

Afina transformacija

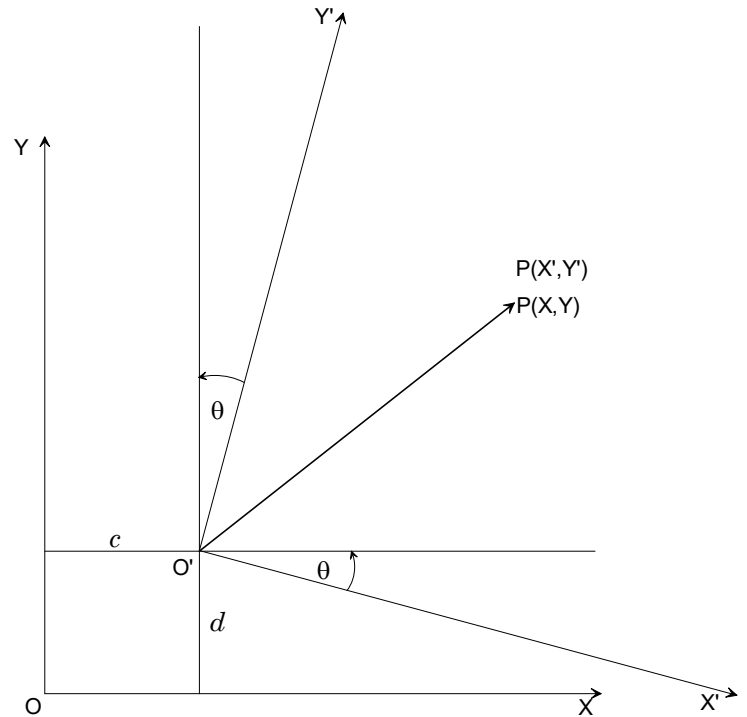
- **Afina transformacija** je vsaka transformacija, ki ohranja vzporednost.
- Afina transformacija je največkrat sestavljena iz rotacije, translacije, spremembe merila in striga. V splošnem pa se spremeni velikost, oblika, položaj in orientacija linij v koordinatnem sistemu.
- Merilo je odvisno samo od orientacije linije v koordinatnem sistemu, kar pomeni, da so dolžine linij v določeni smeri pomnožene z nekim skalarjem.

Podobnostna transformacija

- **Podobnostna transformacija** je tista, pri kateri je sprememba merila enaka v vseh smereh.
- To je t.i. izogonalna afina transformacija.
- Izogonalna transformacija pomeni da se ohranja velikost kotov, zato jo imenujemo podobnostna (**konformna**).
- Koordinatne osi ostajata pravokotni \Rightarrow pogoj ortogonalnosti.
- Merilo ostaja enako v vseh smereh \Rightarrow pogoj enotnega merila (spremembe merila).
- Dolžine linij in položaji točk v mreži se lahko spremenijo.

Podobnostna transformacija v ravnini (1)

- Podobnostna transformacija v ravnini je določena s štirimi transformacijskimi parametri:
 - dve translaciji koordinatnega izhodišča (c , d),
 - kot zasuka koordinatnih osi (θ),
 - enotna sprememba merila (m).
- Kot zasuka je dogovorno privzet pozitiven v levosučni smeri.

