

VAJA 3: IZRAVNAVA GNSS GEODETSKE MREŽE PO MNK – POSREDNA IZRAVNAVA

2025/2026

1 UVOD

Rezultat obdelave statične GNSS izmere so bazni vektorji. Če imamo v GNSS mreži nadštevilo število baznih vektorjev, koordinate novih točk določimo z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov (MNK). Pri vaji 3 bomo s **posredno izravnavo po MNK** izravnavali štirikotnik, sestavljen iz šestih baznih vektorjev (slika 1). Po izravnavi bomo naredili tudi globalni test modela in iskanje grobih pogreškov s Tau-testom.

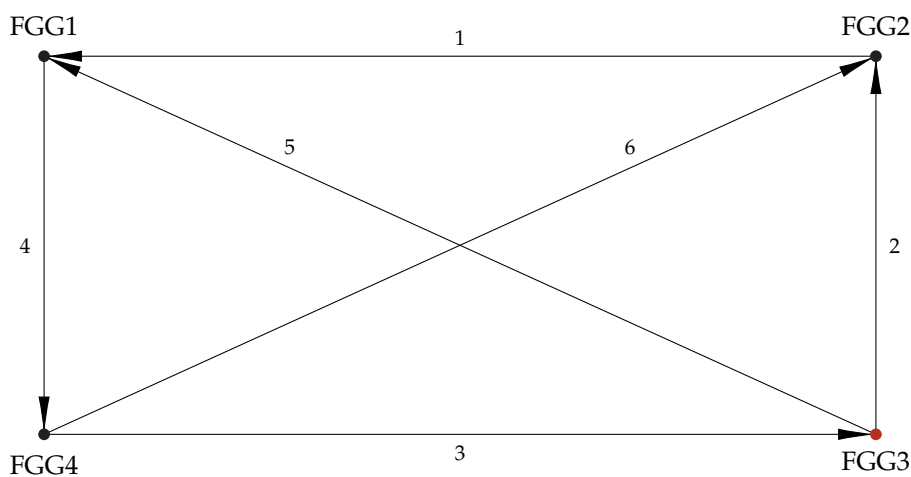
Dano točko predstavlja steber FGG3 s koordinatami v državnem koordinatnem sistemu D96-17/XYZ:

$$X = 4\,293\,738,1031 \text{ m}$$

$$Y = 1\,110\,067,7315 \text{ m}$$

$$Z = 4\,569\,047,5476 \text{ m}$$

Nove točke so stebri FGG1, FGG2 in FGG4.



Slika 1: Skica geodetske GNSS mreže na strehi FGG. Steber FGG3 je dana točka, ostali trije stebri so nove točke.

Opazovanja v geodetski mreži predstavlja 6 baznih vektorjev (rezultat obdelave GNSS opazovanj v programu Leica Infinity):

- vektor 1: $\text{FGG2-FGG1} = (\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1)$
- vektor 2: $\text{FGG3-FGG2} = (\Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta Z_2)$
- vektor 3: $\text{FGG4-FGG3} = (\Delta X_3, \Delta Y_3, \Delta Z_3)$
- vektor 4: $\text{FGG1-FGG4} = (\Delta X_4, \Delta Y_4, \Delta Z_4)$
- vektor 5: $\text{FGG3-FGG1} = (\Delta X_5, \Delta Y_5, \Delta Z_5)$
- vektor 6: $\text{FGG4-FGG2} = (\Delta X_6, \Delta Y_6, \Delta Z_6)$

2 NALOGA

Baznih vektorjev imamo več, kot jih potrebujemo za enolično določitev koordinat novih točk – koordinate novih točk moramo torej določiti z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Dano geodetsko mrežo izravnajte s posredno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Ocenite koordinate novih točk in njihove natančnosti. Naredite tudi globalni test modela in iskanje grobih pogreškov s Tau-testom.

3 REZULTATI

Rezultat izravnav so popravki opazovanj, izravnani bazni vektorji in ocenjene koordinate novih točk, skupaj s pripadajočimi ocenami natančnosti ter rezultati globalnega testa modela in Tau-testa.

