Transformacija in pretvorba koordinat

V geodeziji in astronomiji imamo pogosto opravka z pretvorbo med koordinatnimi sistemi, saj so koordinate točk (teles) določene sprva v tistem koordinatnem sistemu, v katerem je izbran ustrezen matematični model. Mednarodni standard ISO19111* točno loči med pretvorbo koordinat ("coordinate conversion") in transformacijo koordinat ("coordinate transformation"). Pretvorba pomeni preračun koordinat iz enega koordinatnega sistema v drugi v istem datumu. Pri transformaciji koordinat pa gre za preračun koordinat med dvema koordinatnima sistemoma, ki se nanašata na dva različna datuma.

Transformacija koordinat je lahko linearna ali pa nelinearna, sama transformacija pa je lahko nastopi v 2D prostoru oz. 3D prostoru, lahko pa nastopi transformacija iz 3D prostora v 2D prostor.

V splošnem predstavlja pretvorba iz enega v drugi koordinatni sistem linearno transformacijo vektorja $\boldsymbol{x}$ v vektor $\boldsymbol{y}$ v obliki:

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}$$

Vsak element vektorja $\boldsymbol{y}$ je linearna kombinacija elementov vektorja $\boldsymbol{x}$, elementi vektorja $\boldsymbol{t}$ pa predstavljajo vzporedni premik translacijo ("shift") koordinatnih osi. Matrika $\mathbf{M}$ se imenuje transformacijska matrika, ki je v splošnem pravokotna (število vrstic ni enako številu stolpcev), čeprav je v geodeziji skoraj vedno pravokotna. $\boldsymbol{t}$ se v splošnem imenuje vektor translacije.

Če je matrika M kvadratna in nesingularna obstaja inverzna zveza oblike:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{t})$$

V tem primeru je transformacija afina. Afina transformacija ohranja kolinearnost.

Sedaj bomo predstavili šest osnovnih linearnih (geometrijskih) transformacij v ravnini.

Linearne transformacije v ravnini

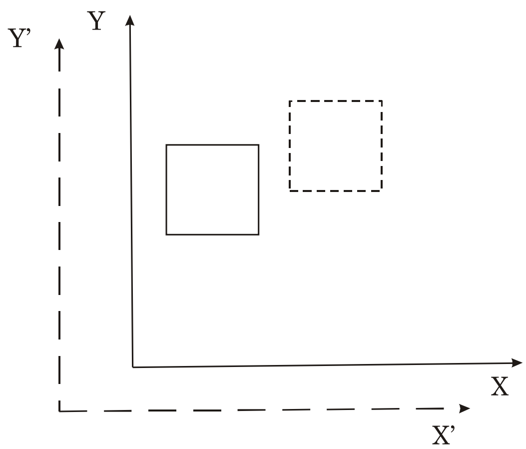
Obstaja 6 elementarnih transformacij v ravnini. Te so:

- translacija,
- enotna sprememba merila ("scaling"),
- neenotna sprememba merila,
- rotacija (zasuk),
- zrcaljenje (refleksija),

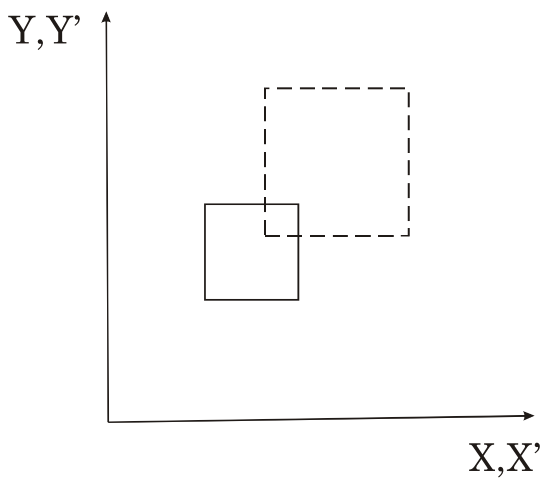
- striženje ("shear").

Učinek vsake transformacije se geometrijski lahko predstavi na dva načina: kot učinek transformacije na 4 točke, ki tvoriji oglišča kvadrata ali kot spremembo koordinatnega sistema. V prikazu učinka transoformacije je narisan novi lik (črtasti liki) v izhodiščnem kooridnatnem sistemu (X, Y), ali izhodiščni lik v spremenjenem koordinatnem sistemu (črtaste koordinatne osi X', Y').