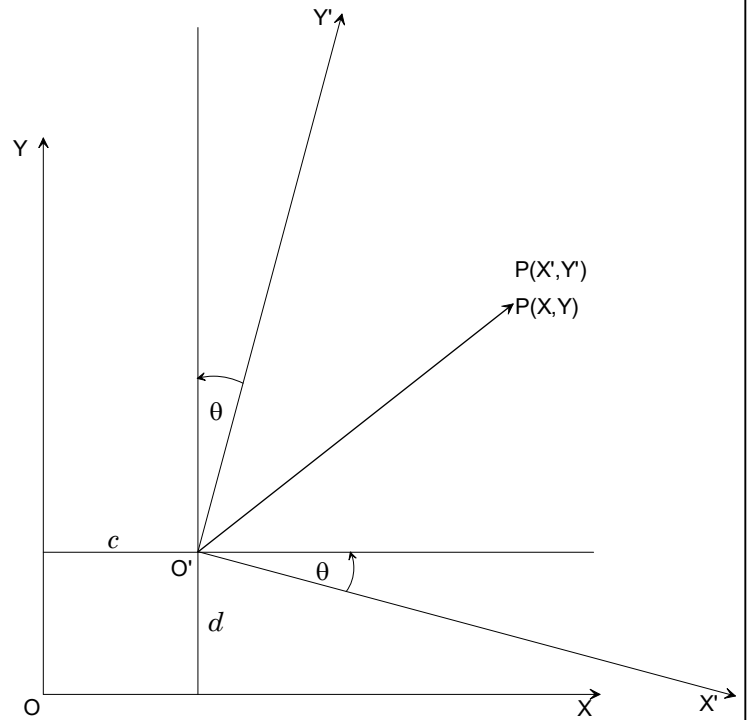


Podobnostna transformacija v ravnini (2)

- Uporaba:
 - transformacija koordinat iz lokalnega koordinatnega sistema v nadrejeni (državni) koord. sistem;
 - transformacija koordinat iz koordinatnega sistema karte v državni koord. sistem;
 - določitev koordinat "prostega stojišča" in določitev koordinat določenih s polarno metodo izmere (enak princip).

Podobnostna transformacija v ravnini (3)

- Transformacijske parametre izračunamo na osnovi **skupnih** točk. To so točke, imajo znane koordinate v obeh koordinatnih sistemih. Te točke imenujemo tudi **identične*** točke. Tako določene transformacijske parametre nato uporabimo za transformacijo novih točk v končni koordinatni sistem.



- Transformacija je določena z enačbami:

$$x = mx' \cos \theta + my' \sin \theta + c$$

$$y = -mx' \sin \theta + my' \cos \theta + d$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

* SITRA pojmuje identične točke kot "vezne" točke!

Linearna oblika podobnostne transformacije

- Uvedemo okrajšave: $a = m \cos \theta$
 $b = m \sin \theta$

- Linearna oblika transformacije:

$$x = ax' + by' + c$$

$$y = -bx' + ay' + d$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

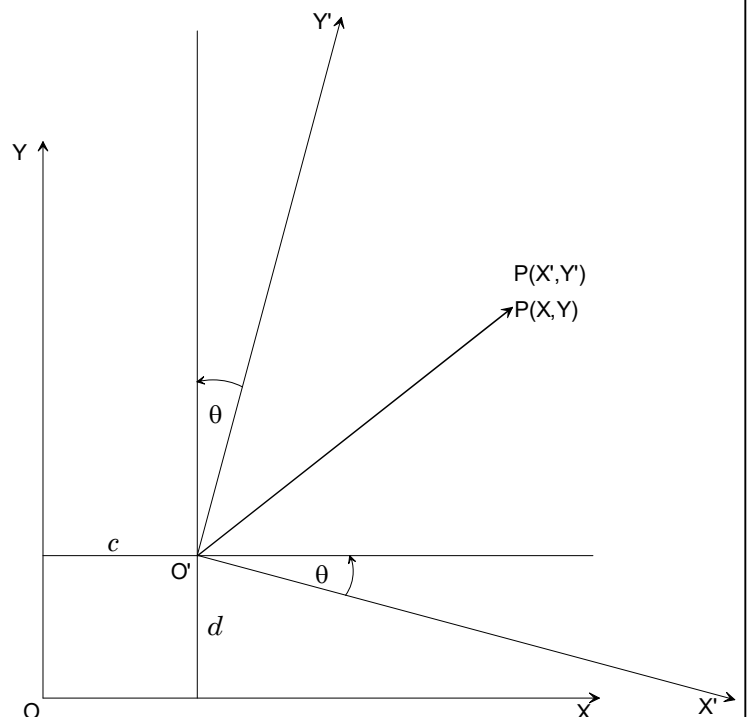
- Enačbe lahko pišemo tudi v obliki (lažje za reševanje sistema linearnih enačb):