4 POSREDNA IZRAVNAVA PO MNK

Pri posredni izravnavi nastavimo za vsako opazovanje eno enačbo popravkov. Vsaka enačba popravkov vsebuje samo eno opazovanje ter poljubno število neznank in konstant. Sestavimo torej n enačb popravkov, kjer je n število opazovanj. Skupno število neznank je $u = n_0$. Splošna oblika enačb popravkov je (če so naše neznanke trirazsežne kartezične koordinate):

$$F_i \equiv \hat{l}_i - f(\hat{X}_1, \hat{Y}_1, \hat{Z}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_2, \hat{Z}_2, \dots, X_{nt}, Y_{nt}, Z_{nt}, k_1, k_2, k_3, \dots, k_p) = 0 \quad (1)$$

kjer so:

$$\begin{aligned} \hat{l}_i & \dots \text{ izravnano opazovanje } (\hat{l}_i = l_i + v_i), i = 1, \dots, n; \\ (\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i) & \dots \text{ ocenjene vrednosti neznank – koordinate } nt \text{ neznanih točk, } i = 1, \dots, nt; \\ k_i & \dots \text{ konstante, } i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

V našem primeru imamo zgolj en tip opazovanj, in sicer m baznih vektorjev – $\mathbf{r}_i = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$, $i = 1, \dots, m$. Skupno število opazovanj n je torej $n = 3 \cdot m$.

Za bazni vektor med dvema novima točkama P in T ($P \rightarrow T$) nastavimo 3 enačbe popravkov oblike:

$$\Delta \hat{X}_i - (\hat{X}_T - \hat{X}_P) = 0 \quad (2a)$$

$$\Delta \hat{Y}_i - (\hat{Y}_T - \hat{Y}_P) = 0 \quad (2b)$$

$$\Delta \hat{Z}_i - (\hat{Z}_T - \hat{Z}_P) = 0 \quad (2c)$$

Oziroma za bazni vektor med dano točko R in novo točko T ($R \rightarrow T$):

$$\Delta \hat{X}_i - (\hat{X}_T - X_R) = 0 \quad (3a)$$

$$\Delta \hat{Y}_i - (\hat{Y}_T - Y_R) = 0 \quad (3b)$$

$$\Delta \hat{Z}_i - (\hat{Z}_T - Z_R) = 0 \quad (3c)$$

Pri posredni izravnavi vse enačbe popravkov zapišemo linearizirano v matrični obliki kot:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B} \Delta = \mathbf{f} \quad (4)$$

kjer je:

- $\mathbf{v}$... vektor popravkov opazovanj, velikosti $n \times 1$, ($\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$);
- $\mathbf{B}$... matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov, izračunana s približnimi vrednostmi neznank, velikosti $n \times u$ oziroma $n \times n_0$;
- Δ ... vektor popravkov približnih vrednosti neznank ($\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \Delta$), velikosti $u \times 1$ oziroma $n_0 \times 1$, v našem primeru velja $u = 3 \cdot nt$;
- $\mathbf{f}$... vektor odstopanj oziroma prostih členov enačb popravkov, velikosti $n \times 1$.

Parametri izravnave za našo geodetsko mrežo so:

- število vseh opazovanj: $n = 6 \cdot 3 = 18$
- minimalno potrebno število opazovanj: $n_0 = 3 \cdot 3 = 9$
- število neznank: $u = 3 \cdot 3 = 9$ ($u = n_0$)
- število nadštevilnih opazovanj: $r = n - n_0 = 9$

Nastavimo $n = 18$ enačb popravkov:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta \hat{X}_1 + \hat{X}_{FGG2} - \hat{X}_{FGG1} = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta \hat{Y}_1 + \hat{Y}_{FGG2} - \hat{Y}_{FGG1} = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta \hat{Z}_1 + \hat{Z}_{FGG2} - \hat{Z}_{FGG1} = 0 \\ &\vdots \\ F_7 &\equiv \Delta \hat{X}_3 + \hat{X}_{FGG4} - \hat{X}_{FGG3} = 0 \\ F_8 &\equiv \Delta \hat{Y}_3 + \hat{Y}_{FGG4} - \hat{Y}_{FGG3} = 0 \\ F_9 &\equiv \Delta \hat{Z}_3 + \hat{Z}_{FGG4} - \hat{Z}_{FGG3} = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5)$$

in jih lineariziramo (bodite pozorni na enačbe, kjer nastopa dana točka FGG3):

