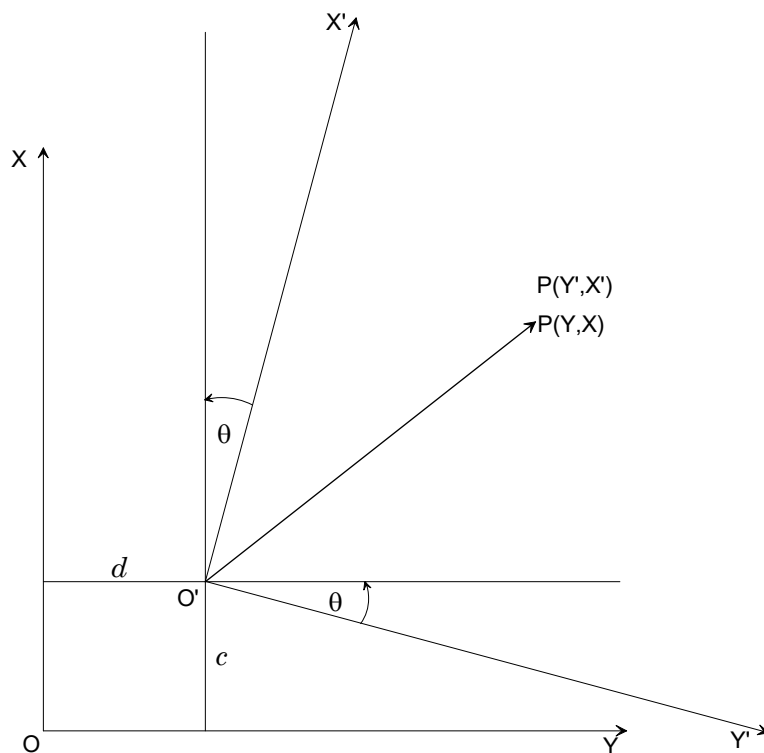


Geodetski koordinatni sistem XY (usmerjenost koord. osi)



$$x = mx' \cos \theta - my' \sin \theta + c$$

$$y = mx' \sin \theta + my' \cos \theta + d$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$x = ax' - by' + c$$

$$y = bx' + ay' + d$$

$$x = ax' - by' + c$$

$$y = ay' + bx' + d$$

Podobnostna transformacija z večjim številom skupnih točk – Helmertova transformacija

- V primeru, da obstaja več skupnih (identičnih) točk imamo predoločeno rešitev.
- Tudi v tem primeru lahko napišemo enačbe transformacije kot sistem linearnih enačb $Au = b$, vendar je sistem protisloven. Ne obstaja podobnostna transformacija, ki bi v primeru večjega števila skupnih točk k ($k \geq 2$), te ekzaktno transformirala.
- V tem primeru optimalne transformacijske parametre določamo v postopku izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Govorimo o izravnavi transformacije.
- V primeru izravnave transformacije obravnavamo koordinate točk kot opazovanja (običajno koordinate točk v končnem koordinatnem sistemu).

- Opazovanja (v našem primeru koordinate) so obremenjena z merskimi in drugimi napakami (pogreški), torej enačbe iz sistema $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ niso izpolnjive.

V tem primeru dobimo vektor popravkov \mathbf{v} (odstopanj, ostankov):

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_m]^T$$

za katerega velja: $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$)

- V tem primeru vektor \mathbf{u} (neznanke) določimo tako, da je vrednost izraza:

$$\sum_{i=1}^m v_i^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}) = \min$$

kar pomeni, da je vsota kvadratov popravkov najmanjša. Pravimo, da smo rešitev poiskali po metodi najmanjših kvadratov (MNK).

- Določitev transformacijskih parametrov z izravnavo transformacije omogoča kontrolo in oceno pogreškov.
- Popravki (odstopanja) na skupnih točkah bi naj bili znotraj naprej sprejetih mej. Če so ta večja od sprejetih (dopustnih) mej na posameznih točkah, jih lahko odstranimo iz seznama skupnih točk in jih obravnavamo kot nove točke.

2D Helmertova transformacija

- Do rešitve na dva načina:
 - s klasičnim postopkom izravnave - najboljša približna rešitev sistema po metodi najmanjših kvadratov (tvorimo matriko normalnih enačb itd.);
 - ali neposredno s pomočjo enačb, ki jih je predlagal že Helmert*.
- Op: zaradi numerične stabilnosti in poenostavitve enačb, se koordinate skupnih točk reducirajo na težišče.
- Dejansko gre pri Helmertovi rešitvi za enak postopek izravnave, vendar tukaj tvorimo samo posamezne člene matrike normalnih enačb in do parametrov pridemo s pomočjo danih obrazcev.
- Nekoč so za reševanje teh nalog v praksi uporabljali trigonometrični obrazec št. 24.

