Podobnostna transformacija

To je t.io. izogonalna afina transformacija. Afina transformacija transformira ravne linije v ravne linije in ohranja vzporednost. Afina transformacija je največkrat sestavljena iz rotacije, translacije, spremembe merila in striga. V splošnem pa se spremeni velikost, oblika, položaj in orientacija linij v koordinatnem sistemu. Merilo je odvisno samo od orientacije linije v koordinatnem sistemu, kar pomeni, da so dolžine linij v določeni smeri pomnožene z nekim skalarjem.

Podobnostna transformacija je tista, pri kateri je sprememba merila enaka v vseh smereh. Izogonalna transformacija pomeni da se ohranja velikost kotov, zato jo imenujemo podobnostna (konformna). Koordinatne osi ostajata pravokotni → pogoj ortogonalnosti. Merilo ostaja enako v vseh smereh → pogoj enotnega merila (spremembe merila). Dolžine linij in položaji točk v mreži se lahko spremenijo.

Podobnostna transformacija v ravnini

Podobnostna transformacija v ravnini je določena s štirimi transformacijskimi parametri:

- dve translaciji koordinatnega izhodišča (c, d),
- kot zasuka koordinatnih osi (θ),
- enotna sprememba merila (m).

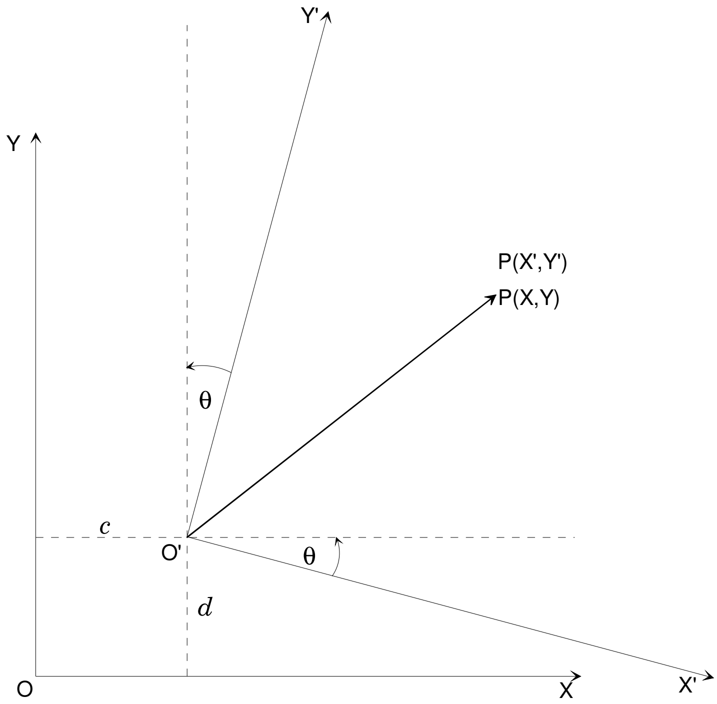
Kot zasuka je dogovorno privzet pozitiven v levosučni smeri.

Uporaba:

- transformacija koordinat iz lokalnega koordinatnega sistema v nadrejeni (državni) koord. sistem;
- transformacija koordinat iz koordinatnega sistema karte v državni koord. sistem;

- določitev koordinat "prostega stojišča" in določitev koordinat določenih s polarno metodo izmere (enak princip).

Transformacijske parametre izračunamo na osnovi skupnih točk. To so točke, imajo znane koordinate v obeh koordinatnih sistemih. Te točke imenujemo tudi identične* točke. Tako določene transformacijske parametre nato uporabimo za transformacijo novih točk v končni koordinatni sistem.



podobnostna tansformacija v ravnini

Transformacija je določena z enačbami:

$$x = \ \ mx'\cos\theta + my'\sin\theta + c$$
$$y = -mx'\sin\theta + my'\cos\theta + d$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Zgornja oblika transformacije je geometrijska, pri čemer sistem žal ni linearen. Z uvedbo okrajšav:

$$a = m\cos\theta$$
$$b = m\sin\theta$$

---

* V programu SITRA se identične točke imenujejo "vezne" točke.

dobijo enačbe za transformacijo linearno obliko:

$$\begin{aligned} x &= ax'+by'+c \\ y &= -bx'+ay'+d \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Enačbe lahko pišemo tudi v obliki (lažje za reševanje sistema linearnih enačb):

$$\begin{aligned} x &= ax'+by'+c \\ y &= ay'-bx'+d \end{aligned}$$

Ko rešimo neznana parametra *a* in *b*, izračunamo merilo in rotacijo:

$$m = \sqrt{a^2+b^2} \qquad\qquad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Za izračun štirih transformacijskih parametrov je potrebno imeti dve skupni točki (štiri enačbe s štirimi neznakami).

