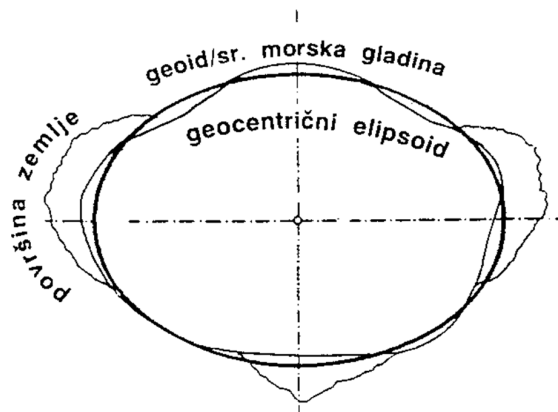


# Oblika Zemlje

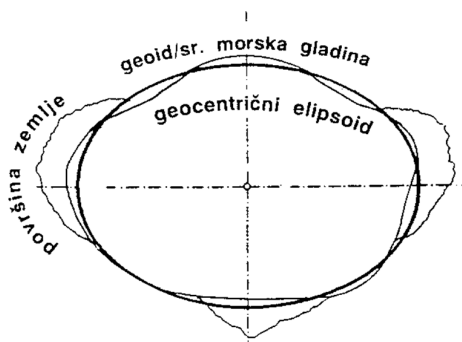
- ✗ Obliko Zemlje lahko predstavimo z eno od nivojskih ploskev težnostnega potenciala. V fizikalnem pogledu se obliki Zemlje najbolj prilega nivojska ploskev, imenovana geoid.

$$W = W(x, y, z) = W_0 = \text{konst.}$$

- ✗ Geoid je primeren za proučevanje težnostnega potenciala (določanje potencialnih in višinskih razlik z nivelmanskimi in gravimetričnimi meritvami), ni pa primeren za geodetske izračune, saj geoida ni mogoče podati z enostavnimi matematičnimi izrazi.



- ✗ Težnostni potencial ni neposredno izmerljiva količina, geoid pa je z njo definiran. Geoid, kot referenčna ploskev za določanje višinskih razlik točk na Zemlji, je t.i. ničelna nivojska ploskev. Za njeno upodobitev si pomagamo s srednjo gladino morja, ki pa odstopa od trenutne nivojske ploskve za vrednosti  $\pm 1$  do  $\pm 2$  m.



- ✗ V matematičnem pogledu se obliki Zemlje najbolj prilega dvoosni rotacijski elipsoid  $\rightarrow$  referenčna ploskev za določanje položaja točk.
- ✗ Zemlja ni idealen elipsoid, vendar elipsoidno težnostno polje ima velik praktičen pomen pri proučevanju realnega Zemljinega polja težnosti.

# Normalno težnostno polje

- ✘ "Normalno" - teoretično težnostno polje nam zagotavlja referenčni "normalni" model Zemlje → rotacijski elipsoid.
- ✘ **Nivojski elipsoid** - referenčni rotacijski elipsoid, ki smo mu priredili težnostno polje - normalno težnostno polje.
- ✘ Nivojski elipsoid, "level ellipsoid" (angl.), "der Niveauellipsoid" (nem.).
- ✘ **Normalni težnostni potencial:**
- ✘ 
$$U = U(x,y,z).$$
- ✘ Nivojski elipsoid je pomožna ploskev, ki nam služi za določitev ploskve geoida (kvazigeoida). Pri tem je privzeta predpostavka, da sta ploskvi enakega potenciala  $U_0 = \text{const.}$  in  $W_0 = \text{const.}$ , torej velja:
- ✘ 
$$U_0 = W_0$$

# Nivojski elipsoid

- ✘ Nivojski elipsoid normalnega težnostnega polja je v popolnosti določen s parametri rotacijskega elipsoida: geometričnima: veliko polosjo  $a$ , in sploščenostjo  $f$ , ter fizikalnima: maso  $M$  in kotno hitrostjo rotacije  $\omega$  (enako Zemljini).
- ✘ **Stokes-Poincaré teorem!**
- ✘ Normalni težnostni potencial:
- ✘ 
$$U = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

# Normalna težnost

- ✗ Povezava med fizikalnimi parametri polja (nivojski elipsoid) in geometričnimi parametri (rot. elipsoid):
- ✗ Vektor normalne sile teže je gradient normalnega težnostnega potenciala

- ✗ 
$$\gamma = \text{grad } U$$

- ✗ Vrednost normalnega težnega pospeška na elipsoidu je podana z izrazom **Somigliane**\* (1929):

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 \phi + b\gamma_b \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$$

$$\gamma_0 = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$



\*Carlo Somigliana (1860-1955), italijanski matematik, fizik.

## Razvoj normalnega težnostnega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah

- ✗ Elipsoid je rotacijsko simetrično telo, zato ni odvisnosti od krogelne (geografske) dolžine ( $\lambda$ ). Razvoj vsebuje samo člene za  $m = 0$ .

$$U(r, \theta) = \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} C_{n0} P_n(\cos \theta) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

- ✗ Zaradi simetrije glede na ekvator, v vrsti nastopajo samo parni koeficienti (conski). Za praktične naloge zadošča razvoj do stopnje  $n = 8$ .
- ✗ Do razvoja  $n = 2$  je U:

$$U(\phi, r) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin \phi) + \frac{1}{2} m \left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos^2 \phi \right]$$

- ✗ Vrednost  $\gamma$  na elipsoidu dobimo z odvajanjem zgornje enačbe po  $r$ :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 - 3J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin \phi) - m \left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos^2 \phi \right]$$

- ✗ kar nam da (vrednost  $\gamma$  na elipsoidu):

$$\gamma(r) = \frac{GM}{a^2} \left[ 1 + f - \frac{3}{2}m - \left( f - \frac{5}{2}m \right) \cos^2 \phi \right]$$

- ✗ Na enak način lahko izračunamo normalni težni pospešek na polu oz. ekvatorju. Na elipsoidu ne moreta biti konstantna potencial in pospešek, ostaje odvisnost pospeška od širine oz. polarnega kota. Računamo vrednost  $\gamma$  na ekvatorju ( $\phi = 0^\circ$ ):

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + f - \frac{3}{2}m \right)$$

- ✗ oz. na polu  $\phi = 90^\circ$ :

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} (1 + m)$$

- ✗ Namen izpeljavanja je dobiti izraz za potencial in normalno težnost v funkciji štirih parametrov, ki popolnoma definirajo nivojski elipsoid:
  - +  $a$ ,  $f$  ( $C_{20}$  oz.  $J_2$ ),  $GM$  in  $\omega$ .

- ✗ Podajmo izraz za težnostno sploščenost  $f^*$ : 
$$f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$$

- ✗ v izraz vstavimo izraza za  $\gamma_e$  in  $\gamma_p$ : 
$$f^* = \frac{\frac{5}{2}m - f}{1 + f - \frac{3}{2}m} \approx \frac{5}{2}m - f$$

- ✗ dobimo prvo obliko **teorema Clairauta**\*: 
$$f^* \approx \frac{5}{2}m - f$$

- ✗ Teorem (Clairaut) z drugimi besedami pravi, da je možno s pomočjo gravimetričnih meritev določiti geometrično sploščenost Zemlje.

$$f + \frac{3}{2}c_{20} = \frac{1}{2}m$$

- ✗ Druga oblika t. Clairauta povezuje **geometrijo** ( $f$ ), **dinamiko** ( $C_{20}$ ) in **rotacijo** ( $\omega$ ).

- ✗ Pomemben je tudi **teorem Pizzettija**\*: 
$$2 \frac{\gamma_e}{a} + \frac{\gamma_p}{b} = \frac{3GM}{a^2 b} - 2\omega^2$$

- ✗ Teorema definirata povezavo med geometričnimi in fizikalnimi parametri nivojskega elipsoida.

\*Alexis Claude Clairaut (1713-1765) francoski matematik, objavil znano enačbo v knjigi "Théorie de la figure de la Terre", izdani leta 1743.

\*Paolo Pizzeti (1860 - 1918), italijanski geodet, astronom, geofizik in matematik.

# Vrednost $\gamma$ v prostoru zunaj nivojskega elipsoida

- ✘ Izraz za  $\gamma$  razvijemo v Taylorjevo vrsto glede na elipsoidno višino  $h$  (velja za male vrednosti višin):

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right)_0 h^2 + \dots$$

+ pri tem se  $\gamma$  in odvodi nanašajo na elipsoid ( $h=0$ ).

- ✘ Potrebno je poiskati izraze za parcialne odvode.
- ✘ Prvi odvod  $\partial\gamma/\partial h$  dobimo s pomočjo Brunsove enačbe za prostor zunaj Zemlje ( $\rho=0$ ):

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial\gamma}{\partial h} = -2gJ - 2\omega^2 = -\gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) - 2\omega^2 \quad J = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)$$

+ kjer smo dejanski težni pospešek ( $g$ ) zamenjali z normalnim težnim pospeškom ( $\gamma$ ) in  $M$  in  $N$  sta radija ukrivljenosti elipsoida v smeri meridiana in prvega vertikalna.

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}} = \frac{c}{(1+e'^2\cos^2\phi)^{3/2}} \quad N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\phi)^{1/2}} = \frac{c}{(1+e'^2\cos^2\phi)^{1/2}} \quad c = \frac{a^2}{b}$$

- ✘ Če napišemo recipročne vrednosti radijev in razvijemo izraze v oklepaju po binomskem obrazcu (omejimo se samo na prve člene):

$$\frac{1}{M} = \frac{b}{a^2} (1+e'^2\cos^2\phi)^{3/2} = \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2}e'^2\cos^2\phi + \dots\right)$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{a^2} (1+e'^2\cos^2\phi)^{1/2} = \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2}e'^2\cos^2\phi + \dots\right)$$

- ✘ seštevanje nam da:  $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{b}{a^2} (2 + 2e'^2\cos^2\phi) = \frac{2b}{a^2} (1 + 2f\cos^2\phi)$

- ✘ Člen  $2\omega^2$  v Brunsovi enačbi je zelo mali in če ga izrazimo s pomočjo količin  $m$  in  $\gamma$  dobimo izraz za spremembo težnega pospeška z višino (vertikalna komponenta gradienta normalne težnosti) se glasi:

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0 = -2\frac{\gamma_0}{a} (1 + f + m - 2f\sin^2\phi)$$

- ✘ oz. vrednost normalne težnosti na elipsoidni višini  $h$ :

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f\sin^2\phi)h\right)$$

- ✘ Za posamezne naloge zadošča že sferni približek (ekvatorialni radij elipsoida smo pri tem zamenjali s srednjim radijem Zemlje;  $a=R$ ):

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 - 2 \frac{\gamma}{R} h$$

- ✘ V večini primerov potrebujemo višjo natančnost računanja, zato moramo poiskati še vrednost drugega odvoda  $\partial^2\gamma/\partial h^2$ , Začnemo z sferno aproksimacijo za  $\gamma$  in zanemarimo  $e^2$ , ali  $f(R=a)$ :

$$\gamma = \frac{GM}{a^2} \quad \frac{\partial\gamma}{\partial h} = \frac{\partial\gamma}{\partial a} = -\frac{2GM}{a^3} \quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial a^2} = \frac{6GM}{a^4}$$

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2} = \frac{6\gamma}{a^2}$$

- ✘ Vrednost normalne težnosti na elipsoidni višini  $h$  (upoštevajoč odvode drugega reda):

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0 \left( 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right)$$

## Nivojska elipsoida GRS 80 in WGS 84

Parameter	GRS 80	WGS 84
<b>GM</b>	3986 005 × 10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>	3 986 004,418 × 10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>
<b>1/f</b>	298,257 222 101	298,257 223 563
<b>b</b>	6 356 752,3141 m	6 356 752,3142 m
<b>e<sup>2</sup></b>	0,006 694 380 022 90	0,006 694 379 990 14
<b>e'<sup>2</sup></b>	0,006 739 496 775 48	0,006 739 496 742 28
<b>E</b>	521 854,0097	521 854,0097
<b>c</b>	6 399 593,6259	6 399 593,6258
<b>U<sub>0</sub></b>	62 636 860,0850 m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	62 636 851,7146 m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>
<b>γ<sub>a</sub></b>	9,780 326 7715 ms <sup>-2</sup>	9,780 325 3359 ms <sup>-2</sup>
<b>γ<sub>b</sub></b>	9,832 186 3685 ms <sup>-2</sup>	9,832 184 9378 ms <sup>-2</sup>
<b>m</b>	0,003 449 786 003 08	0,003 449 786 506 84

### GRS 80

# Časovne spremembe težnostnega polja Zemlje

- ✘ Na spremembo težnosti vplivajo naslednji dejavniki:
  - + časovna sprememba gravitacijske konstante  $G$ ,
  - + spremembe v rotaciji Zemlje,
  - + plimovanje, plimske sile,
  - + variacije težnosti zaradi razmestitve zemeljskih mas.