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{\Delta X_1} + \delta X_{FGG2} - \delta X_{FGG1} = -(\Delta X_1 + X_{FGG2}^0 - X_{FGG1}^0) \\ F_2 &\equiv v_{\Delta Y_1} + \delta Y_{FGG2} - \delta Y_{FGG1} = -(\Delta Y_1 + Y_{FGG2}^0 - Y_{FGG1}^0) \\ F_3 &\equiv v_{\Delta Z_1} + \delta Z_{FGG2} - \delta Z_{FGG1} = -(\Delta Z_1 + Z_{FGG2}^0 - Z_{FGG1}^0) \\ &\vdots \\ F_7 &\equiv v_{\Delta X_3} + \delta X_{FGG4} = -(\Delta X_3 + X_{FGG4}^0 - X_{FGG3}^0) \\ F_8 &\equiv v_{\Delta Y_3} + \delta Y_{FGG4} = -(\Delta Y_3 + Y_{FGG4}^0 - Y_{FGG3}^0) \\ F_9 &\equiv v_{\Delta Z_3} + \delta Z_{FGG4} = -(\Delta Z_3 + Z_{FGG4}^0 - Z_{FGG3}^0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6)$$

Matrika **B** vsebuje parcialne odvode enačb popravkov (5) po neznankah, izvrednotene v približnih vrednostih neznank:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \delta X_{FGG1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \delta Y_{FGG1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \delta Z_{FGG1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \delta X_{FGG4}} & \frac{\partial F_1}{\partial \delta Y_{FGG4}} & \frac{\partial F_1}{\partial \delta Z_{FGG4}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \delta X_{FGG1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \delta Y_{FGG1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \delta Z_{FGG1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \delta X_{FGG4}} & \frac{\partial F_2}{\partial \delta Y_{FGG4}} & \frac{\partial F_2}{\partial \delta Z_{FGG4}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{18}}{\partial \delta X_{FGG1}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \delta Y_{FGG1}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \delta Z_{FGG1}} & \cdots & \frac{\partial F_{18}}{\partial \delta X_{FGG4}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \delta Y_{FGG4}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \delta Z_{FGG4}} \end{bmatrix}_{(18 \times 9)} \quad (7)$$

Vektor popravkov približnih vrednosti neznank Δ in vektor odstopanj **f** sta:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta X_{FGG1} \\ \delta Y_{FGG1} \\ \delta Z_{FGG1} \\ \delta X_{FGG2} \\ \delta Y_{FGG2} \\ \delta Z_{FGG2} \\ \delta X_{FGG4} \\ \delta Y_{FGG4} \\ \delta Z_{FGG4} \end{bmatrix}_{(9 \times 1)} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\left(\Delta X_1 + X_{FGG2}^0 - X_{FGG1}^0\right) \\ -\left(\Delta Y_1 + Y_{FGG2}^0 - Y_{FGG1}^0\right) \\ -\left(\Delta Z_1 + Z_{FGG2}^0 - Z_{FGG1}^0\right) \\ \vdots \\ -\left(\Delta X_6 + X_{FGG4}^0 - X_{FGG2}^0\right) \\ -\left(\Delta Y_6 + Y_{FGG4}^0 - Y_{FGG2}^0\right) \\ -\left(\Delta Z_6 + Z_{FGG4}^0 - Z_{FGG2}^0\right) \end{bmatrix}_{(18 \times 1)} \quad (8)$$

Stohastični model nastavimo na podlagi natančnosti komponent baznih vektorjev. Za *i*-ti bazni vektor sestavimo kovariančno matriko opazovanj Σ_i kot:

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_i}^2 & \sigma_{\Delta X_i \Delta Y_i} & \sigma_{\Delta X_i \Delta Z_i} \\ \sigma_{\Delta X_i \Delta Y_i} & \sigma_{\Delta Y_i}^2 & \sigma_{\Delta Y_i \Delta Z_i} \\ \sigma_{\Delta X_i \Delta Z_i} & \sigma_{\Delta Y_i \Delta Z_i} & \sigma_{\Delta Z_i}^2 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (9)$$

Ob predpostavki, da bazni vektorji med seboj niso korelirano, je skupna kovariančna matrika opazovanj Σ blok-diagonalna matrika velikosti $n \times n$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_6 \end{bmatrix}_{(18 \times 18)} \quad (10)$$

Referenčno varianco a-priori σ_0^2 izračunamo kot povprečje diagonalnih elementov kovariančne matrike opazovanj Σ :

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}^2 = \frac{\text{sled}(\Sigma)}{n} \quad (11)$$

Matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ izračunamo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma \quad (12)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \quad (13)$$

Rešitev **funkcionalnega modela** posredne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \quad (14a)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (14b)$$

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \quad (14c)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{\Delta} \quad (14d)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \quad (14e)$$

