Podobnostna transformacija

To je t.io. izogonalna afina transformacija. Afina transformacija transformira ravne linije v ravne linije in ohranja vzporednost. Afina transformacija je največkrat sestavljena iz rotacije, translacije, spremembe merila in striga. V splošnem pa se spremeni velikost, oblika, položaj in orientacija linij v koordinatnem sistemu. Merilo je odvisno samo od orientacije linije v koordinatnem sistemu, kar pomeni, da so dolžine linij v določeni smeri pomnožene z nekim skalarjem.

Podobnostna transformacija je tista, pri kateri je sprememba merila enaka v vseh smereh. Izogonalna transformacija pomeni da se ohranja velikost kotov, zato jo imenujemo podobnostna (konformna). Koordinatni osi ostajata pravokotni → pogoj ortogonalnosti. Merilo ostaja enako v vseh smereh → pogoj enotnega merila (spremembe merila). Dolžine linij in položaji točk v mreži se lahko spremenijo.

Podobnostna transformacija v ravnini

Podobnostna transformacija v ravnini je določena s štirimi transformacijskimi parametri:

- dve translaciji koordinatnega izhodišča (c, d),
- kot zasuka koordinatnih osi (θ),
- enotna sremenba merila (m).

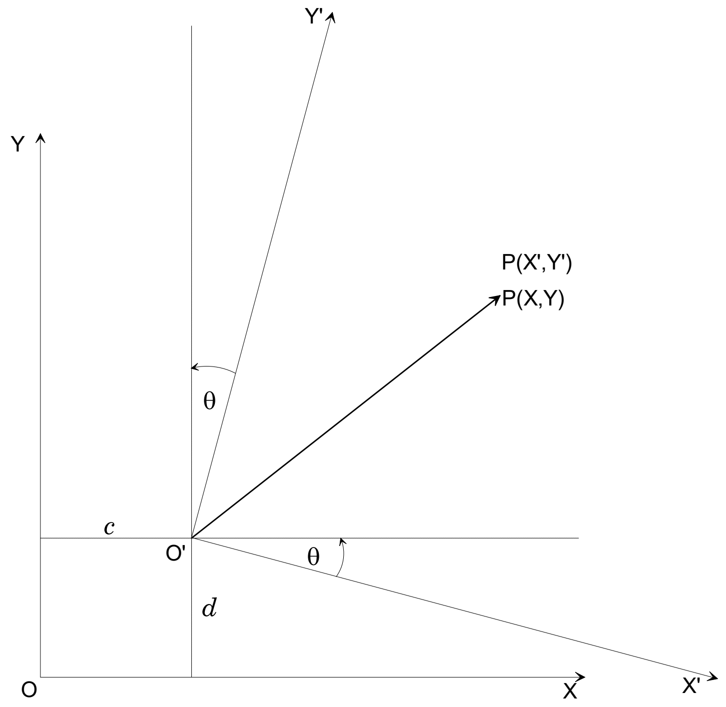
Kot zasuka je dogovorno privzet pozitiven v levosučni smeri.

Uporaba:

- transformacija koordinat iz lokalnega koordinatnega sistema v nadrejeni (državni) koord. sistem;
- transformacija koordinat iz koordinatnega sistema karte v državni koord. sistem;
- določitev koordinat "prostega stojišča" in določitev koordinat določenih s polarno metodo izmere (enak princip).

Transformacijske parametre izračunamo na osnovi skupnih točk. To so točke, imajo znane koordinate v obeh koordinatnih sistemih. Te točke imenujemo tudi identične* točke. Tako določene transformacijske parametre nato uporabimo za transformacijo novih točk v končni koordinatni sistem.

* V programu SITRA se identične točke imenujejo "vezne" točke.



podobnostna tansformacija v ravnini

Transformacija je določena z enačbami:

$$
\begin{aligned}
x &= mx'\cos\theta + my'\sin\theta + c \\
y &= -mx'\sin\theta + my'\cos\theta + d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}
$$

Zgornja oblika transformacije je geometrijska, pri čemer sistem žal ni linearen. Z uvedbo okrajšav:

$$
\begin{aligned}
a &= m\cos\theta \\
b &= m\sin\theta
\end{aligned}
$$

dobijo enačbe za transformacijo linearno obliko:

$$
\begin{aligned}
x &= ax' + by' + c \\
y &= -bx' + ay' + d
\end{aligned}
$$

Enačbe lahko pišemo tudi v obliki (lažje za reševanje sistema linearnih enačb):

$$
\begin{aligned}
x &= ax' + by' + c \\
y &= ay' - bx' + d
\end{aligned}
$$

Ko rešimo neznana parametra a in b, izračunamo merilo in rotacijo:

$$
m = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)
$$

Za izračun štirih transformacijskih parametrov je potrebno imeti dve skupni točki (štiri enačbe s štirimi neznakami).