## Spremembe v rotaciji Zemlje in vpliv premikanja polov

- ✘ Spremembe v rotaciji Zemlje spreminjajo centrifugalni potencial → mali vpliv na merjeno vrednost težnega pospeška (vpliv se upošteva samo pri celodnevnih gravimetričnih meritvah).

- ✘ Radialna komponenta centrifugalne sile (za Zemljo - kroglo):

$$f = \omega^2 p \quad f_r = -\omega^2 R \cos \phi$$

- ✘ Z odvajanjem zgornje enačbe vidimo kako sprememba v geografski širini (premikanje polov) in sprememba v rotaciji Zemlje (dolžina dneva - LOD) učinkuje na težnost:

$$\partial f_r = \omega^2 R \sin 2\phi \delta\phi - 2\omega R \cos^2 \phi \delta\omega$$

- ✘ Premikanje polov ("polar motion") vpliva na spremembo geografskih širin  $0,5''$ , kar povzroča maksimalen vpliv na težnost  $82 \mu\text{Gal}$  na geogr. širini  $\phi = 45^\circ$ .

# Spremembe težnosti zaradi razmestitve mas v notranjosti Zemlje

---

- ✘ Razmestitev Zemljinih mas:
  - + postledenodobno dvigovanje Zemljine skorje;
  - + topljenje snega na ledenikih, spremembe morske gladine, ki jih povzroča globalna otoplitev;
  - + počasno gibanje Zemljine skorje;
  - + toplotna konvekcija v plašču.

## Plimske sile in plimovanje

---

- ✘ Plimovanje je periodično odzivanje trdne zemeljske skorje, ozračja in vodovja na spremembe v težnostnem polju, ki jih povzročata privlačni sili Lune in Sonca, v zelo mali meri pa tudi najbližja planeta. Vpliva se kažeta kot plimovanje morij ("**ocean tide**") in plimovanje trdne Zemlje ("**tides of the solid Earth**"), ki so posledica elastičnosti Zemljine notranjosti.
- ✘ Plimovanje v drugih jezikih:
  - ✘ Tidal force and Tides" v angleščini.
  - ✘ "Gezeiten" - nemško, "Marées" - francosko, "Marea" - italijansko.

# Bibavica

- ✘ Na morjih se učinek plimovanje imenuje tudi bibavica. Glavna parametra bibavice sta višina  $x(t)$ , ki se je odmeri med najvišjim odmikom (plima) in najnižjim odmikom (oseka) od povprečne vrednosti morske gladine, ter periode časa  $t$ , ki je med dvema navišjima in najnižjima točkama. Matematično lahko bibavico zapišemo v obliki kosinusnega nihanja:

$$X(t) = H_x \cos(\omega_x t - g_x)$$

- + kjer so:  $X(t)$  amplituda morskega nivoja v času  $t$ ,  $H_x$  je amplituda oscilacije,  $g_x$  je faza zamika glede na izbrano začetno točko opazovanja in  $\omega_x$  je kotna hitrost (krožna frekvenca), ki je zapisana s časovno periodo  $\tau = 2\pi/\omega_x$ .
- ✘ To je zapis, ki bi ustrezal v idealnih pogojih (laboratorijskih), kjer bi bibavica bila odvisna samo od gibanja nebesnih teles. V praksi se uporablja nekoliko bolj zapleten zapis nihanja vodne gladine.

- ✘ Krožno frekvenco lahko razvijemo v Fourierjevo vrsto:

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n n_k \omega_k = \sum_{k=1}^n \frac{2\pi n_k}{\tau_k}$$

- + kjer so  $n_k$  Doodsonovi\* harmonični koeficienti razvoja,  $\omega$  krožna frekvenca z ustrežno časovno periodo  $\tau_k$  (podana v radianih na časovno enoto). Časovne periode so različna obdobja (periode) medsebojnega gibanja Zemlje, Lune in Sonca:

		perioda	frekvenca		kotna hitrost
			ciklov na sr. sončev dan	[°] na sr. sončev dan	simbol v enotah [rad]
srednji sončev dan	1,00	sr. sončev dan	1,00	15,0	$\omega_0$
srednji lunin dan	1,0351	sr. sončev dan	0,9661369	14,4921	$\omega_1$
siderski mesec	27,32158	sr. sončev dan	0,0366009	0,5490	$\omega_2$
tropsko leto	365,2422	sr. sončev dan	0,0027379	0,0411	$\omega_3$
Lunin perigej	8,8475	Julijansko leto	0,0003093	0,0046	$\omega_4$
regresija Luninih vozlov	18,61	Julijansko leto	0,0001471	0,0022	$\omega_5$
perihelij	20,940	Julijansko leto	-		$\omega_6$

- + Arthur Thomas Doodson (1890 – 1968) britanski oceanograf. Leta 1921 objavil članek "The Harmonic Development of the Tide-Generating Potential", kjer je izračunal 388 koeficientov plimskega potenciala z razvojem v harmonično vrsto.

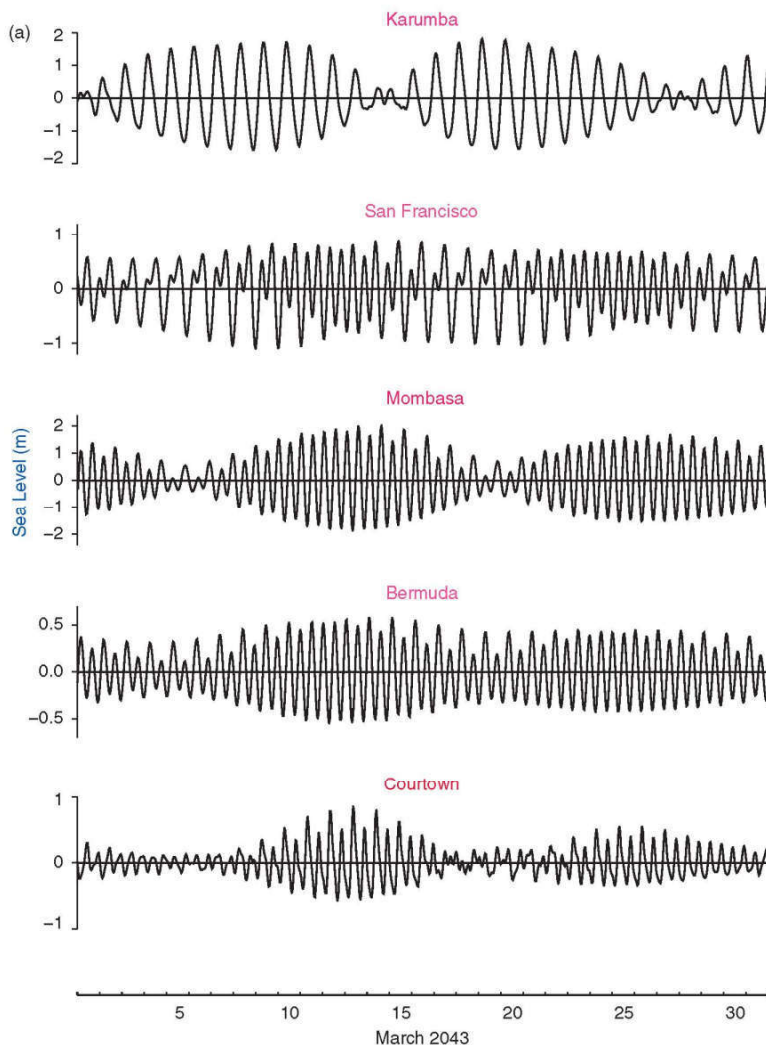
- ✘ Pri tem upoštevamo različne dneve (mesece, leta), ki jih obravnava astronomija pri kroženju Lune okoli Zemlje in njihovem hkratnem kroženju okoli Sonca.

Časovna enota		referenčna točka	perioda (sr.s.d.)
dan	siderski (zvezdni)	pomladišče	0,997270
	srednji sončev	kulminacija Sonca	
	srednji lunin	kulminacija Lune	
mesec			
	drakonski	lunin dvižni voz	27,212 220
	siderski	pomladišče	27,321 661
	anomalistični	perigej	27,554 551
	sinodski	lunine mene	29,530 587 981
leto			
	tropsko (sončevo)	letni časi	365,2422
	sidersko	fiksne zvezde	365,2564
	anomalistično	perihelij	365,2596

## Doodsonovi harmonični koeficienti

- ✘ Doodsonovi harmonični koeficienti se danes večinoma označujejo z ustrežno črko in indeksom, na primer:  $M_x$  (M za Moon) oz.  $S_x$  (S za Sun), kjer je x označuje ustrežno časovno periodo. Poglejmo par koeficientov:
  - + • koeficient  $M_2$  predstavlja učinek Lune z dvakratno poldnevno periodo (osnovna perioda srednji lunin dan, 24h 50m);
  - + • koeficient  $S_2$  povzroča Sonce z dvakratno poldnevno periodo (osnovna perioda srednji sončev dan (24h);
  - + •  $N_2$  koeficient je lunarni eliptični vpliv s poldnevno periodo (odvisen od oddaljenosti: kraj – Luna);
  - + •  $K_2$  koeficient je t.i. luni-solarni koeficient, ki ga povzročata spreminjajoča se deklinacija Sonca in Lune.
  - + ...

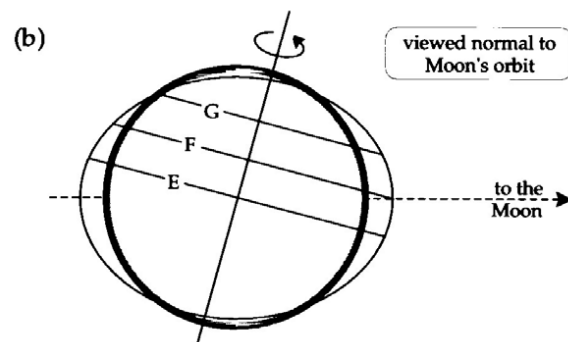
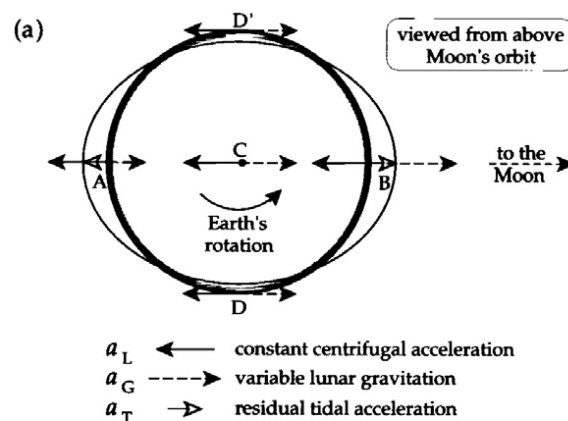
## Oblika plimovanja v različnih krajih sveta (predvideno)