Rešitev s tvorjenjem normalnih enačb

- Normalne enačbe zagotavljajo enolično rešitev, ker so edini neznani parametri v enačbah neznanke. Normalne enačbe tvorijo matrika koeficientov \mathbf{N} in \mathbf{t} , vektor stalnih členov:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{N}_{n,n} &= \mathbf{A}_{n,2m}^T \mathbf{A}_{2m,n} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{A}^T \mathbf{b} & \mathbf{t}_{n,1} &= \mathbf{A}_{n,2m}^T \mathbf{b}_{2m,1}\end{aligned}$$

pri čemer je $n = 4$ (število neznank), $n_1 =$ število skupnih (identičnih) točk.

- Do rešitve (neznank, parametrov) pridemo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \qquad \mathbf{u}_{n,1} = \mathbf{N}_{n,1}^{-1} \mathbf{t}_{n,1}$$

število neznank je $n = 4$.

Redukcija koordinat na težišče

- Ta postopek opravimo zaradi numerične stabilnosti in poenostavitve enačb. Koordinate težišča skupnih točk (v oba koord. sistema) so:

$$\begin{aligned} X'_T &= \frac{\sum x'_i}{m} & X_T &= \frac{\sum x_i}{m} \\ Y'_T &= \frac{\sum y'_i}{m} & Y_T &= \frac{\sum y_i}{m} \end{aligned}$$

- Izračunamo nove koordinate glede na težišče:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_i &= x'_i - X'_T & \tilde{y}'_i &= y'_i - Y'_T \\ \tilde{x}_i &= x_i - X_T & \tilde{y}_i &= y_i - Y_T \end{aligned}$$

- Računska kontrola: $\sum \tilde{x}'_i = \sum \tilde{y}'_i = \sum \tilde{x}_i = \sum \tilde{y}_i = 0$

Helmertova transformacija

- Helmertovi obrazci nam transformacijske parametre dajo neposredno, translaciji c, d sta 0.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum \tilde{x}'_i \tilde{x}_i + \sum \tilde{y}'_i \tilde{y}_i}{\sum (\tilde{x}'_i{}^2 + \tilde{y}'_i{}^2)} & b &= \frac{\sum \tilde{y}'_i \tilde{x}_i + \sum \tilde{x}'_i \tilde{y}_i}{\sum (\tilde{x}'_i{}^2 + \tilde{y}'_i{}^2)} \\ \tilde{c} &= 0, & \tilde{d} &= 0 & (\tilde{a} &= a, & \tilde{b} &= b) \end{aligned}$$

- Translaciji izhodišča sistema X', Y' glede na sistem X, Y izračunamo kot:

$$\begin{aligned} c &= X_T - aX'_T - bY'_T \\ d &= Y_T + bX'_T - aY'_T \end{aligned}$$

- Nove točke lahko transformiramo po znanih enačbah:

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + c \\ y &= ay' - bx' + d \end{aligned}$$

Helmertova transformacija - matrična rešitev

- Če parametre iščemo prek sistema normalnih enačb, je potrebno z "reduciranimi" koordinatami napisati nove enačbe opazovanj oblike $\mathbf{Au} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$, tvoriti normalne enačbe in rešiti sistem.
- Ne glede na način reševanja, lahko na skupnih točkah izračunamo popravke (v našem primeru raje govorimo o odstopanjih):