Translacija

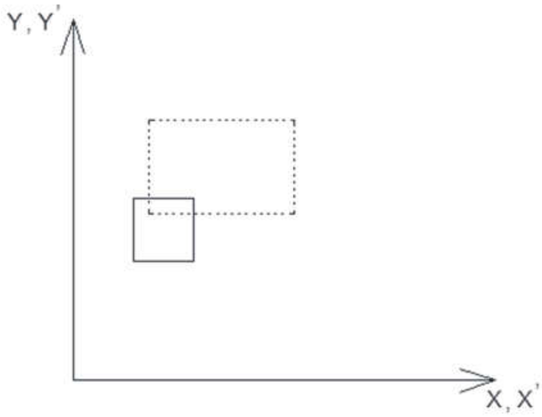


Enotna sprememba merila



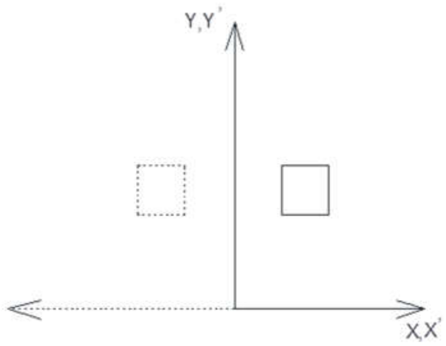
V tem primeru je enotna sprememba merila povzročila povečavo lika.

Neenotna sprememba merila

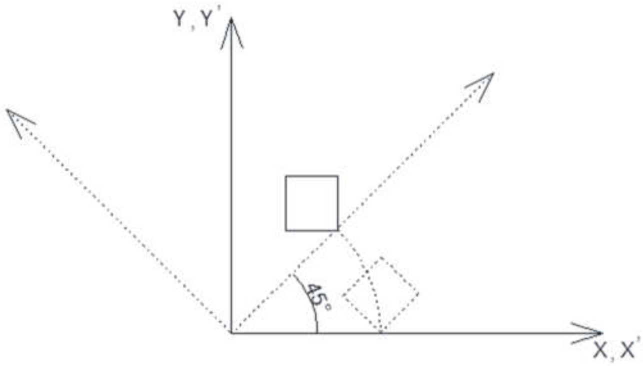


V tem primeru je neenotma sprememba merila (različna v obeh koordinatnih oseh) povzročila sprememebo lika: iz kvadrata v pravokotnik.

Zrcaljenje (refleksija)

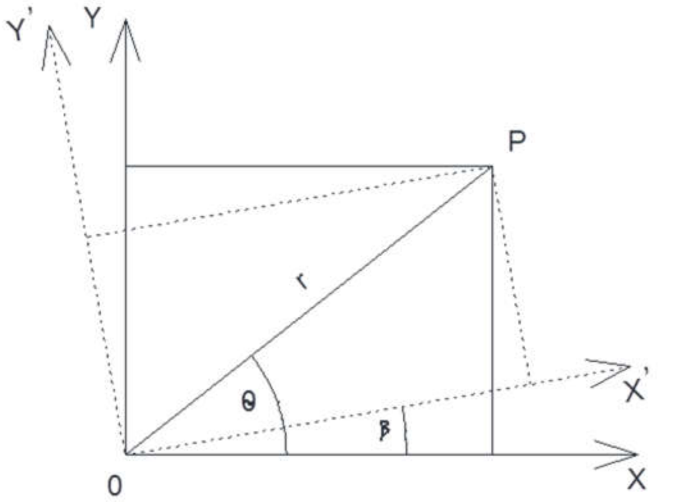


Rotacija (lika)



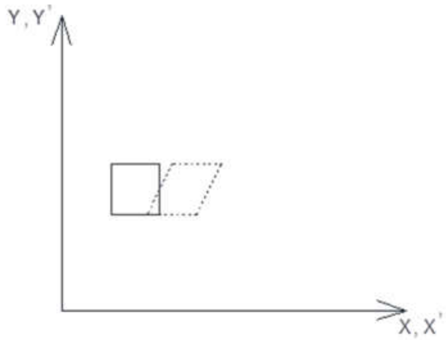
Lik smo rotirali za 45° v smeri urinega kazalca.

Rotacija koordinatnega sistema



Obe koordinatni osi smo rotirali (zasukali) za kot β v obratni smeri urinega kazalca.