M. Kuhar - Fizikalna geodezija

## Plimski učinek Lune

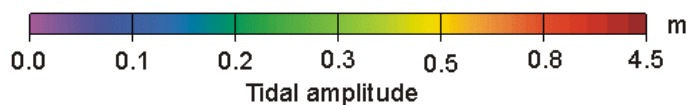
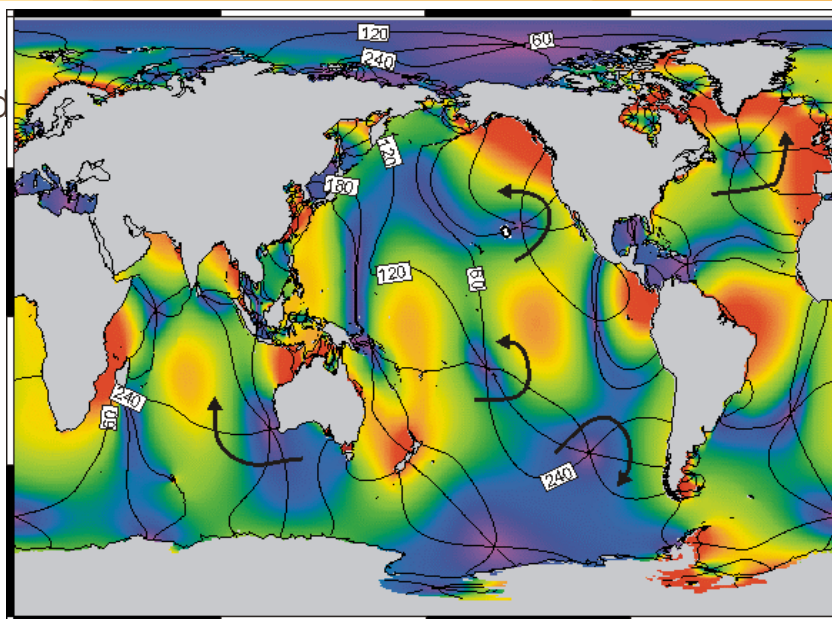
- ✘ Zaradi medsebojnega privlačnega učinkovanja rotirata Zemlja in Luna okoli skupnega težišča (baricentra).
- ✘ Rotacija Zemlje povzroča centrifugalni pospešek, ki je usmerjen proč od Lune.
- ✘ Luna učinkuje s privlačno silo na Zemljo.
- ✘ Rezultanta je plimska sila.
- ✘ Plimski učinek Sonca:  $0,46 * \text{učinek Lune}$
- ✘ Plimski učinek Venere:  $0,000054 * \text{učinek Lune}$



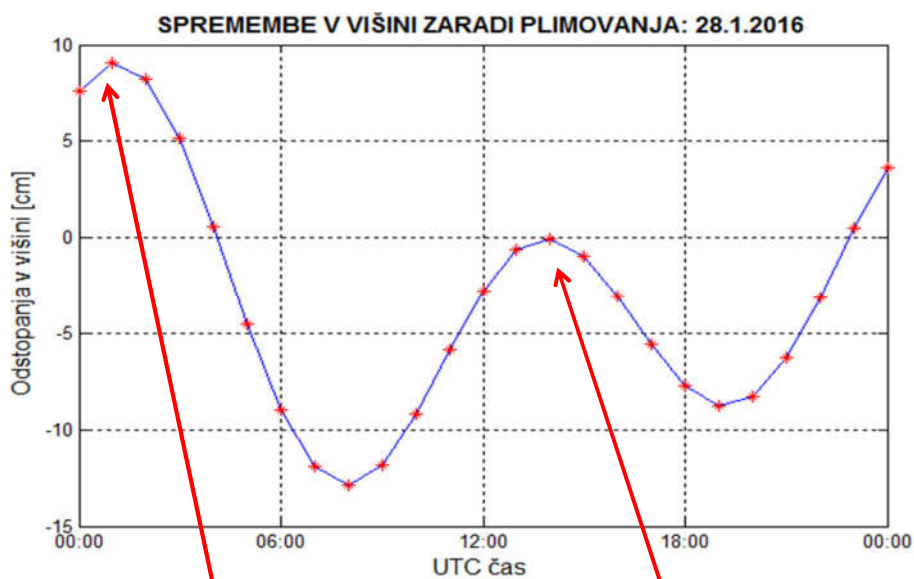
M. Kuhar - Fizikalna geodezija

# Plimovanje

- ✗ Oceanska plima ("Oceanic tides"). Amplitude dosežejejo tudi par metrov.
- ✗ Plimovanje trdne Zemlje - "Solid Earth tides". Amplitude so med 10 cm in 50 cm.
- ✗ Primer: ARSO plima!



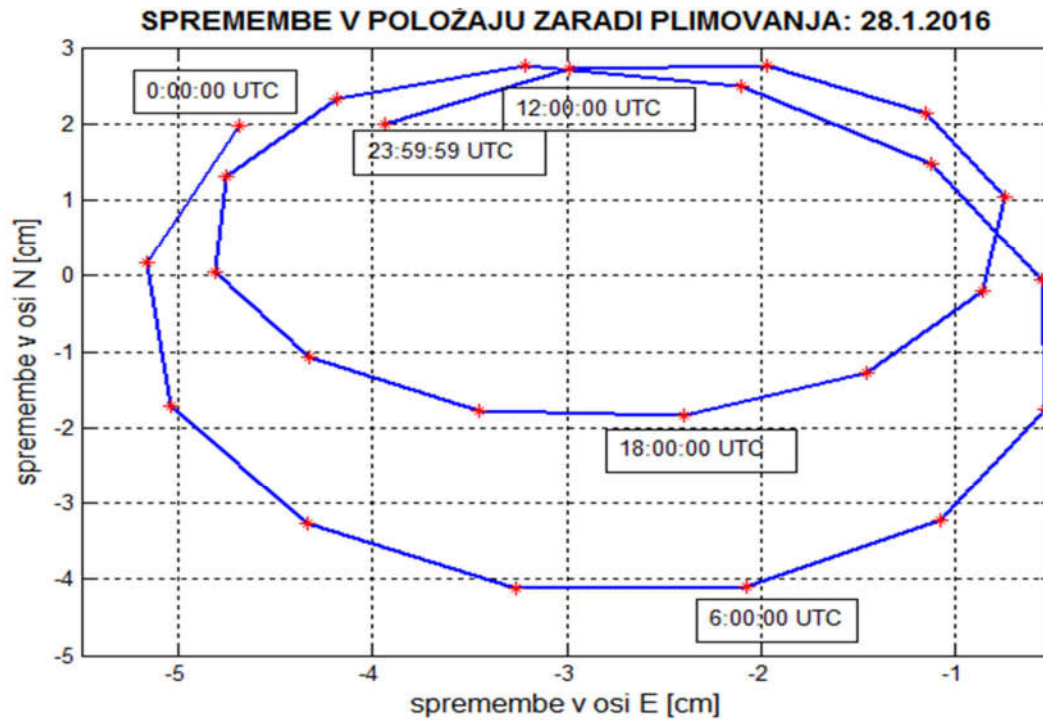
## Primer: Ljubljana, 28. 01. 2016



Luna je Zemlji najbližje

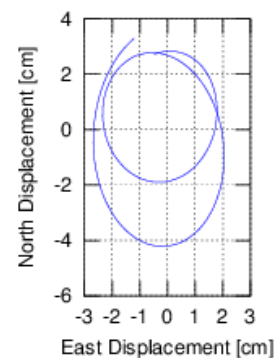
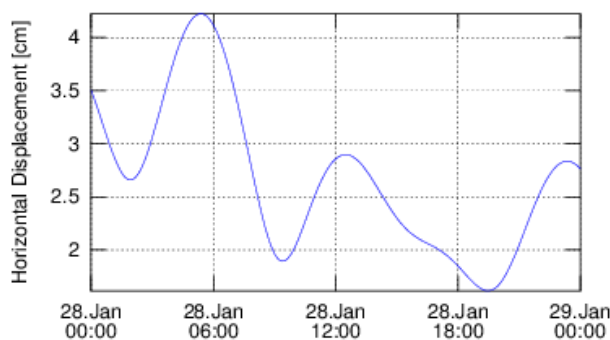
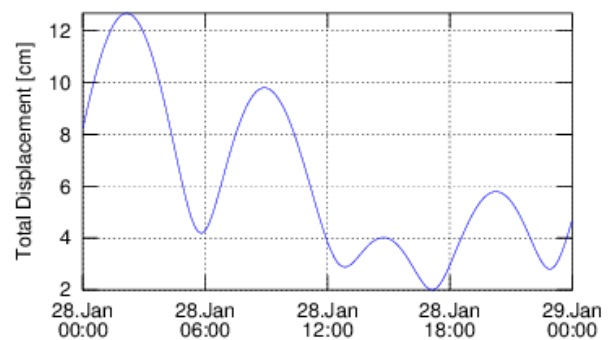
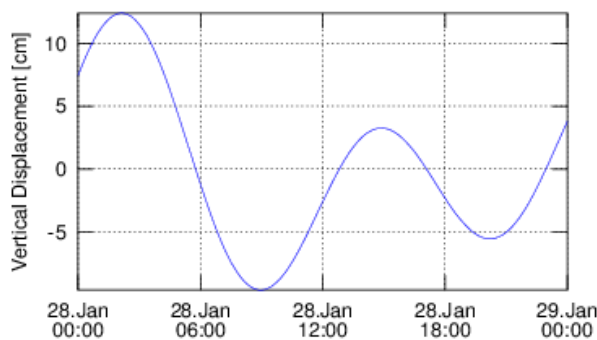
Luna je od Zemlje najbolj oddaljena

# Primer: Ljubljana, 28. 01. 2016



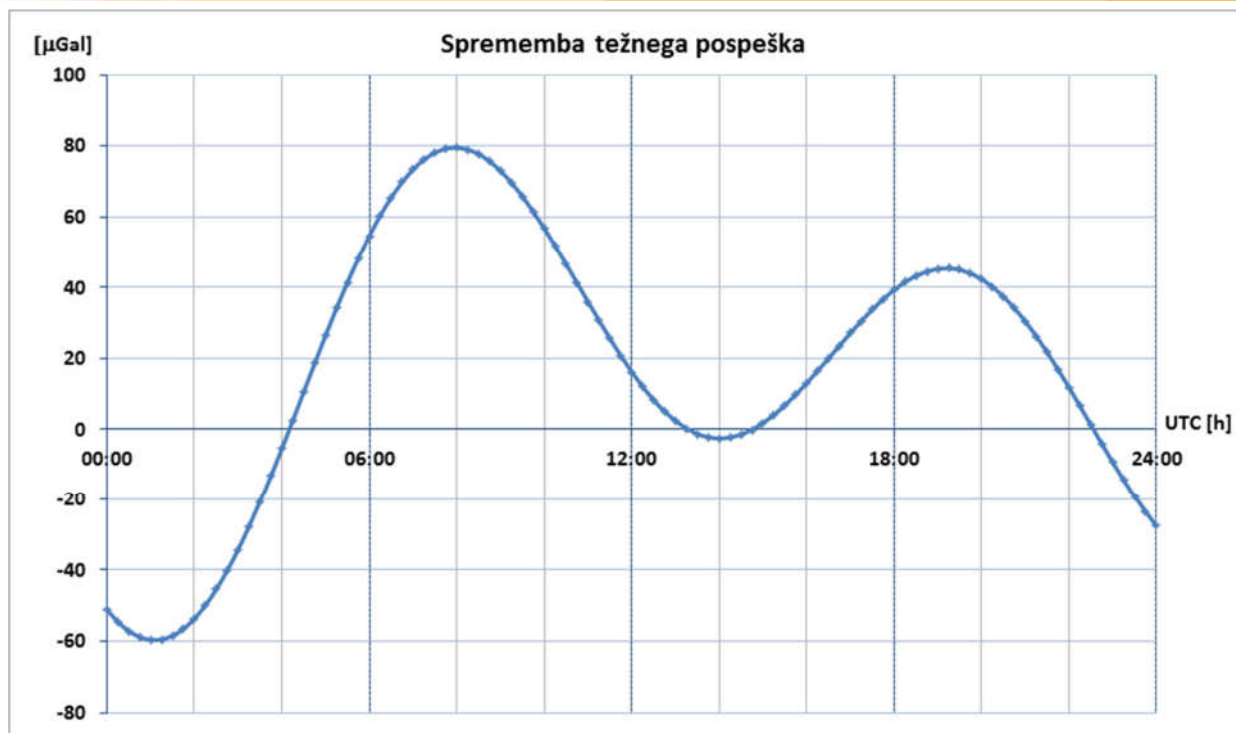
## Primer: Ljubljana, 28. 01. 2016 - vse komponente skupaj

Mean Tide for Lon=14.505° Lat=46.051°



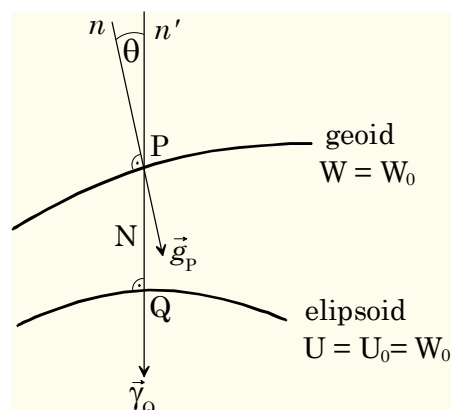
Source: CalSky.com

# Primer: Ljubljana, 28. 01. 2016 (težnost)



## Anomalijsko težnostno polje

- ✘ Razliko med težnostnim poljem Zemlje  $W$  in normalnim težnostnim poljem  $U$  imenujemo anomalija potenciala oz. **moteči potencial** (**anomalija potenciala**, "Disturbing Potential", "Störungspotential")
- ✘  $W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z)$ .
- ✘ Dejanskega in motečega potenciala ne moremo neposredno izmeriti, vendar obstaja možnost, da  $T$  izrazimo s pomočjo količin, ki jih se da določiti oz. izmeriti.