Primer: dano P_1 (x_1,y_1), P_1 (x'_1,y'_1), $P_2(x_2,y_2)$, P_2 (x'_2,y'_2)

Neznano: c, d, θ, m;

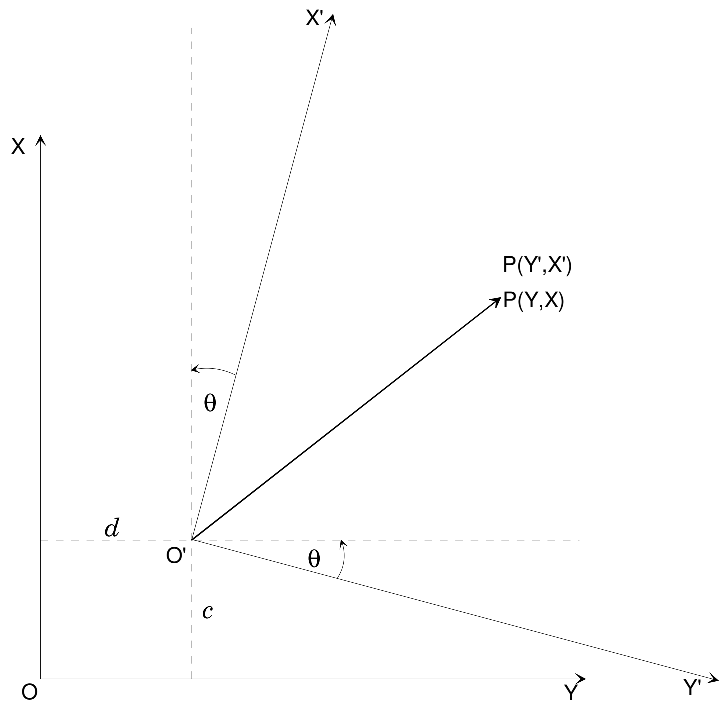
Sistem enačb ima obliko:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & -x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & -x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b}$$

Sistem linearnih enačb rešimo: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Geodetski koordinatni sistem XY (usmerjenost koord. osi)



$$
\begin{aligned}
x &= mx'\cos\theta - my'\sin\theta + c \\
y &= mx'\sin\theta + my'\cos\theta + d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}
$$

oz. v linearni obliki:

$$
\begin{aligned}
x &= ax' - by' + c \\
y &= bx' + ay' + d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= ax' - by' + c \\
y &= ay' + bx' + d
\end{aligned}
$$

Sistem enačb za dve skupni točki:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & -y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & -y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}
$$

$$
Au = b
$$

Podobnostna transformacija z večjim številom skupnih točk - Helmertova transformacija

V primeru, da obstaja več skupnih (identičnih) točk imamo predoločeno rešitev. Tudi v tem primeru lahko napišemo enačbe tarnsformacije kot sistem linearnih enačb **Au** = **b**, vendar je sistem protisloven. Ne obstaja podobnostna tansformacija, ki bi v primeru večjega števila skupnih točk k ($k \geq 2$), te ekzaktno transformirala. Za vsako izbiro transformacijskih parametrov (a, b, c, d) lahko nastopi primer:

$$\mathbf{Au} \neq \mathbf{b} \qquad \mathbf{A}(i,j)\ (i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...n \qquad m \geq n)$$

V tem primeru optimalne transformacijske parametre določamo v postopku izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Govorimo o izravnavi transformacije. V primeru izravnave transformacije obravnavamo koordinate točk kot opazovanja (običajno koordinate točk v končnem koordinatnem sistemu).

Določitev transformacijskih parametrov z izravnavo transformacije omogoča kontrolo in oceno pogreškov. Popravki (odstopanja) na skupnih točkah bi naj bili znotraj naprej sprejetih mej. Če so ta večja od sprejetih (dopustnih) mej na posameznih točkah, jih lahko odstranimo iz seznama skupnih točk in jih obravnavamo kot nove točke.

Do rešitve lahko pridemo na dva načina. S klasičnim postopkom izravnave, prek tvorjenja matrike normalnih enačb itd, ali neposredno prek obrazcev, kot jih je predlagal že Helmert*. Dejansko gre pri Helmertovi rešitvi za enak postopek izravnave, vendar tukaj tvorimo samo posamezne člene matrike normalnih enačb in do parametrov pridemo s pomočjo danih obrazcev. Nekoč so za reševanje teh nalog v praksi uporabljali trigonometrični obrazec št. 24.

Podobnostna tansformacija v 3D prostoru

Podobnostna (Helmertova) transformacija v prostoru se uporablja za preračun koordinat iz enega v drugi koordinatni sistem, ki se nanašata na dva različna

* Friedrich Robert Helmert (1843 - 1917), nemški geodet in matematik

geodetska datuma. Pogosto se v geodetski literaturi imenuje tudi datumska tarnsformacija. Z uvedbo GNSS-meritev se transformacija pogosto uporablja za preračun koordinat iz regionalnih (državnih) koordnatnih sistemov, ki se nanašajao na astrogeodetske datume v novejše globalne, geocentrične koordinatne sisteme. Primer je prehod iz novega državnega koordinatnega sistema D96 v stari državni koord. sistem D48 (ali obratno).

Zveza med obema koordinatnima sistemoma je podana s sedmimi transformacijskimi parametri:

- 3 premiki izhodišča enega koordinatnega sistema glede na drugega,
- 3 zasuki enega koordinatnega sistema glede na drugega in
- sprememba merila pri prehodu iz enega v drug koordinatni sistem.