Koordinate novih točk (vektor $\hat{\mathbf{x}}$) dobimo kot vsoto približnih vrednosti neznank (vektor $\mathbf{x}_0$) in popravkov približnih vrednosti neznank (vektor $\mathbf{\Delta}$):

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} \quad (15)$$

Sledi še rešitev **stohastičnega modela** posredne izravnave po MNK:

i) Izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - n_0} \quad (16)$$

ii) Izračun matrike kofaktorjev neznank $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$, matrike kofaktorjev popravkov opazovanj $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ in matrike kofaktorjev izravnanih opazovanj $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta}\mathbf{\Delta}} = \mathbf{N}^{-1} \quad (17a)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T \quad (17b)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad (17c)$$

ter pripadajočih kovariančnih matrik (zaradi praviloma preoptimistično določenih vhodnih natančnosti opazovanj za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$):

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \quad (18a)$$

$$\Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \quad (18b)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} \quad (18c)$$

5 ISKANJE GROBIH POGREŠKOV

5.1 Globalni test modela

Z globalnim testom modela preverjamo skladnost referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ z referenčno varianco a-priori σ_0^2 in na podlagi skladnosti sklepamo ali o prisotnosti grobih pogreškov ali o pravilno nastavljenih utežeh opazovanj (ki so neposredno povezane z natančnostjo opazovanj in referenčno varianco a-priori σ_0^2). Postavimo ničelno in alternativni domnevi:

$\mathcal{H}_0$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 sta skladni.

$\mathcal{H}_{1-1}$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 nista skladni – napaka v funkcionalnem modelu, prisotnost nemodeliranih sistematičnih vplivov ...

$\mathcal{H}_{1-2}$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 nista skladni – nepravilne uteži opazovanj (napačna razmerja med natančnostmi različnih tipov opazovanj, podcenjene ali precenjene natančnosti).

$\mathcal{H}_{1-3}$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 nista skladni – prisotnost grobih pogreškov v opazovanjih.

Testno statistiko Y izračunamo kot:

$$Y = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad (19)$$

Testna statistika Y se porazdeljuje po χ^2 -porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami. Ničelne hipoteze $\mathcal{H}_0$ ne moremo zavrniti, če ob dani stopnji značilnosti testa α velja:

$$\frac{\chi_{\alpha/2}^2(r)}{r} < Y < \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(r)}{r} \quad (20)$$

Če pa statistika pade v kritično območje, lahko zavrnemo ničelno hipotezo in sprejmemo eno izmed alternativnih hipotez. V primeru GNSS mreže so vhodne natančnosti baznih vektorjev praviloma določene preoptimistično, kar je opisano z alternativno domnevo $\mathcal{H}_{1-2}$.

Iskanje grobih pogreškov izvedemo s:

- **pregledom opazovanj** (angl. *data snooping*), če sta referenčni varianci a-priori in a-posteriori skladni,
- **Tau-testom**, če referenčni varianci a-priori in a-posteriori nista skladni oziroma če ne poznamo a-priori natančnosti naših opazovanj.

5.2 Tau-test

S Tau-testom statistično testiramo vsako opazovanje posebej in ugotavljamo, ali je določeno opazovanje grobo pogrešeno. V primeru GNSS mreže so opazovanja posamezne komponente baznih vektorjev. Postavimo ničelno in alternativno domnevo:

$\mathcal{H}_0$: i -to opazovanje ne vsebuje grobega pogreška.

$\mathcal{H}_1$: i -to opazovanje vsebuje grobi pogrešek.

Testno statistiko τ_i izračunamo kot:

$$\tau_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}} = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \quad (21)$$

kjer je $\hat{\sigma}_0$ a-posteriori referenčni standardni odklon in $q_{v_i v_i}$ diagonalni element matrike kofaktorjev popravkov opazovanj, ki pripada obravnavnemu opazovanju. Testna statistika τ_i se porazdeljuje po τ -porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami.

Ob dani stopnji značilnosti testa α lahko zavrnemo ničelno domnevo $\mathcal{H}_0$ in sprejmemo alternativno domnevo $\mathcal{H}_1$, če velja:

$$|\tau_i| > \tau_{1-\alpha/2} \quad (22)$$

Kritično vrednost $\tau_{1-\alpha/2}$ izračunamo kot:

$$\tau_{1-\alpha/2}(r) = \frac{\sqrt{r} t_{1-\alpha/2}(r-1)}{\sqrt{r-1 + t_{1-\alpha/2}^2(r-1)}} \quad (23)$$

kjer je t označena Studentova t -porazdelitev.