- ✘ Radalja PQ je  $N$  - geoidna višina (geoidna ondulacija, "geoidal undulation", "Geoidhöhe", "géoïde ondulation").
- ✘ Primerjajmo sedaj vektor težnega pospeška  $\mathbf{g}$  v točki P in vektor normalnega težnega pospeška  $\gamma$  v točki Q.
  - +  $\Delta\mathbf{g}$  (vektor anomalije težnosti). Velikost vektorja je anomalija težnega pospeška (anomalija težnosti, "gravity anomaly", "Schwereanomalie", "anomalie gravimétrique":  $\Delta\mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \gamma_Q$ ).
  - + razlika v smereh pa je odklon navpičnice (vertikale, "deflection of the vertical", "die Lotabweichung", "déviation de la verticale")
- ✘ Vektorja  $\mathbf{g}$  in  $\gamma$  je možno primerjati tudi v točki P na geoidu, oz. v poljubni točki  $P$  v prostoru. Ta primerjava nam poda vektor "motečega" težnega pospeška  $\delta\mathbf{g}$  ("gravity disturbance vector"):
  - ✘ 
$$\delta\mathbf{g} = \mathbf{g}_P - \gamma_P$$
  - ✘ Razlika velikosti obeh vektorjev je "moteči" težni pospešek (moteča težnost). Razlika v smeri teh dveh vektorjev je enaka kot v prejšnjem primeru, to pa je odklon navpičnice, saj smeri  $\gamma_P$  in  $\mathbf{g}_P$  tako rekoč sovpadata.

## Brunsova enačba

- ✘ Geoidna višina, anomalija težnosti in odklon navpičnice so količine, ki jih se da določiti z geodetskimi meritvami. Kakšna je njihova zveza z motečim potencialom?
- ✘ Brunsova\* enačba: 
$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_Q}$$
  - + (izpeljava)!
- ✘ Parcialna diferencialna enačba prvega reda, ki jo imenujemo **fundamentalna enačba fizikalne geodezije**:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta\mathbf{g} = 0$$

\*Ernst Heinrich Bruns (1848 - 1919), nemški matematik in astronom. Veliko je prispeval na področju teoretične geodezije, knjiga "Die Figur der Erde", 1878.

# Določanje motečega potenciala

- ✘ Določanje motečega potenciala  $T$  je neposredno povezano z reševanjem Laplaceove in Poissonove diferencialne enačbe.
- ✘ Vse te enačbe so t.i. parcialne diferencialne enačbe in njihovo reševanje predstavlja matematično reševanje tretjega robnega pogoja t.i. **geodetski robni pogoj**.
- ✘ Območje rešitev je tu sklenjena ploskev – krogla, zemlja s svojo notranjostjo in zunanji prostor okoli nje.
- ✘ Problem robnega pogoja je najti harmonično funkcijo (vsaka rešitev Laplaceove diferencialne enačbe se imenuje harmonična funkcija), kot rešitev diferencialne enačbe, ki na robu območja (Zemlja–krogla) zadošča dodatnim pogojem. Rezultat reševanja robnega pogoja je  $T$ , ki nam preko Brunsove enačbe omogoča izračunati geoidne višine  $N$ .

## Moteči potencial v obliki vrste

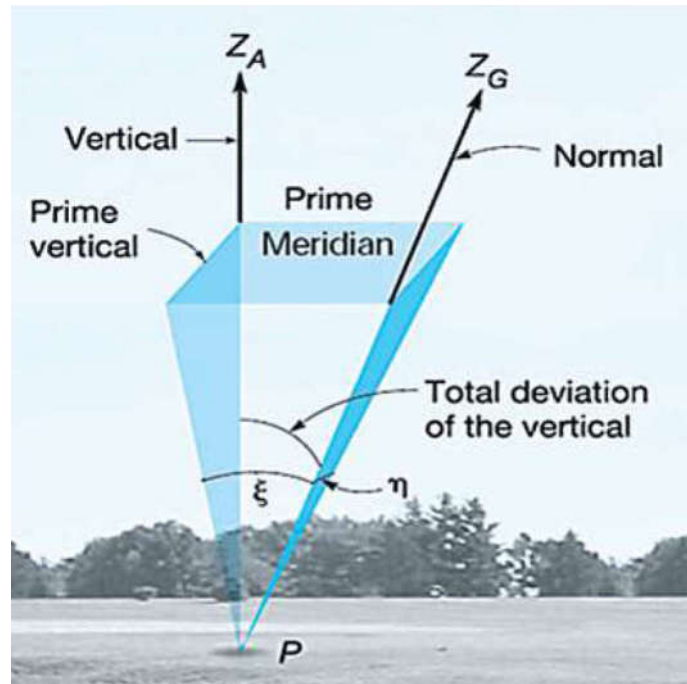
- ✘ Razvoj motečega potencial v vrsto po sfernih funkcijah:

$$T(P) = \left( \frac{GM}{a_e} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n P_{nm}(\cos \theta) (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda)$$

- ✘ kjer so, koeficienti razvoja določeni z:
- ✘  $\Delta C_{nm} = C_{nm}$  (koef. iz opazovanj) –  $C_{nm}$  (referenčni-normalno težnostno polje)
- ✘  $\Delta S_{nm} = S_{nm}$  (koef. iz opazovanj) –  $S_{nm}$  (referenčni-normalno težnostno polje)

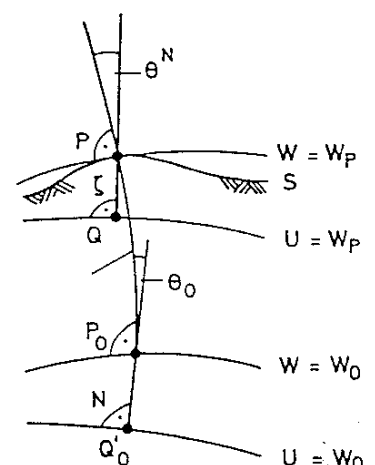
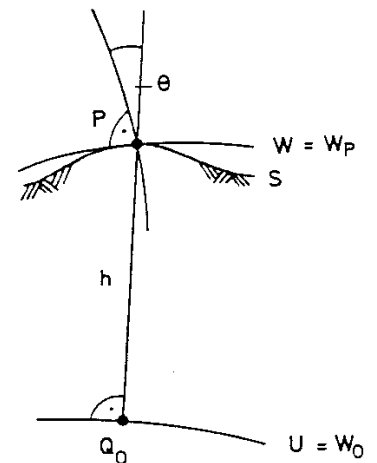
# Odklon navpičnice (1)

- ✘ Odklon navpičnice ( $\theta$ ) je prostorski kot. Razčlenimo ga lahko na dve komponenti: v smeri meridiana  $\xi$  (ksi), in v smeri prvega vertikalala  $\eta$  (eta).



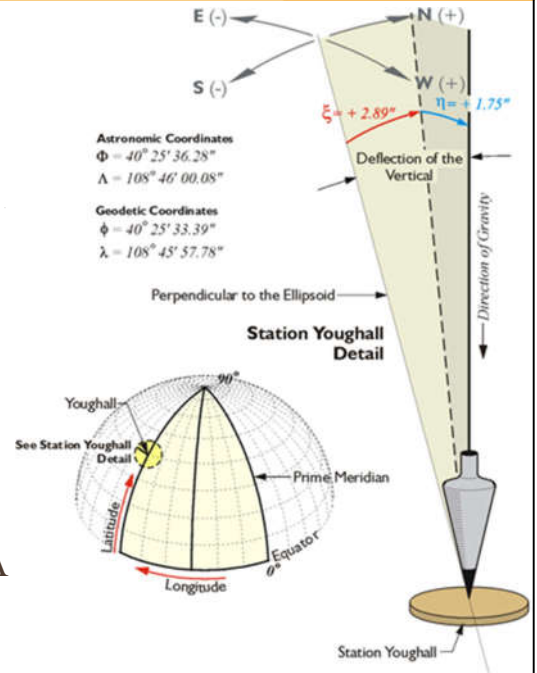
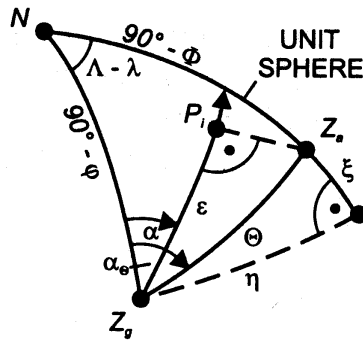
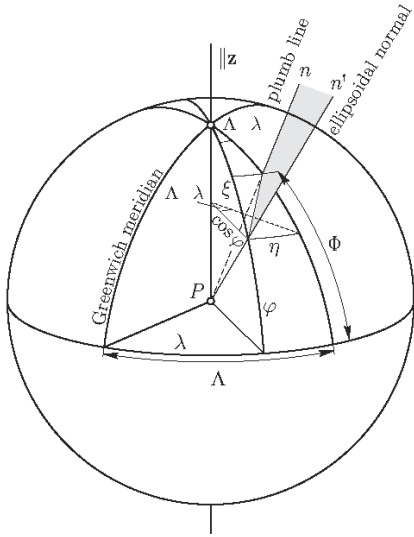
## Odklon navpičnice: Helmertov, Pizzetijev, odklon po Molodenskem

- ✘ **Helmertov** odklon navpičnice  $\Theta$ : primerjava smeri normale in smeri navpičnice na fizični površini Zemlje.
- ✘ **Pizzetijev** odklon navpičnice  $\Theta_0$ : primerjava obe smeri na samem geoidu.
- ✘ Odklon navpičnice po **Molodenskem**.<sup>\*</sup> Odklon navpičnice je kot  $\Theta^N$  na površini Zemlje med smerjo navpičnice in smerjo normale v točki P na sferopotencialni ploskvi, ki ima isti potencial  $W_P$ , kot geopotencialna ploskev skozi točko P.



<sup>\*</sup>Mihail Sergejevič Molodenski [Михаил Сергеевич Молоденский] (1909-1991), ruski (sovjetski) geofizik.

# Odklon navpičnice (3)



normala na geoid  $n \rightarrow$  astronomske koord.  $\Phi, \Lambda$   
 normala na elipsoid  $n' \rightarrow$  geodetske koord.  $\phi, \lambda$

