## Podobnostna transformacija z večjim številom skupnih točk - Helmertova transformacija

V primeru, da obstaja več skupnih (identičnih) točk imamo predoločeno rešitev. Tudi v tem primeru lahko napišemo enačbe transformacije kot sistem linearnih enačb $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, vendar je sistem protisloven. Ne obstaja podobnostna transformacija, ki bi v primeru večjega števila skupnih točk $k$ ($k \geq 2$), te ekzaktno transformirala. Za vsako izbiro transformacijskih parametrov ($a$, $b$, $c$, $d$) lahko nastopi primer:

$$\mathbf{Au} \neq \mathbf{b} \qquad \mathbf{A}(i,j)\ (i = 1,2,...,m \quad j = 1,2,...n \qquad m \geq n)$$

V tem primeru optimalne transformacijske parametre določamo v postopku izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Govorimo o izravnavi transformacije. V primeru izravnave transformacije obravnavamo koordinate točk kot opazovanja (običajno koordinate točk v končnem koordinatnem sistemu).

Ker so opazovanja (v našem primeru koordinate) obremenjena z merskimi in drugimi napakami (pogreški), enačbe iz sistema $\mathbf{Au} = \mathbf{B}$ niso izpolnjive. V tem primeru dobimo vektor popravkov $\mathbf{v}$ (odstopanj, ostankov):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

za katerega velja: $\mathbf{v} = \mathbf{Au} - \mathbf{b}$ $\quad (\mathbf{Au} = \mathbf{b} + \mathbf{v})$

V tem primeru vektor $\mathbf{u}$ (neznanke) določimo tako, da je vrednost izraza:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^2 = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = (\mathbf{Au} - \mathbf{b})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Au} - \mathbf{b}) = \min\,,$$

kar pomeni, da je vsota kvadratov popravkov najmanjša. Pravimo, da smo rešitev poiskali po metodi najmanjših kvadratov (MNK).

Določitev transformacijskih parametrov z izravnavo transformacije omogoča kontrolo in oceno pogreškov. Popravki (odstopanja) na skupnih točkah bi naj bili znotraj vnaprej sprejetih mej. Če so ta večja od sprejetih (dopustnih) mej na posameznih točkah, jih lahko odstranimo iz seznama skupnih točk in jih potem obravnavamo kot nove točke.

Do rešitve lahko pridemo na dva načina. S klasičnim postopkom izravnave, prek tvorjenja normalnih enačb itd, ali neposredno prek obrazcev, kot jih je predlagal že Helmert*. Dejansko gre pri Helmertovi rešitvi za enak postopek izravnave, vendar tukaj tvorimo samo posamezne člene matrik normalnih enačb in do parametrov pridemo s

* Friedrich Robert Helmert (1843 - 1917), nemški geodet in matematik

pomočjo danih obrazcev. Nekoč so za reševanje teh nalog v praksi uporabljali trigonometrični obrazec št. 24.

## Rešitev s tvorjenjem normalnih enačb

Normalne enačbe zagotavljajo enolično rešitev, ker so edini neznani parametri v enačbah neznanke. Nomalne enačbe tvorijo matrika koeficientov $\mathbf{N}$ in $\mathbf{t}$, vektor stalnih členov.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \qquad \mathbf{N}_{n,n} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{n,2m}\mathbf{A}_{2m,n}$$
$$\mathbf{t} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad \mathbf{t}_{n,1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{n,2m}\mathbf{b}_{2m,1}$$

pri čemer je $n = 4$ (število neznank), $m =$ število skupnih (identičnih) točk.
Do rešitve (neznank, parametrov) pridemo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \qquad \mathbf{u}_{n,1} = \mathbf{N}^{-1}_{n,n}\mathbf{t}_{n,1}$$

število neznank je $n = 4$.

## Redukcija koordinat na težišče

V obeh načini reševanja je dobro koordinate identičnih (skupnih) točk reducirati na težišče. Ta postopek opravimo zaradi numerične stabilnosti in poenostavitve enačb. Torej, koordinate težišča skupnih točk (v oba koord. sistema) so:

$$X_T^{'} = \frac{\sum x_i^{'}}{m} \qquad X_T = \frac{\sum x_i}{m}$$
$$Y_T^{'} = \frac{\sum y_i^{'}}{m} \qquad Y_T = \frac{\sum y_i}{m}$$

Sedaj izračunamo nove koordinate glede na težišče:

$$\tilde{x}_i^{'} = x_i^{'} - X_T^{'} \qquad \tilde{y}_i^{'} = y_i^{'} - Y_T^{'}$$
$$\tilde{x}_i = x_i - X_T \qquad \tilde{y}_i = y_i - Y_T$$

Računska kontrola je: $\sum \tilde{x}_i^{'} = \sum \tilde{y}_i^{'} = \sum \tilde{x}_i = \sum \tilde{y}_i = 0$