Striženje ("shear")



Vse točke vzdolž določene linije ohranjajo svoj položaj, ostale so premaknjene vzporedno, sorazmerno z oddaljnostjo od linije.

V geodeziji imamo opravka predvsem s translacijo, spremembo merila, rotacijom in zrcaljenjem.

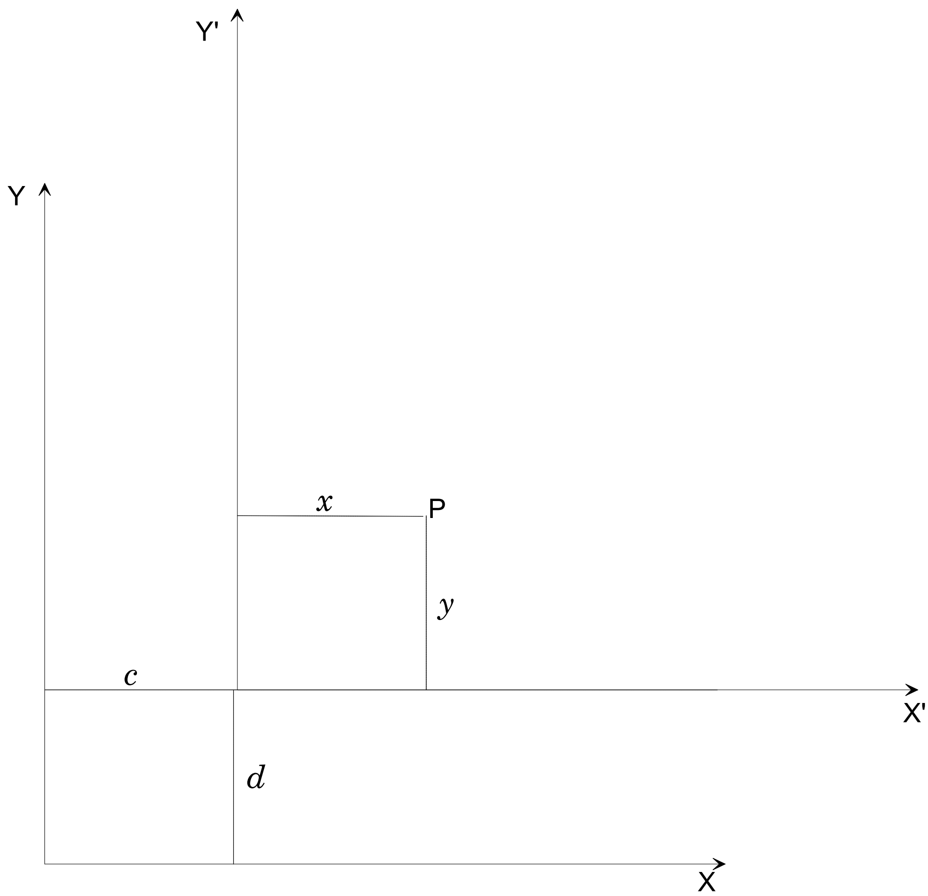
Kako se lahko učinki teh transformacij predstavijo s pomočjo transformacijske matrike.

Translacija

Pri translaciji lahko nastopi:

- vzporedni premik točke za *n*-enot vzdolž osi X in premik za *m*-enot vzdolž osi Y;
- ali premik koordinatnega izhodišča.

Slednje je bolj pogosto, predvsem v geodeziji, saj točka na terenu ostaja tam kjer je.



Slika: translacija

$$x = x' + c$$
$$y = y' + d$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{t}$$

Matrika M je enotska matrika, $\mathbf{M} = \mathbf{I}$.

Enotna sprememba merila

$$x = mx'$$
$$y = my'$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

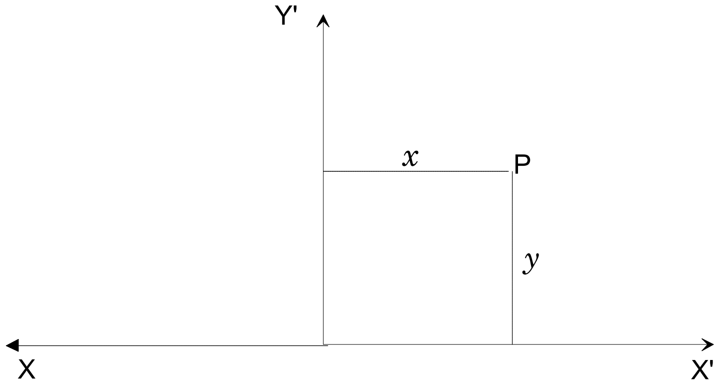
Enotna sprememba merila pomeni, da je ta sprememba enaka vzdolž obe koordinatni osi.