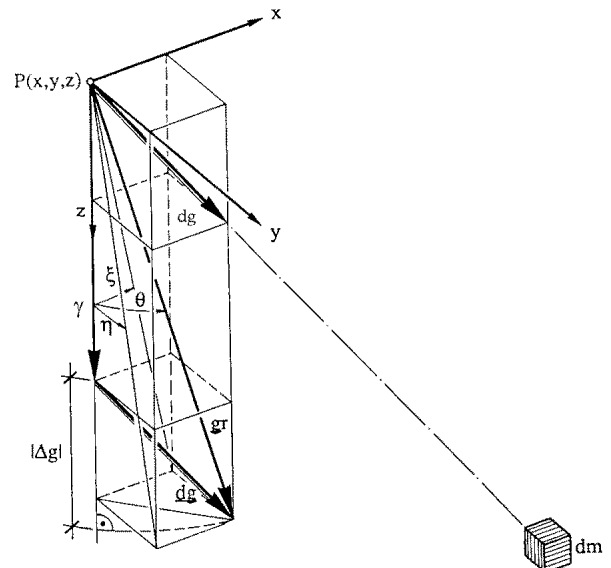
$$\xi = \Phi - \phi$$

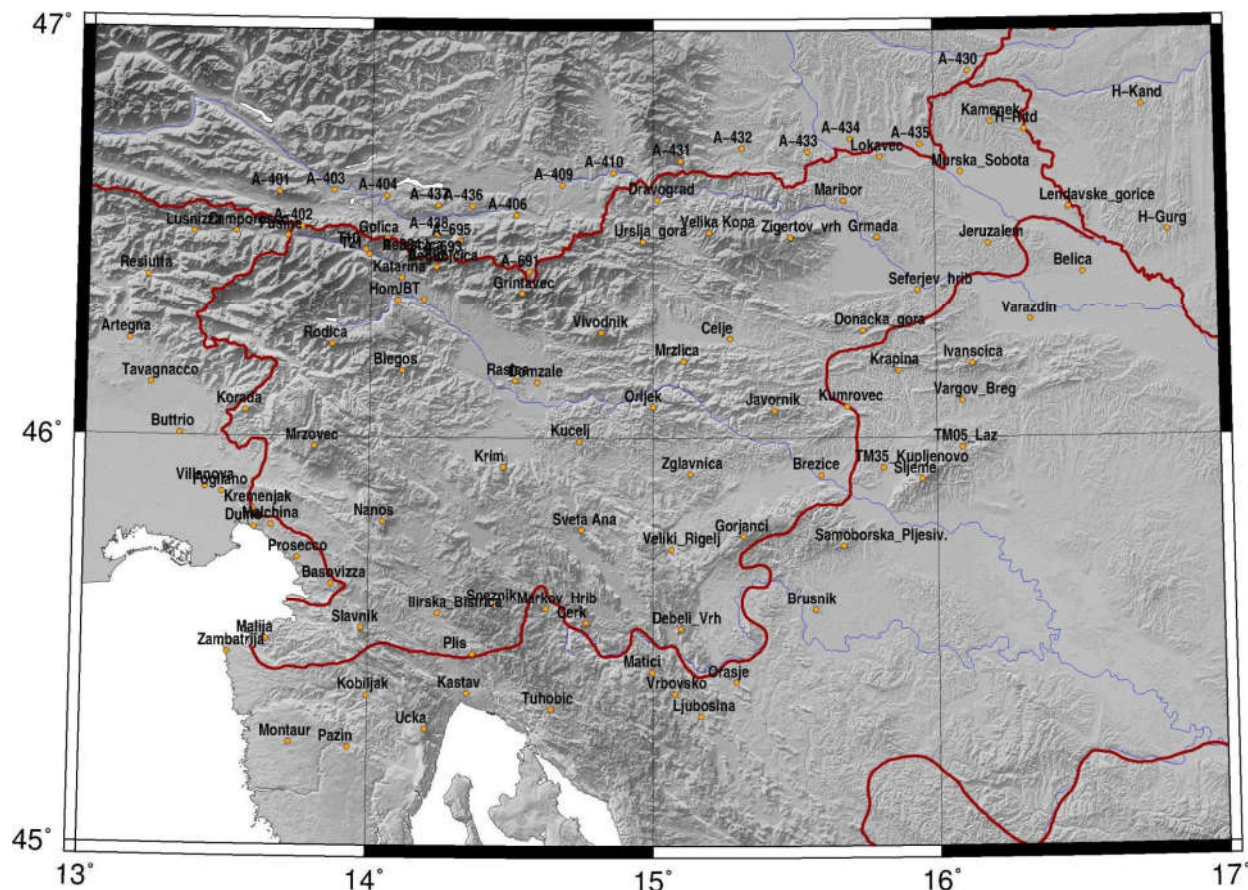
$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi$$

Komponenta  $\varepsilon$  v smeri azimuta  $\alpha$ :  
 $\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$

# Odklon navpičnice (4)

- ✘ Glede na izbiro elipsoida, na katerega se nanašajo geodetske koordinate, ločimo **absolutne** in **relativne** odklone navpičnice.
- ✘ Računsko določeni odkloni navpičnice  $\rightarrow$  **topoizostatski** odkloni.
- ✘ Sestavljeni iz:
  - + topografskih odklonov (rezultat privlačne sile okoliških mas);
  - + izostatskih odklonov (računajo se na podlagi ustrezne teorije **izostazije**).





Ime točke	F1 ["]	Lambda ["]	ξ ["]	η ["]	Ime točke	F1 ["]	Lambda ["]	ξ ["]	η ["]
Pazin	45,240558	13,934394	-3,43	-1,27	Golica	46,491456	14,054631	2,76	4,39
Montaur	45,250642	13,727100	-3,94	-7,03	Žig. Vrh	46,494458	15,487092	-1,23	7,53
Učka	45,284939	14,201958	-11,32	1,13	Grmada	46,495194	15,795053	-2,37	3,60
Tuhobič	45,334275	14,641725	-11,73	-6,93	Vel. Kopa	46,506678	15,198061	-3,32	-1,56
Kastav	45,373494	14,347419	-15,59	-0,32	Lend. gorice	46,565889	16,476914	0,30	1,66
Orašje	45,400819	15,290983	-0,91	0,44	Lokavec	46,691417	15,806931	-0,39	5,35
Matići	45,425025	14,995892	1,26	1,46	Kamenek	46,775208	16,202922	-3,24	4,76
Pliš	45,469336	14,365686	-11,70	-5,12	Dravograd	46,586308	15,013806	-5,93	-0,01
Zambatrija	45,470150	13,509186	-0,28	-5,06	Celje	46,243158	15,271231	-0,97	2,42
Malija	45,503792	13,643306	1,10	-6,46	Domžale	46,135658	14,589611	-3,30	-0,22
Debeli Vrh	45,531194	15,097744	-4,13	2,17	Mur. Sobota	46,653631	16,093297	-2,05	5,71
Slavnik	45,533900	13,975933	-1,11	-6,30	Maribor	46,583908	15,675031	-2,38	7,32
Cerk	45,546356	14,764331	-5,04	3,72	Il. Bistrica	45,569806	14,243658	-6,75	-9,01
Brusnik	45,578578	15,570231	-0,82	5,19	Kupljenovo	45,926533	15,811836	-1,23	1,17
Snežnik	45,588481	14,447600	-1,43	-1,08	Laz	45,975939	16,090575	0,51	3,02
Vel. Rigelj	45,727558	15,062936	5,39	3,37	Markov Hrib	45,581010	14,623862	-4,54	2,21
Samob. Plj	45,737189	15,668081	-7,78	6,30	Ljubošina	45,317442	15,167967	-1,51	4,44
Gorjanci	45,759769	15,318183	0,85	-2,71	Vrbovsko	45,372467	15,076000	-1,08	3,72
Sv. Ana	45,775597	14,747653	1,93	3,38	Kobiljak	45,367431	13,998547	-5,62	-4,17
Nanos	45,795136	14,049139	-5,07	-8,40	401	46,603689	13,670381	-5,78	-0,32
Kremenjak	45,823372	13,592431	-7,64	-8,12	402	46,519300	13,752169	6,46	1,10
Sljeme	45,899489	15,947992	-0,07	-2,82	403	46,607509	13,864950	-5,61	3,95
Brežnica	45,908889	15,591000	4,01	0,72	404	46,595000	14,051231	-3,36	2,41
Zglavnica	45,911231	15,129861	-0,16	0,58	406	46,548519	14,513369	8,59	2,66
Krim	45,928528	14,471100	5,18	3,75	409	46,622719	14,676939	-2,20	1,02
Mrzovec	45,978111	13,805681	-10,00	-9,44	410	46,652819	14,857311	-0,01	0,09
Kucej	45,991953	14,738801	-0,93	-1,77	430	46,899631	16,122331	2,16	4,44
Korada	46,064942	13,560606	-12,57	-7,34	431	46,681819	15,097181	-6,73	8,67
Javornik	46,067733	15,428364	-3,20	2,44	432	46,712231	15,316250	-0,83	4,55
Orljek	46,076658	15,000531	0,50	-1,02	433	46,703339	15,549419	3,84	6,82
Kumrovec	46,077183	15,685883	-0,03	4,76	434	46,734739	15,702100	-0,14	4,88
Vargov Breg	46,090050	16,091439	-3,87	1,30	435	46,720850	15,949161	-2,07	5,76
Rašica	46,139767	14,512117	-5,00	-2,01	436	46,570211	14,357809	0,55	-0,69
Krapina	46,164222	15,867267	-3,94	4,95	437	46,572311	14,234800	-1,72	2,97
Blegoš	46,164819	14,113506	-6,78	3,83	438	46,501319	14,235011	7,03	0,96
Ivanščica	46,181422	16,127222	3,23	6,01	691	46,410139	14,560169	2,24	-0,44
Mrzlica	46,187522	15,107453	0,09	1,14	695	46,486819	14,314700	8,05	0,28
Rodica	46,227711	13,865244	-16,90	-1,45	RITD	46,755844	16,323525	-2,00	5,27
Vivodnik	46,257419	14,816283	-4,79	2,73	CSOK	47,003209	16,298131	2,37	-4,19
Don. gora	46,262711	15,742333	-2,02	0,51	GSZT	47,041185	16,811600	0,03	-1,17
Varaždin	46,288911	16,335564	2,96	3,95	GURG	46,506897	16,827309	1,21	-1,81
Hom	46,339914	14,093772	4,60	7,43	KAND	46,812811	16,741754	0,34	-2,70
JBT	46,340881	14,107372	-4,83	3,03					
Grintavec	46,357103	14,535414	-6,93	-5,57					
Šeferjev hrib	46,365658	15,937003	3,73	2,24					
Katarina	46,394236	14,107564	-8,39	4,95					
Belica	46,406756	16,522183	6,22	2,56					
Begunščica	46,421672	14,229892	-9,51	0,93					
Beleščica	46,448269	14,140278	-2,78	-0,63					
T21	46,451739	13,991456	-2,77	4,87					
Jeruzalem	46,479008	16,189783	2,42	2,76					
TM05	46,485064	14,963981	0,67	5,76					

# Računanje topografskih odklonov navpičnice in anomalij težnosti

- ✘ V neki točki na površju Zemlje lahko izmerjeni vektor sile teže ( $g_r$ ) predstavimo kot rezultanto vektorske vsote normalne sile teže in moteče sile teže ( $dg$ ):

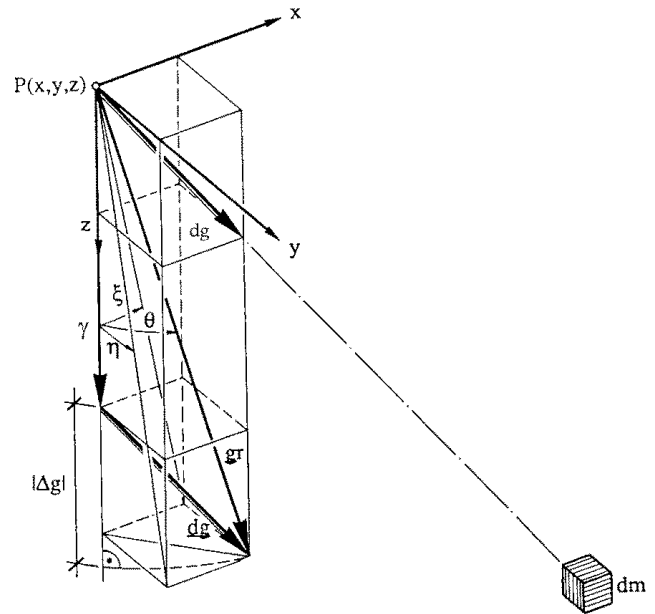
- ✘ 
$$g_r = \gamma + dg.$$

- ✘ 
$$T(x,y,z) = V(x,y,z) - U(x,y,z)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = F_x \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_y$$

- ✘ Iz horizontalnih komponent (parcialnih odvodov po  $x$  in po  $y$ ) sledita komponenti odklona navpičnice:

$$\xi'' = -\rho'' \frac{F_x}{\gamma_{pov}} \quad \eta'' = -\rho'' \frac{F_y}{\gamma_{pov}}$$



## Anomalije težnosti

- ✘ Razlika velikosti vektorja dejanske težnosti in vektorja normalne težnosti:  $\Delta g = g_P - \gamma_Q$ .
- ✘ Vrednosti težnega pospeška oz. njihovih razlik merimo na fizični površini Zemlje, na različnih nadmorskih višinah in na različnih geografskih širinah. Na ta način, merjene vrednosti težnosti niso medsebojno neposredno primerljive.
- ✘ Prostorske spremembe težnega pospeška uporabljata pri svojih raziskavah:
  - + geodezija: določitev oblike Zemlje;
  - + geofizika: določitev sprememb gostote v skorji in zgornjem plašču (t.i. **prečni kontrast gostote**), z namenom pridobitve podatkov o geologiji podzemnih plasti.
- ✘ Redukcija merjenih vrednosti težnosti pomeni preračun merjenih vrednosti na eno skupno raven, kjer lahko medsebojno primerjamo vse vrednosti.