$$x = ax' + by' + c$$

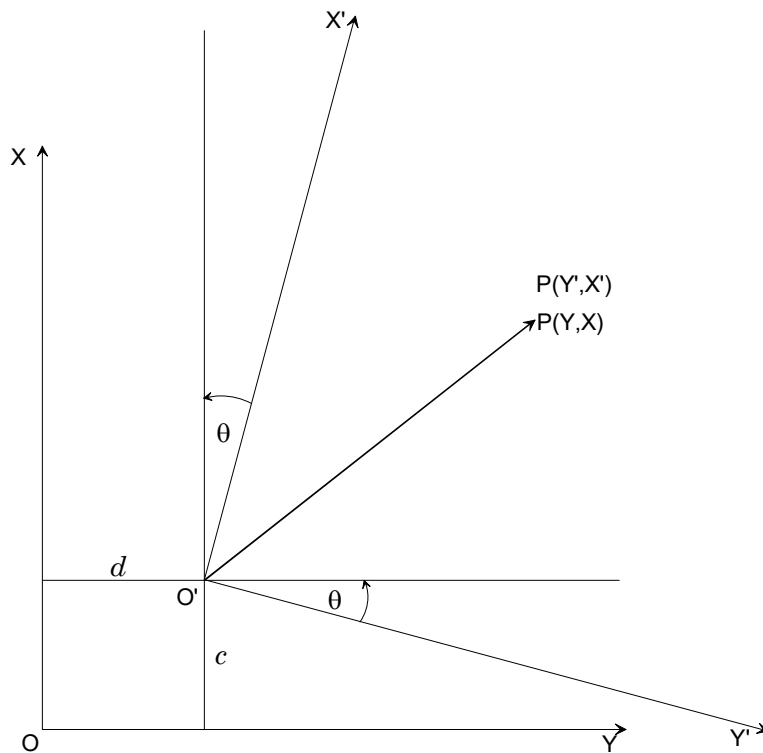
$$y = ay' - bx' + d$$

- Ko rešimo neznana parametra a in b, izračunamo merilo in rotacijo:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Geodetski koordinatni sistem XY (usmerjenost koord. osi)



$$x = mx' \cos \theta - my' \sin \theta + c$$

$$y = mx' \sin \theta + my' \cos \theta + d$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$x = ax' - by' + c$$

$$y = bx' + ay' + d$$

$$x = ax' - by' + c$$

$$y = ay' + bx' + d$$

Primer

- dano $P_1(x_1, y_1)$, $P_1(x'_1, y'_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_2(x'_2, y'_2)$
- Neznano: c, d, a, b (θ, m);

- Sistem enačb ima obliko:

$$x_1 = ax'_1 + by'_1 + c$$

$$y_1 = ay'_1 - bx'_1 + d$$

$$x_2 = ax'_2 + by'_2 + c$$

$$y_2 = ay'_2 - bx'_2 + d$$

- Matrično:

$$\begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & -x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & -x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

- Sistem linearnih enačb rešimo: $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$, $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

○ Numerični primer:

Točka	x'	y'	x	y
1	10	10	350	190
2	80	60	250	300

○ Enačbe transformacije:

$$x = ax' - by' + c$$

$$y = ay' + bx' + d$$

$$350 = a \cdot 10 + b \cdot 10 + c$$

$$190 = a \cdot 10 - b \cdot 10 + d$$

$$250 = a \cdot 80 + b \cdot 60 + c$$

$$300 = a \cdot 60 - b \cdot 80 + d$$

matrično

$$\begin{bmatrix} 350 \\ 190 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 1 \\ 80 & 60 & 1 & 0 \\ 60 & -80 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 1 \\ 80 & 60 & 1 & 0 \\ 60 & -80 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 350 \\ 190 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,203 \\ -1,716 \\ 369,189 \\ 173,865 \end{bmatrix}$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} = 1,727966$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} \quad \theta = 263^\circ,253333$$

Domača naloga

○ Izračunaj transformacijske parametre med dvema pravokotnima koord. sistemoma, če sta podani dve skupni (identični) točki:

- končni koord. sistem x, y
- izhodiščni koord. sistem x', y'

Točka	x'	y'	x	y
1	300	300	xxx	xxx
2	230	220	xxx-50	xxx-30

pri čemer so: "xxx" zadnje tri cifre vaše vpisne številke!