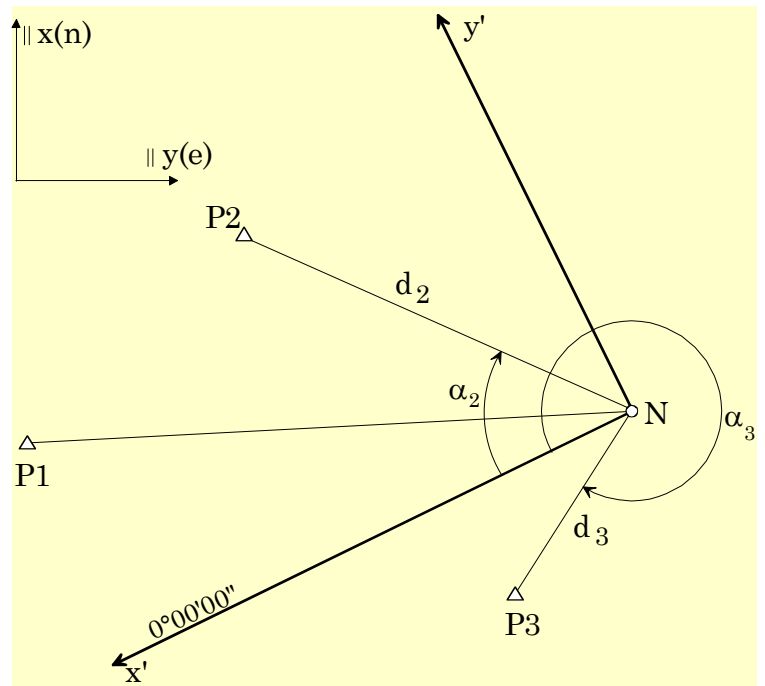
$$\begin{aligned} x_{\text{rač}} &= ax' + by' + c & v_x &= x_{\text{rač}} - x_{\text{dana}} \\ y_{\text{rač}} &= ay' - bx' + d & v_y &= y_{\text{rač}} - y_{\text{dana}} \end{aligned}$$

- Iz odstopanj lahko izračunamo referenčno varianco σ_0^2 . Koren referenčne variance kaže povprečno odstopanje na skupnih točkah:

$$\sigma_0^2 = \frac{[vv]}{2m - 4}$$

Prosto stojišče - rešitev s pomočjo transformacije koordinat

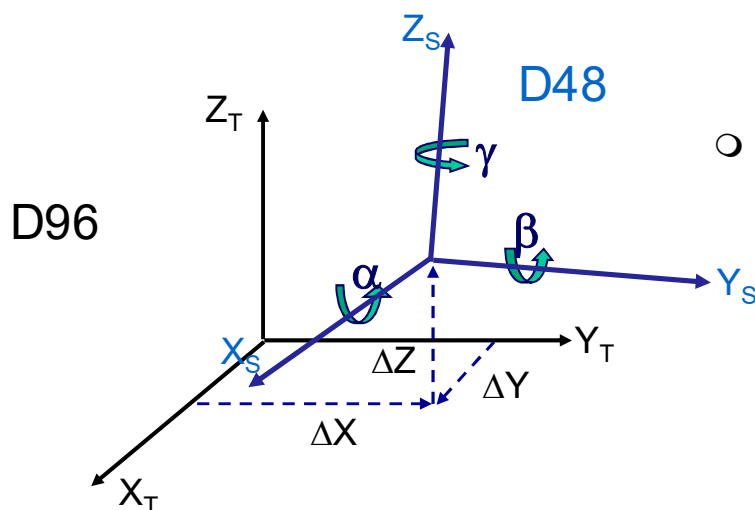
- Lokalni (pomožni k.s.) :
 - X' (n)-os nula horizontalnega kroga,
 - Y' (e)-os pravokotna na njo.
- Pravokotne koordinate točk v lokalnem koord. sistemu:
- $y' = d_i \sin \alpha_i$,
- $x' = d_i \cos \alpha_i$;
- α_i - smer na i-to točko;
- d_i - razdalja do i-te točke



Podobnostna transformacija v 3D prostoru

- Podobnostna (Helmertova) transformacija v prostoru se uporablja za preračun koordinat iz enega v drugi koordinatni sistem, ki se nanašata na dva različna geodetska datuma. Pogosto se v geodetski literaturi imenuje tudi **datumska transformacija**.
- Z uvedbo GNSS-meritev se transformacija pogosto uporablja za preračun koordinat iz regionalnih (državnih) koordinatnih sistemov, ki se nanašajo na astrogeodetske datume v novejših globalnih, geocentričnih koordinatnih sistemih. Primer je prehod iz novega državnega koordinatnega sistema D96 v stari državni koord. sistem D48 (ali obratno).

D96 – D48



- Zveza med obema koordinatnima sistemoma je podana s sedmimi transformacijskimi parametri:

- 3 premiki izhodišča enega koordinatnega sistema glede na drugega,
- 3 zasuki enega koordinatnega sistema glede na drugega in
- sprememba merila pri prehodu iz enega v drugi koordinatni sistem.

$$\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = m\mathbf{R} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$