# Popravki - redukcije merjenih vrednosti težnega pospeška

- ✘ Prostorski popravki:
  - + izostatski,
  - + neizostatski.
- ✘ Neizostatski:
  - + popravek prostega zraka (višinski popravek)  $\delta g_{FA}$ ;
  - + Bouguerov popravek  $\delta g_B$ ;
  - + topografski popravek  $\delta g_T$ ;
  - + popravek Poincarre – Praya;
  - + Helmertov kondenzacijski popravek;
  - + Rudzkijev inverzni popravek.

- ✘ Popravek prostega zraka: (višinski popravek)

$$\delta g_{FA} = 0,3086 H_{(m)} \text{ mGal}$$

- ✘ Popravek za Bouguerovo ploščo:

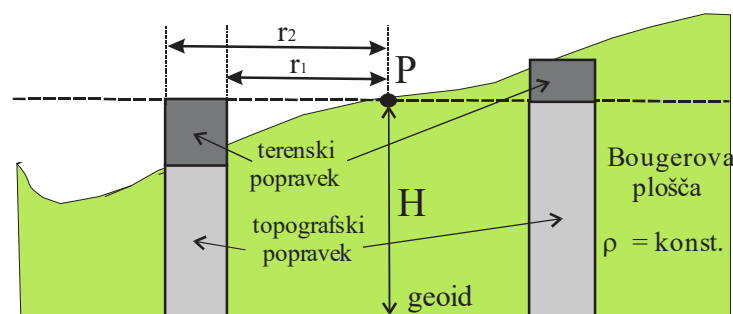
$$\delta g_B = 2\pi G\rho H_P = 0,04191\rho H_{P(m)} \text{ mGal.}$$

- ✘ Anomalija prostega zraka "free air anomaly", "Freiluft Anomalie"):

$$\Delta g_{FA} = g_{mer} + \delta g_{FA} - \gamma$$

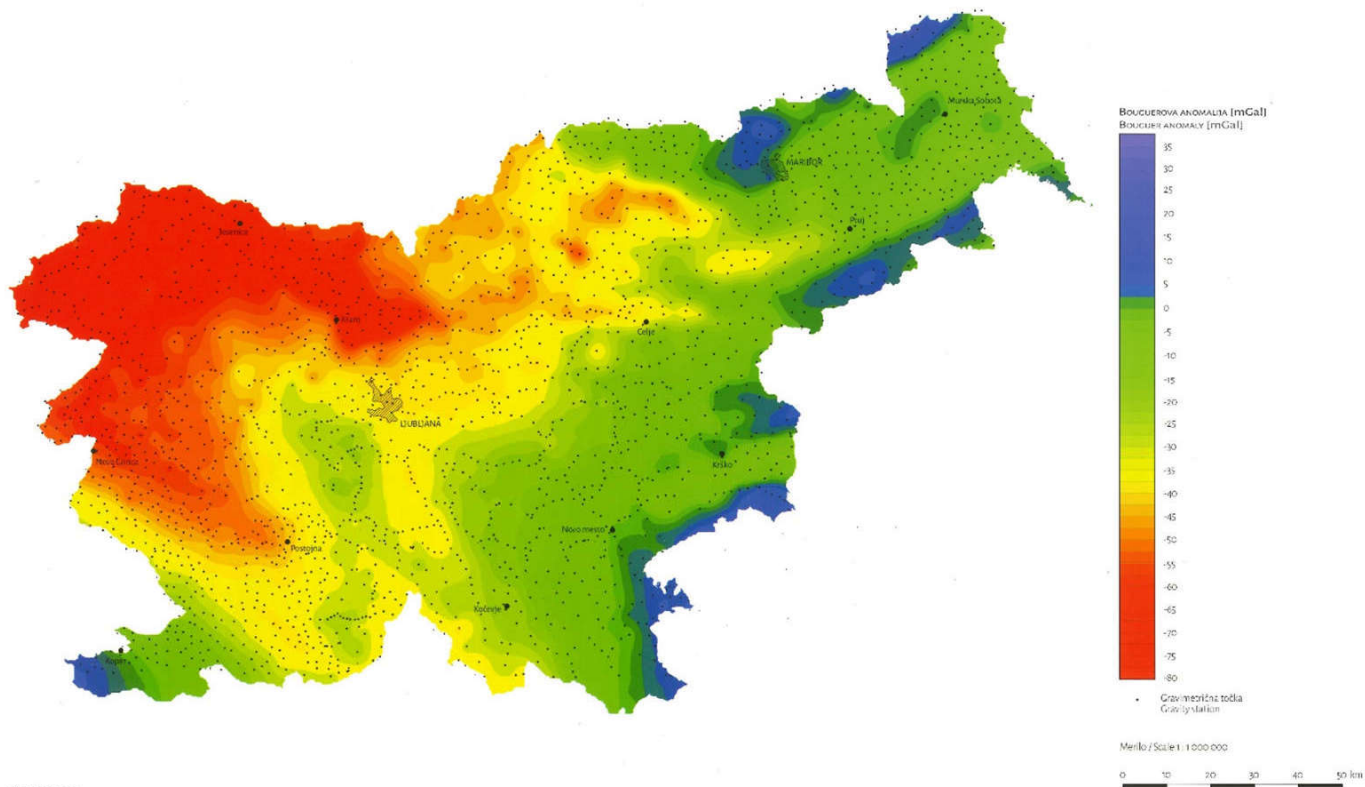
- ✘ Bouguerova anomalija:

$$\Delta g_B = g_{mer} + \delta g_{FA} - \delta g_B + \delta g_T - \gamma$$



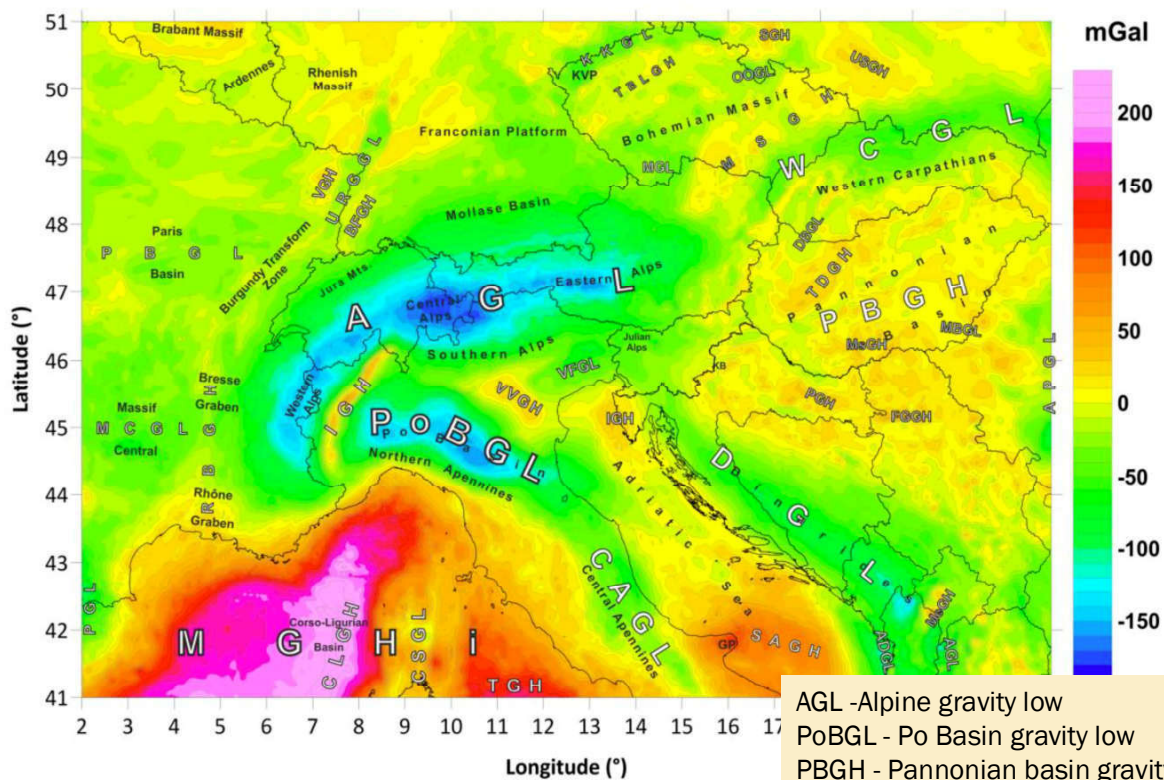
W=W<sub>0</sub>

KARTA BOUGUEROVIH ANOMALIJ  
BOUGUER ANOMALY MAP



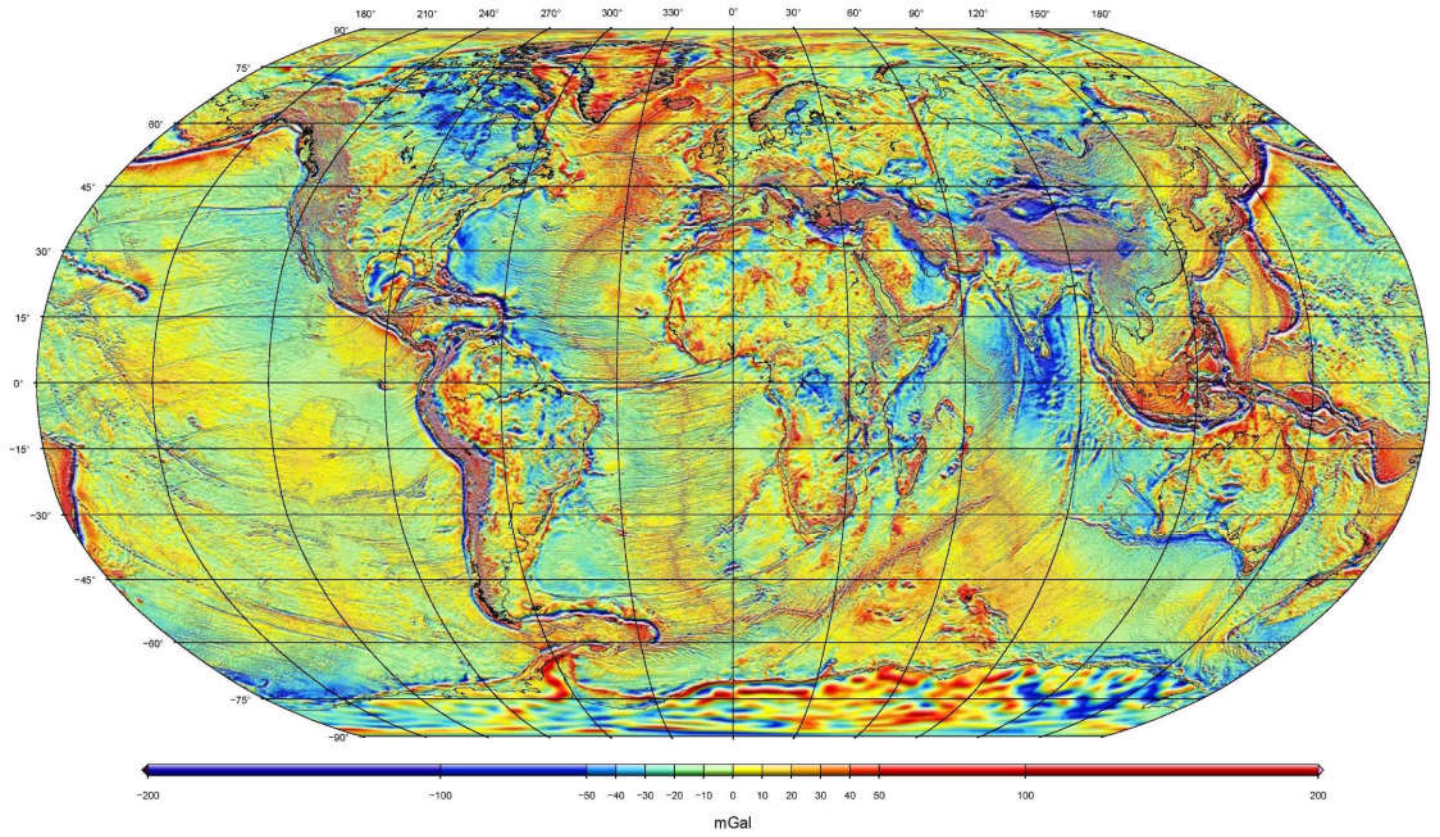
Vir / Reference:  
Čišelj, B.  
1957: Regionalna gravimetrična karta Slovenije  
Geološki zavod Ljubljana (sedaj: Geoteknični d.o.o. Ljubljana).  
Digitalizacija: Sušvar, R. 1996-2000.

