . . . . .	51
5.3	Prelamanje svetlosti u sferno-simetričnom modelu . . . . .	52
5.4	Geocentrična paralaksa . . . . .	54
5.5	Godišnja paralaksa . . . . .	56

5.6	Aberacija svetlosti . . . . .	57
5.7	Precesija, nutacija i sopstveno kretanje . . . . .	59
5.8	Uticaoj privlačne sile Sunca na Zemlju . . . . .	60
5.9	Lunisolarna precesija . . . . .	61
5.10	Planetna precesija . . . . .	62
5.11	Precesioni uglovi . . . . .	64
5.12	Nutaciono kretanje . . . . .	66
5.13	Uticaoj nutacije na ekvatorske koordinate . . . . .	68
5.14	Zvezdano kretanje u pravcu Sunca . . . . .	70
5.15	Komponente sopstvenog kretanja . . . . .	71
5.16	Radijalna brzina zvezde . . . . .	72
6.1	Godišnja aberacija . . . . .	77
6.2	Shema svođenja sredneg na prividni položaj nebeskog tela . . . . .	81
7.1	Varijacije $UT1-TAI$ (levo) i $LOD$ (desno) [IER] . . . . .	84
7.2	Promena $LOD$ . . . . .	85
7.3	Kretanje Zemljinog pola [IER] . . . . .	86
7.4	Komponente pola: x (levo) i y (desno) [IER] . . . . .	86
7.5	Nebesko kretanje pola . . . . .	87
7.6	Razlika nutacije od modela IAU . . . . .	87
7.7	Svođenje na CIO [ŠB81] . . . . .	88

# Popis tablica

2.1	Ravni i sferni trougao . . . . .	10
3.1	Nebeski koordinatni sistemi . . . . .	19
4.1	Dužine definisanih godina . . . . .	40
4.2	Počeci godišnjih doba . . . . .	47

# Indeks

- časovni ugao, 16
- aberracija, 56
  - dnevna, 57
  - godišnja, 57
  - konstanta, 56, 58
- afel, 37
- almukantar, 13
- Anomalistička godina, 40
- anticirkumpolarna zvezda, 26
- apeks, 56, 59
- apogeum, 37
- astronomska jedinica, 37, 71
- azimut, 15
  
- baricentar
  - Sunčevog sistema, 13
- Beselova epoha, 80
- Beselova godina, 39
- BIPM, 43
  
- CEP, 84
- CIO, 86
- cirkumpolarna zvezda, 26
- crveni pomak, 70
  
- dan
  - julijanski, 41
  - modifikovani julijanski, 41
  - pravi Sunčevi, 37
  - srednji, 39
  - zvezdani, 36
- danjJulijanski, 41
- deklinacija, 16
- deklinacijski krug, 14
- distribucija vremena, 43
- dnevni paralel, 14
- dužina dana, 84
  
- efemeridski časovni ugao, 42
- efemeridski meridijan, 42
- eklipsna godina, 40
- ekliptika, 14, 36
  - nagib, 23
- elipsoidna visina, 18
- EOP, 83
  
- FK5, 80
  
- geocentar, 13
- geocentrično zenitno odstojanje, 54
  
- GMST, 84
- godina
  - sekularna, 47
  - tropska, 40
- GPS, 17
- gravitaciono odstupanje svetlosti, 78
  
- heliocentar, 13
- Hipparcos, 80
  
- ICRS, 41
  
- Julijanska godina, 40
  
- kalendar
  - gregorijanski, 47
  - julijanski, 46
  - lunarni, 45
  - lunisolarni, 46
  - solarni, 46
- katalog
  - fundamentalni, 80
  - posmatrački, 80
  - zvezdani, 80
- koordinate
  - geodetske, 18
  - prirodne, 17
- kretanje pola, 83
  
- latituda
  - astronomska, 18
  - geodetska, 18
  - nebeska, 17
- LOD, 84
- longituda
  - astronomska, 18
  - geodetska, 18
  - nebeska, 17
  
- matrica rotacije, 65
- mesni ekvatorski sistem, 16
- mesni horizontski sistem, 15
  
- nadir, 13
- nagib ekliptike, 64
- nebeska kolatituda, 17
- nebeska sfera, 9
- nebeski ekliptički sistem, 17
- nebeski ekvator, 13
- nebeski ekvatorski sistem, 16
- nebeski meridijan, 14



- Neperova pravila, 12  
 nutacija, 60, 65, 83  
  
 odklon vertikalne, 8, 18  
  
 paralaksa, 54  
     geocentrična, 54  
     godišnja, 54  
     horizontska, 55  
 parsek, 56  
 perigeum, 37  
 perihel, 37  
 planetna precesija, 62  
     godišnji iznos, 62  
 platonska godina, 40, 60  
 polarna osa, 13  
 pravi horizont, 13  
 pravi položaj, 75  
 precesija, 59, 83  
     lunisolarna, 60  
     opšta, 63  
     planetna, 60, 62  
 prividni položaj, 75  
  
 radijalna brzina, 77  
 ravnodnevnicu, 37  
 refrakcija  
     anomalije, 54  
     astronomska, 49  
     horizontska, 53  
     konstanta, 50  
     normalna, 53  
     prava, 53  
     zenitska, 54  
  