Neenotna sprememba merila

$$x = m_x x'$$
$$y = m_y y'$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix}$$

Tukaj nastopi sprememba merila posebej za vsako koordinatno os.

Refleksija (zrcaljenje)



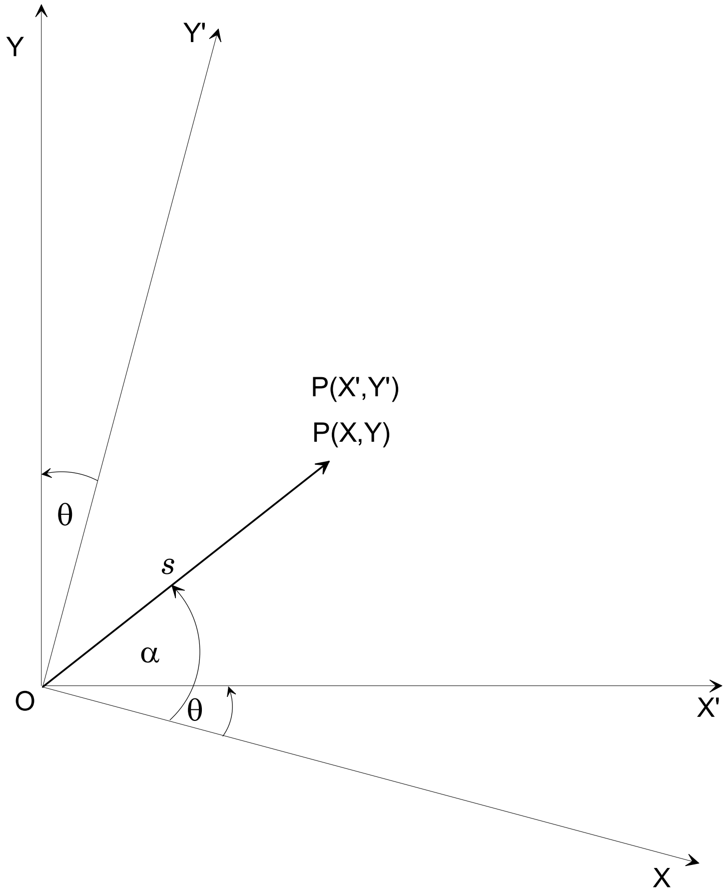
Slika: zrcaljenje

$$x = -x'$$
$$y = y'$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zrcaljenje tvori zrcalno sliko predemta. V geodeziji se zrcali prek koordinatne osi. V našem primeru zrcalimo prek osi X.

Rotacija

Podana je točka P v koordinatnem sistemu X'Y'. Njene koordinate so P (x', y'). Zasukajmo koordinatni sistem za kot θ v obratni smeri urinega kazalca:



Za izpeljavo enačb po zasuku koordinatnega sistema vpeljimo polarne koordinate točke P (s, α), ter poiščimo zvezo teh s pravokotnimi koordinatami točke P:

$$\begin{aligned} x' &= s\cos\alpha \\ y' &= s\sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

Po zasuku koordinatnih osi za kot θ so sedaj koordinate v novem koordinatnem sistemu P (x, y). V novem koordinatnem sistemu je polarni kot (α - θ), polarna razdalja je ostala enaka - s. Zveza med prvokotnimi in polarnimi koordinatami je sedaj:

$$\begin{aligned} x &= s\cos(\alpha-\theta) \\ y &= s\sin(\alpha-\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

Razvijmo del na desni strani enačbe z adicijskimi stavki trigonometrije:

$$\begin{aligned} x &= s\cos\alpha\cos\theta + s\sin\alpha\sin\theta \\ y &= s\sin\alpha\cos\theta - s\cos\alpha\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

Vstavimo enačbe iz sistema (1) v sistem (3):

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

V matrični obliki lahko postopek rotacije koordinatnega sistema prikažemo kot:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Transformacijska matrika **M** se imenuje rotacijska matrika z oznako **R**.

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotacijska matrika R sodi med ortogonalne matrike z lastnostmi:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}$$