## Karta Bouguerovih anomalij (širše območje Alp)

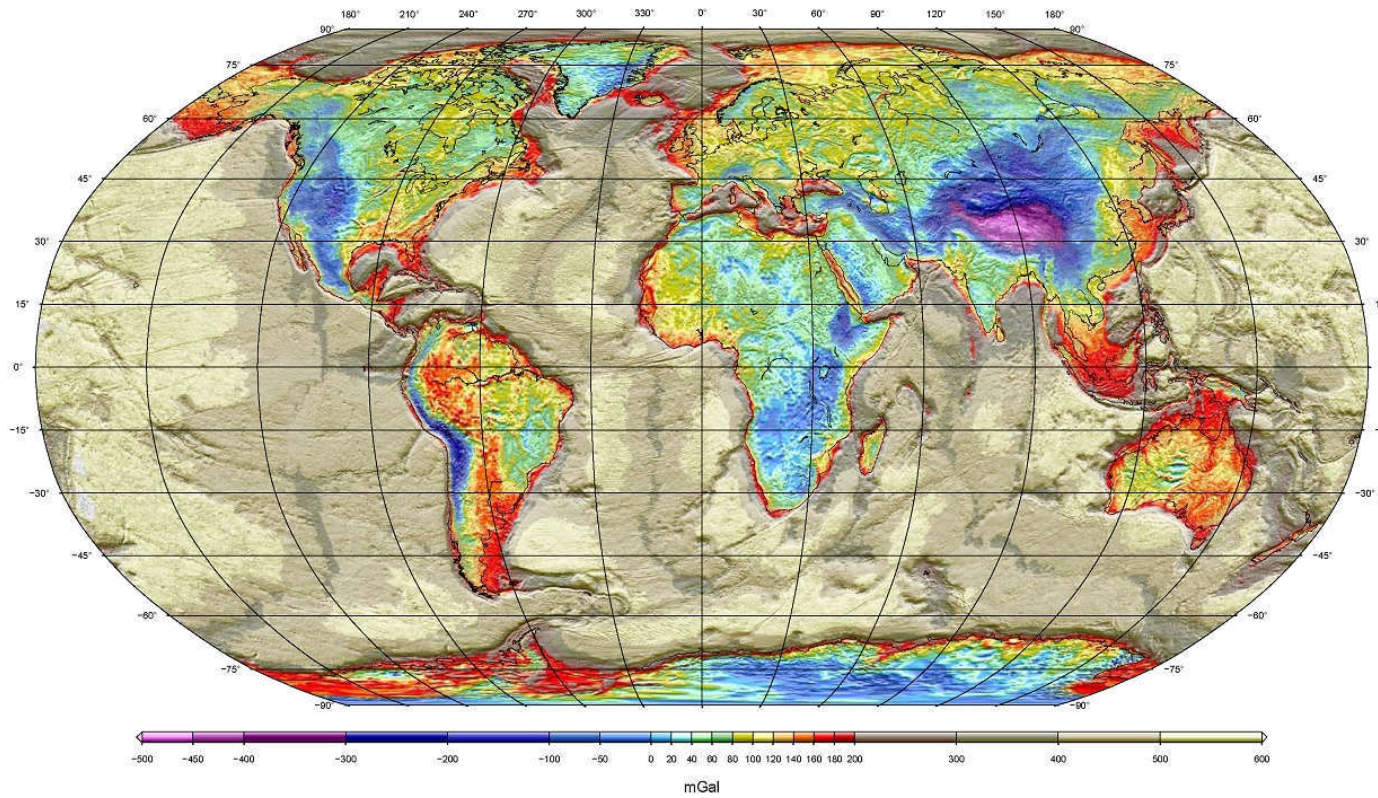


- AGL - Alpine gravity low
- PoBGL - Po Basin gravity low
- PBGH - Pannonian basin gravity high
- CAGL - the Central Apenine gravity low
- MGHi - Mediterranean gravity high
- DGL - Dinaric gravity low
- WCGL - West Carpathian gravity low