## Helmertovi obrazci

Helmertovi obrazci nam transformacijske parametre dajo neposredno. Translaciji $c$ , $d$ sta 0, parametra $a$ in $b$ pa:

$$a = \frac{\sum \tilde{x}_i' \tilde{x}_i + \sum \tilde{y}_i' \tilde{y}_i}{\sum \left( \tilde{x}_i'^2 + \tilde{y}_i'^2 \right)} \qquad b = \frac{\sum \tilde{y}_i' \tilde{x}_i + \sum \tilde{x}_i' \tilde{y}_i}{\sum \left( \tilde{x}_i'^2 + \tilde{y}_i'^2 \right)}$$

$$\tilde{c} = 0, \qquad \tilde{d} = 0 \qquad (\tilde{a} = a, \qquad \tilde{b} = b)$$

Translaciji izhodišča sistema X',Y' glede na sistem X, Y izračunamo lahko:

$$c = X_{\mathrm{T}} - aX_{\mathrm{T}}' - bY_{\mathrm{T}}'$$
$$d = Y_{\mathrm{T}} + bX_{\mathrm{T}}' - aY_{\mathrm{T}}'$$

Kot zasuka in faktor merila izračunamo na enak način:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \mathtt{arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Nove točke lahko transformiramo po znanih enačbah:

$$x = ax' + by' + c$$
$$y = ay' - bx' + d$$

## Matrična rešitev

Če parametre iščemo prek sistema normalnih enačb, je potrebno z "reduciranimi" koordinatami napisati nove enačbe opazovanj oblike $\mathbf{Au} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$, tvoriti normalne enačbe in rešiti sistem.

Ne glede na to kako računamo transformacijske parametre, prek redukcije točk na težišče, ali brez tega, lahko na skupnih točkah izračunamo popravke; v našem primeru raje govorimo o odstopanjih:

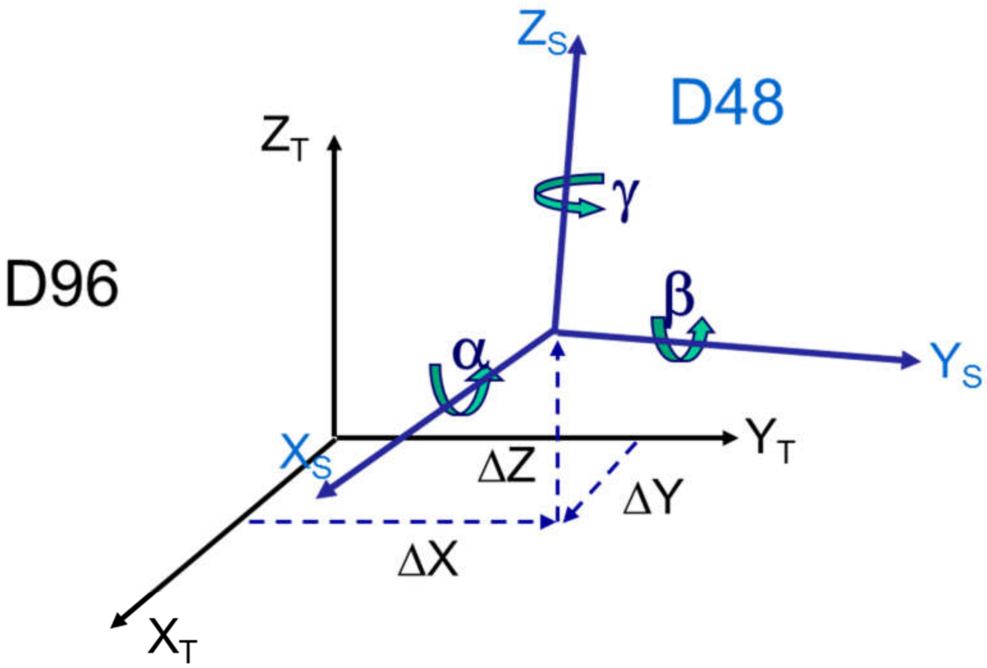
$$x_{\text{rač}} = ax' + by' + c \qquad v_x = x_{\text{rač}} - x_{\text{dana}}$$
$$y_{\text{rač}} = ay' - bx' + d \qquad v_y = y_{\text{rač}} - y_{\text{dana}}$$

Iz odstopanj lahko izračunamo referenčno varianco $\sigma_0^2$. Koren referenčne variance kaže povprečno odstopanje na skupnih točkah:

$$\sigma_0^2 = \frac{[vv]}{2m - 4}$$

## Podobnostna transformacija v 3D prostoru

Podobnostna (Helmertova) transformacija v prostoru se uporablja za preračun koordinat iz enega v drugi koordinatni sistem, ki se nanašata na dva različna geodetska datuma. Pogosto se v geodetski literaturi imenuje tudi datumska transformacija. Z uvedbo GNSS-meritev se transformacija pogosto uporablja za preračun koordinat iz regionalnih (državnih) koordinatnih sistemov, ki se nanašajao na astrogeodetske datume v novejše globalne, geocentrične koordinatne sisteme. Primer je prehod iz novega državnega koordinatnega sistema D96 v stari državni koord. sistem D48 (ali obratno).




Zveza med obema koordinatnima sistemoma je podana s sedmimi transformacijskimi parametri:

- 3 premiki izhodišča enega koordinatnega sistema glede na drugega,
- 3 zasuki enega koordinatnega sistema glede na drugega in
- sprememba merila pri prehodu iz enega v drug koordinatni sistem.