 sfera  
     mali krug, 9  
     pol, 9  
     veliki krug, 9  
 sferna trigonometrija, 11  
 sferni trougao, 9  
     elementi, 9  
     pravougli, 12  
     rešavanje, 12  
 siderička godina, 39  
 solsticij, 37  
 sopstveno kretanje, 60, 70, 76  
     godišnje, 70  
     položajni ugao, 71  
 srednji položaj, 75  
 Sunce  
     pravo, 42  
     srednje, 39  
     srednje efemeridsko, 42  
     srednje ekliptičko, 39  
 svetsko vreme, 83  
  
 tablice refrakcije, 53  
 topocentar, 13  
  
 topocentrično zenitno odstojanje, 50  
 tropska godina, 39  
 Tycho 2, 80  
  
 UT1, 84  
  
 vertikal, 14  
 vertikala, 13  
 VLBI, 41, 83  
 vreme  
     baricentrično dinamičko, 42  
     efemeridsko, 39, 41  
     koordinatno, 42  
     međunarodno atomsko, 43  
     pravo, 36, 37  
     pravo zvezdano, 35  
     sopstveno, 42  
     srednje, 36, 39, 40  
     srednje zvezdano, 36  
     svetsko, 36, 39, 40  
     svetsko koordinirano, 43  
     terestričko dinamičko, 42  
     zvezdano, 20, 35, 40  
 vremenske skale, 35  
     atomske, 35  
     prirodne, 35  
     teorijske, 35  
 vremensko izjednačenje, 39  
  
 WGS-84, 17  
  
 Zemljini orijentacioni parametri, 83  
 zenit, 13  
 zenit refrakcije, 54  
 zenitno odstojanje, 15  
 zodijak, 36  
 zvezdano kretanje, 69



# Bibliografija

- [Aba85] V. K. Abalakin (ed.), *Refraction tables of pulkovo observatory*, Nauka, St. Petersburg, 1985.
- [cia06] *The world factbook*, Central Intelligence Agency, Washington D.C., 2006.
- [Dač98] M. Dačić, *Analiza uticaja grešaka koordinata zvezda na rezultate određivanja geodetske astronomije*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd, 1998.
- [Gre98] M. R. Green, *Astronomija, klasika u novom ruhu*, Vesta company, Beograd, 1998.
- [IER] IERS, *Measuring the irregularities of the earth's rotation*, <http://www.iers.org/iers/earth/rotation>.
- [ŠB81] B. Ševarlić and Z. Brkić, *Opšta astronomija*, Naučna knjiga, Beograd, 1981.



# Spisak skraćenica

1PPS	(One Pulse Per Second) Jedan impuls u sekundi
AAM	(Atmospheric Angular Momentum) Atmosferski ugaoni moment
ADU	(Analog to Digital Unit) Pokazatelj kvaliteta digitalizacije slike
AVAR	(Allan Variance) Alanova varijansa
CIO	(Conventional International Origin) Konvencionalni međunarodni početak
CCD	(Charged Coupled Device) Integralno kolo za generisanje digitalne slike
CGI	(Common Gated Interface)
FK5	(Fundamental Catalogue 5) Fundamentalni katalog, verzija 5
FM	(Frequency Modulation) Frekventna modulacija
GAST	(Greenwich Apparent Sideral Time) Greenwichko pravo zvezdano vreme
GMST	(Greenwich Mean Sideral Time) Greenwichko srednje zvezdano vreme
GPS	(Global Positioning System) Globalni sistem za pozicioniranje
IAU	(International Astronomic Union) Međunarodna astronomska unija
ICRF	(International Celestial Reference Frame) Međunarodni nebeski referentni okvir
ICRS	(International Celestial Reference System) Međunarodni nebeski referentni sistem
IERS	(International Earth Rotation Service) Međunarodna služba za Zemljinu rotaciju
ITRF	(The International Terrestrial Reference Frame) Međunarodni terestrički referentni okvir
ITRS	(The International Terrestrial Reference System) Međunarodni terestrički referentni sistem
IUGG	(International Union of Geodesy and Geophysics) Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku
JD	(Julian Day) Julijanski dan
LAST	(Local Apparent Sideral Time) Mesno pravo zvezdano vreme
LMST	(Local Mean Sideral Time) Mesno srednje zvezdano vreme
LLR	(Lunar Laser Ranging) Lasersko merenje dužine do Meseca
MJD	Modifikovani julijanski dan
MVAR	(Modified Allan Variance) Modifikovana Alanova varijansa
NMEA	(National Marine Electronics Association)
NTP	(Network Time Protocol) Mrežni protokol za prenos tačnog vremena
QE	(Quantom Efficiency) Kvantna efikasnost. Odnos broja primljenih fotona i generisanih elektrona

RGB	(Red-Green-Blue) Tri osnovne boje (crvena-zelena-plava) iz kojih se dobijaju ostale boje iz vidljivog dela spektra
RPC	(Remote Protocol Call) Protokol za upravljanje uređajima preko spoljnih poziva
SLR	(Satellite Laser Ranging) Lasersko merenja dužina do satelita
TVAR	(Time Variance) Vremenski modifikovana Alanova varijansa
UT	(Universal Time) Svetsko vreme; vremenska skala bazirana na dužini srednjeg sunčevog dana
UTC	(Universal Coordinated Time) Svetsko koordinirano vreme; atomska vremenska skala
VLBI	(Very Long Basis Interferometry) Dugobazisna interferometrija
WGS-84	(World Geodetic System) Svetski geodetski sistem