Primer: dano $P_1\ (x_1,y_1)$, $P_1\ (x'_1,y'_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_2\ (x'_2,y'_2)$

Neznano: c, d, θ, m;

Sistem enačb ima obliko:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= ax'_1 + by'_1 + c \\
y_1 &= ay'_1 - bx'_1 + d \\
x_2 &= ax'_2 + by'_2 + c \\
y_2 &= ay'_2 - bx'_2 + d
\end{aligned}
$$

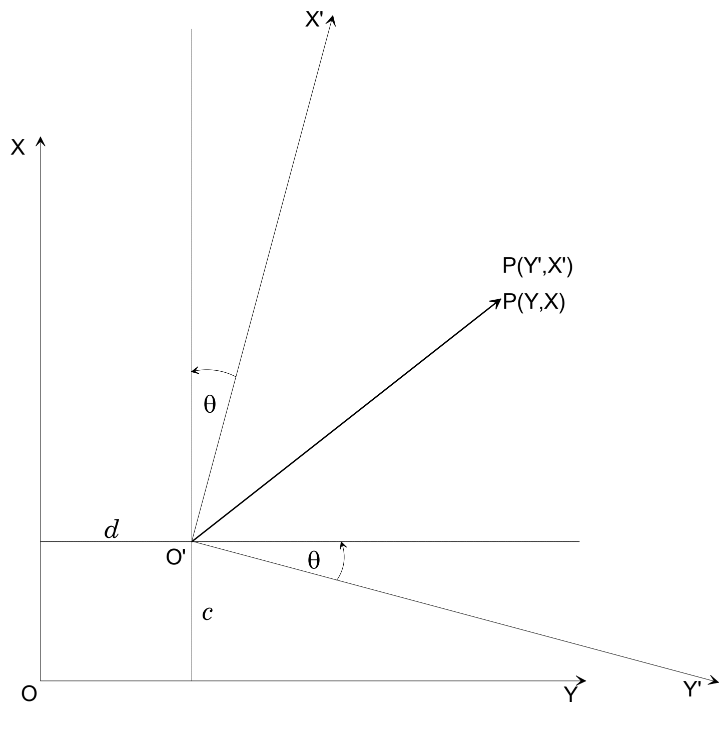
Matrično:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & -x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & -x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{Au} = \mathbf{b}
$$

Sistem linearnih enačb rešimo: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\ \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Geodetski koordinatni sistem XY (usmerjenost koord. osi)



$$\begin{aligned} x &= mx'\cos\theta - my'\sin\theta + c \\ y &= mx'\sin\theta + my'\cos\theta + d \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= m\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oz. v linearni obliki:

$$\begin{aligned} x &= ax' - by' + c \\ y &= bx' + ay' + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= ax' - by' + c \\ y &= ay' + bx' + d \end{aligned}$$

Sistem enačb za dve skupni točki:

$$\begin{bmatrix} x'_1 & -y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & x'_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & -y'_2 & 1 & 0 \\ y'_2 & x'_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$Au = b$$

Ne glede na orientacijo koordinatnega sistema bodo transformacijski parametri enaki (a in b). Translaciji ustrezata koordinatnim osem.

Primer

Podani sta dve točki z znanimi koordinatami v oba koordintna sistema. Izračunaj transformacijske parametre.

Točka	x'	y'	x	y
1	10	10	350	190
2	80	60	250	300

Enačbe transformacije:

$$\begin{aligned} x &= ax' - by' + c \\ y &= ay' + bx' + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 350 &= a\,10 + b\,10 + c \\ 190 &= a\,10 - b\,10 + d \\ 250 &= a\,80 + b\,60 + c \\ 300 &= a\,60 - b\,80 + d \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 350 \\ 190 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 1 \\ 80 & 60 & 1 & 0 \\ 60 & -80 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 1 \\ 80 & 60 & 1 & 0 \\ 60 & -80 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 350 \\ 190 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,203 \\ -1,716 \\ 369,189 \\ 173,865 \end{bmatrix}$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} = 1,727966$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{d} \qquad \theta = 263°,253333$$