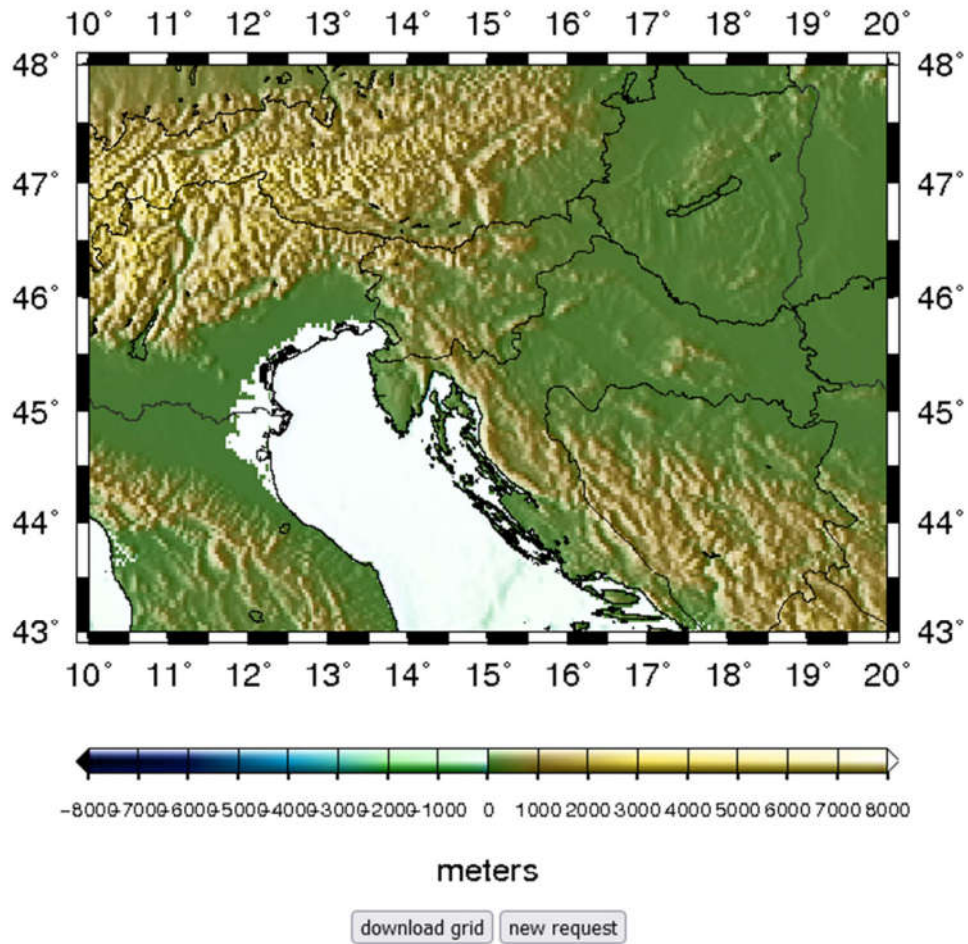
### Surface Free-Air Anomaly



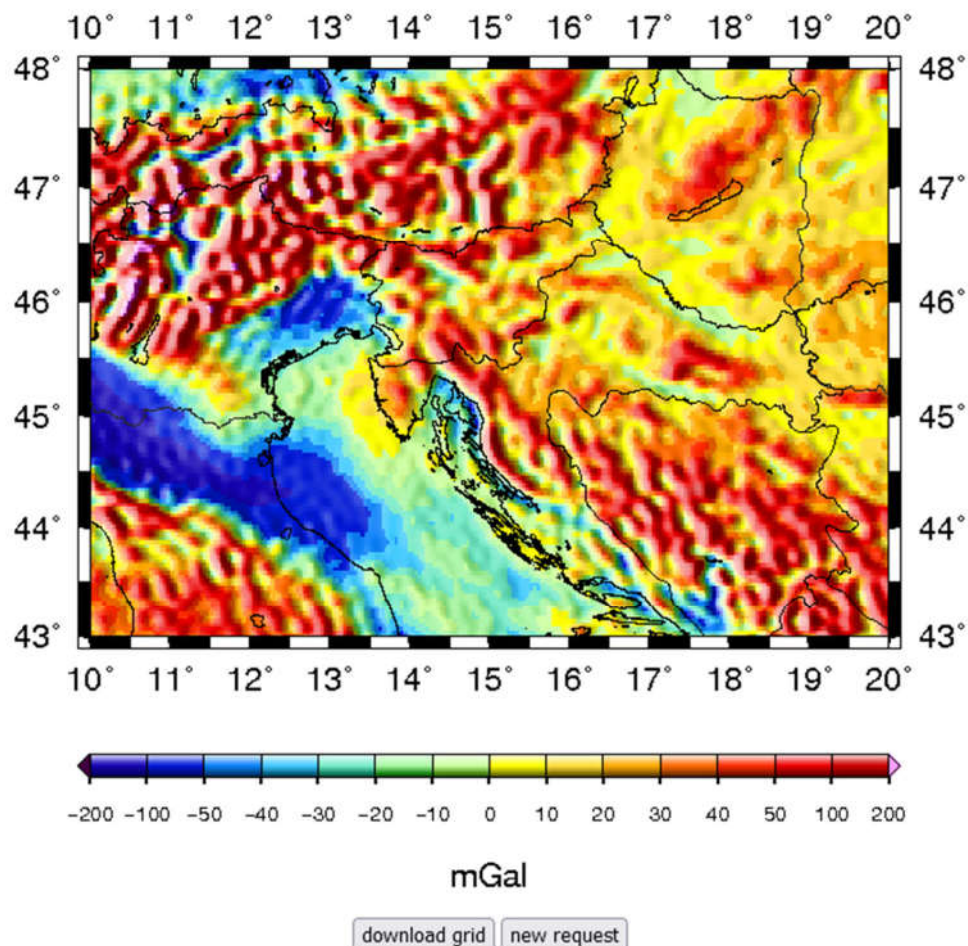
### Complete Bouguer Anomaly



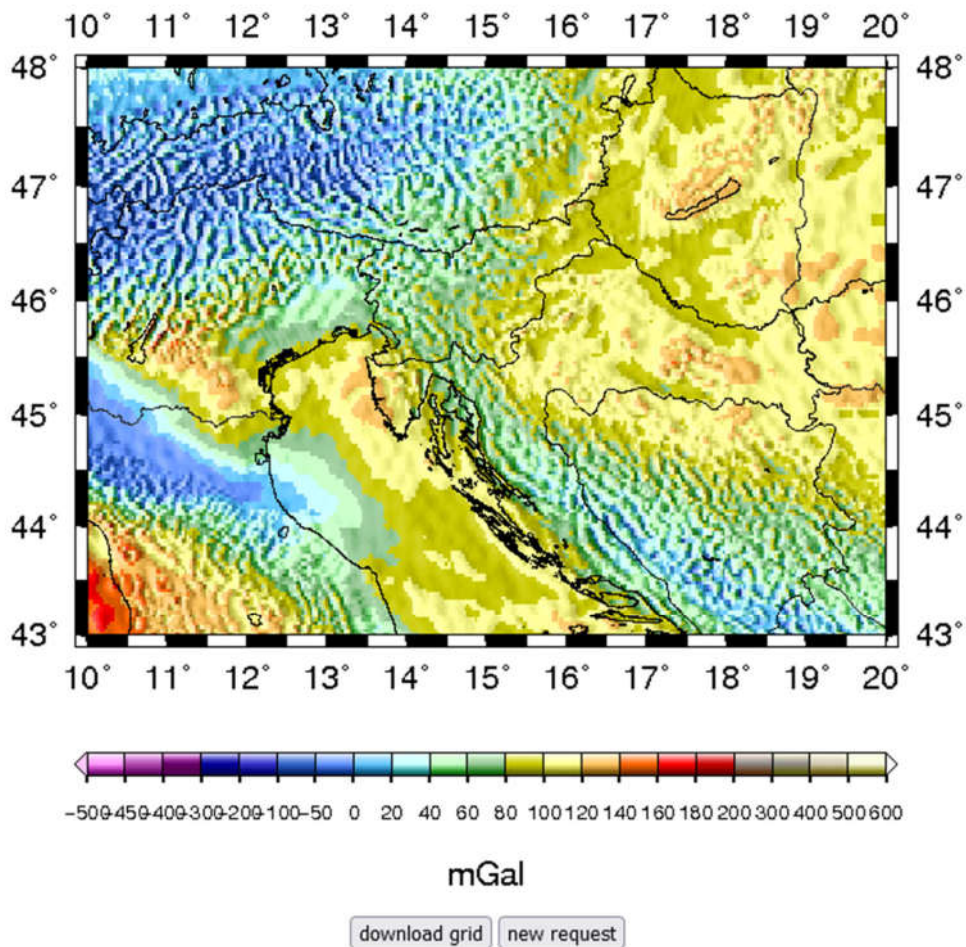
### ETOPO1 topography



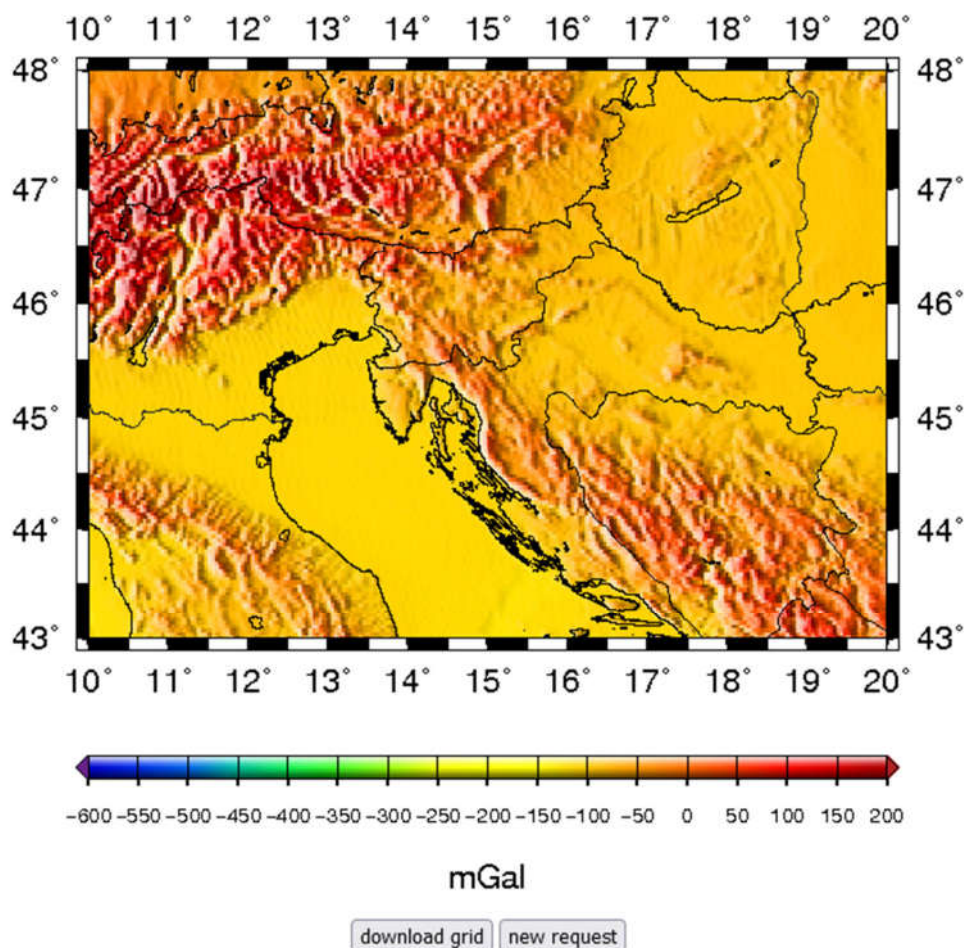
### WGM2012 - Surface Free Air Anomaly (mGal)



### WGM2012 - Complete Spherical Bouguer Anomaly (mGal)



### WGM2012 - gravity disturbance



# Teorija izostazije

- ✘ Domneva: topografske mase enostavno ležijo na trdni zemljini skorji?
  - + Če bi to bilo res, bi Bouguerova redukcija povsem odstranila glavne nepravilnosti težnostnega polja in bi Bouguerove anomalije postale povsem male, z blagim slučajnim nihanjem okoli ničle.
- ✘ V naravi je zadeva povsem obratna!
  - + Bouguerove anomalije so v hribovitih območjih sistematično negativne in se povečujejo v povprečju 100 mGal na vsakih 1000 m nadmorske višine.

## Teorija izostazije (2)

- ✘ Podobno velja tudi za odklone navpičnic. Že v prejšnjem stoletju so opazili, da so izračunani topografski odkloni bili večji od dejansko izmerjenih; na primer J.H. Pratt je v sredini XIX. stoletja odkril ta pojav z meritvami v Himalaji.

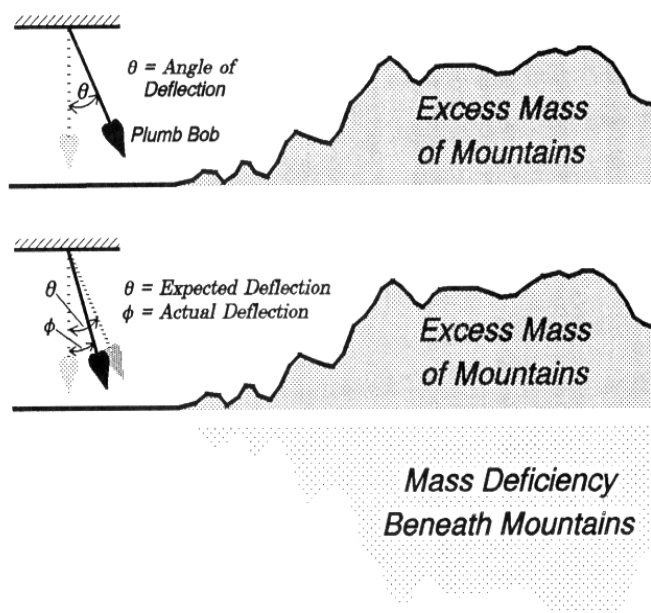


FIGURE 8.16 a) Expected deflection of a plumb bob (highly exaggerated), due to the attraction of the mass of a mountain range. b) The actual deflection for the Himalayas was less than expected, due to a deficiency of mass beneath the mountains.

# Teorija izostazije (3)

- ✗ Planet Zemlja zelo nazorno kaže na "sistem naravnega ravnovesja". Nekje v notranjosti Zemlje se nahaja ploskev ravnovesja, kjer prihaja do kompenzacije mas nad geoidom s tistimi pod njim.
- ✗ Na neki globini "D" je skupna teža mas na enoto ploščine povsod okoli Zemlje enaka. To imaginarno ploskev imenujemo "globina kompenzacije" D:

$$\int_{R-D}^{R+H} \rho dH = 0$$

kjer so  $\rho$  gostota Zem. skorje, D pa globina kompenzacije.

- ✗ Presežek mase (hribi,  $H > 0$ ) ali primanjkljaj mas (oceani,  $H < 0$ ) je vsaj delno kompenziran s primerno porazdelitvijo mas v notranjosti Zemlje.
- ✗ Pojav **izostazije** (grško "isos" - enak, "stasis" - stanje).
- ✗ <https://www.dggv.de/portfolio/2-1-isostasie/>
- ✗ [Isostasy, a basic requirement for the functioning of plate tectonics](#)

- ✗ Trije modeli (hipoteze):
  - + Pratt-Hayfordov izostatski model;
  - + Airy-Heiskanen model in
  - + Vening-Meineszov model.

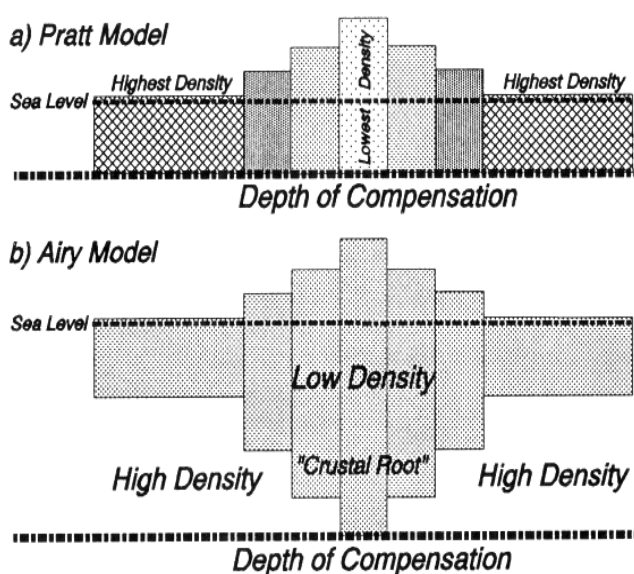


FIGURE 8.17 Pratt and Airy models of local isostatic compensation. In both models, pressure exerted by crustal columns is equal on horizontal planes at and below the depth of compensation.

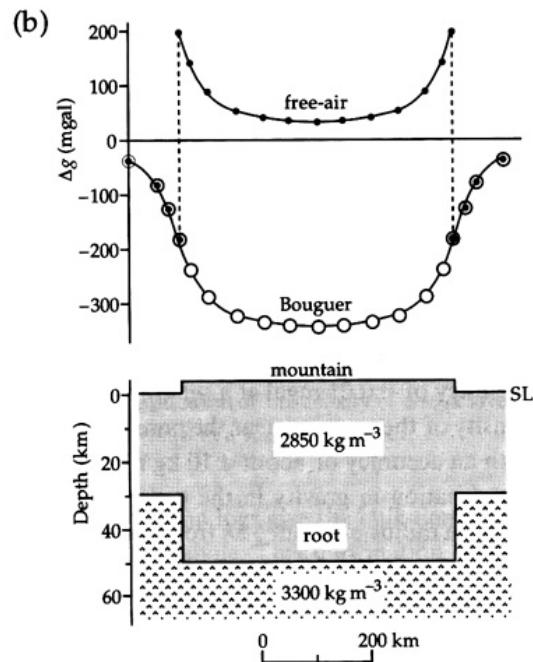
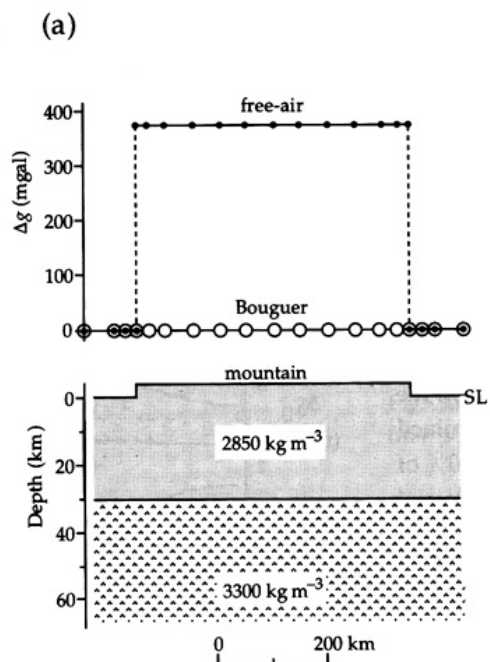
# Tvorci teorije izostazije

---

- ✘ **John Henry Pratt** (1809 - 1871) britanski duhovnik, matematik, na osnovi geod. meritev v Indiji, razvil svojo teorijo kompenzacije mas.
- ✘ **John Filmore Hayford** (1868 - 1925) ameriški geodet izračunal parametre elipsoida (1919) in podal svojo teorijo izostazije.
- ✘ **George Biddell Airy** (1801 - 1892) britanski matematik, astronom (Astronomer Royal - upravnik observatorija Greenwich).
- ✘ **Veiko Aleksanteri Heiskanen** (1895 - 1971) finski geodet, razvil svojo teorijo izostazije, izračunal globalni geoid, direktor FGI.
- ✘ **Felix Andries Vening Meinesz** (1887 - 1966) nizozemski geofizik in geodet, znan po svojih konstrukcijah posebnih podvodnih gravimetrov.

- ✘ Po Pratt modelu je ploskev kompenzacije ravna in so različne topografske višine prilagojene z prečnimi spremembami v gostoti kamnin.
- ✘ Airyjev model ne dopušča sprememb v gostoti, temveč obravnava litosfero s spremenljivo globino (debelino).
- ✘ Vening Meinesz je dopolnil model Airyja in namesto lokalne kompenzacije uvedel regionalno.
- ✘ Geofizikalni in geodetski rezultati kažejo na to, da je Zemlja približno 90% izostatsko kompenzirana,

# Kompensacija?



- ✘ Velike pozitivne FA-anomalije s hkratnimi malimi Bouguerovimi anomalijami kažejo na to, da so mase v notranjosti podprte z litosfero.
- ✘ Male FA-anomalije s hkrati velikimi negativnimi Bouguerovimi anomalijami kažejo na prisotnost kompensacije.

Isostatic Anomaly (Airy-Heiskanen)

