GNSS V GEODEZIJI – VAJE

VAJA 3: IZRAVNAVA MREŽE GNSS-VEKTORJEV PO MNK

DEL 2: POGOJNA IZRAVNAVA

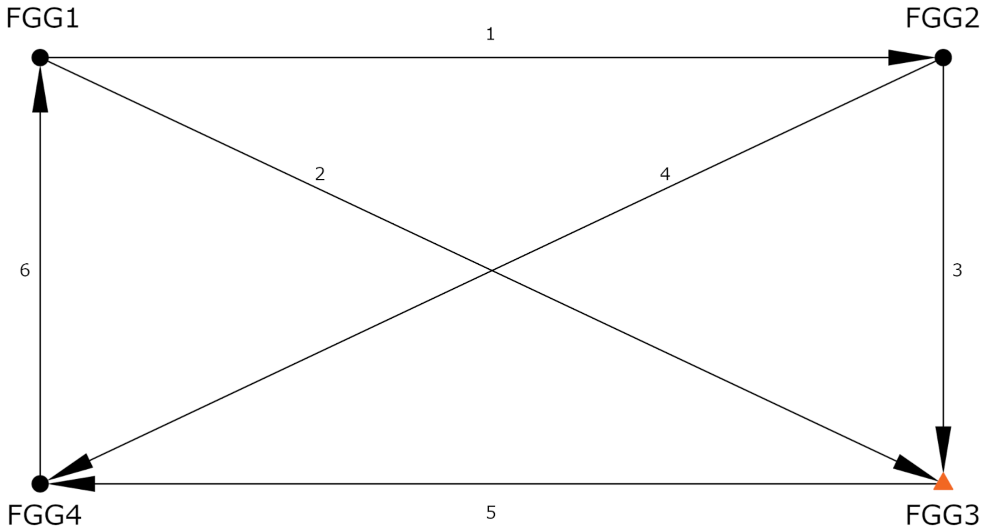
2022/2023

1 UVOD

Rezultat obdelave GNSS-opazovanj so bazni vektorji. Če imamo v GNSS-mreži nadštevilno število baznih vektorjev, koordinate novih točk določimo z izravnavo po MNK. Pri tretji vaji bomo izravnali štirikotnik, ki ga sestavlja šest baznih vektorjev (1).

Dano točko predstavlja steber FGG3 = (4293738,1031 m, 1110067,7315 m, 4569047,5476 m).

Nove točke so stebri FGG1, FGG2 in FGG4.



Slika 1: Skica geodetske GNSS-mreže na strehi FGG. Steber FGG3 je dana točka, ostali trije stebri so nove točke.

Opazovanja v geodetski mreži predstavlja 6 baznih vektorjev, ki smo jih dobili z obdelavo 4. serije statične izmere na strehi FGG v programu Leica Infinity:

- vektor 1: FGG1–FGG2 = $(\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1)$
- vektor 2: FGG1–FGG3 = $(\Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta Z_2)$
- vektor 3: FGG2–FGG3 = $(\Delta X_3, \Delta Y_3, \Delta Z_3)$
- vektor 4: FGG2–FGG4 = $(\Delta X_4, \Delta Y_4, \Delta Z_4)$
- vektor 5: FGG3–FGG4 = $(\Delta X_5, \Delta Y_5, \Delta Z_5)$
- vektor 6: FGG4–FGG1 = $(\Delta X_6, \Delta Y_6, \Delta Z_6)$

2 NALOGA

Baznih vektorjev imamo več, kot jih potrebujemo za enolično določitev koordinat novih točk, torej moramo koordinate novih točk določiti z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Dano geodetsko mrežo izravnajte po pogojni izravnavi po metodi najmanjših kvadratov. Ocenite koordinate novih točk in njihove natančnosti. Naredite tudi globalni test in iskanje grobih pogreškov s Tau-testom.

3 REZULTATI

Rezultat izravnave so popravki opazovanj, izravnani bazni vektorji in ocenjene koordinate novih točk, skupaj s pripadajočimi ocenami natančnosti ter rezultati globalnega testa modela in Tau-testa.

4 POGOJNA IZRAVNAVA PO MNK

Na osnovi n opazovanj, kjer za enolično rešitev problema potrebujemo n_0 opazovanj ($n_0 < n$), lahko sestavimo r pogojnih enačb ($r = n - n_0$). Pogojne enačbe vsebujejo samo (izravnana) opazovanja in konstante:

$$F_i \equiv g_i(\hat{l}_1, \hat{l}_2, ..., \hat{l}_n, k_1, k_2, ..., k_p) = 0 \tag{1}$$

kjer so:

$\hat{l}_i$ ... izravnana opazovanja ($\hat{l}_i = l_i + v_i$), $i = 1, ..., n$;

k_i ... konstante. $i = 1, ..., p$.

V našem primeru imamo zgolj en tip opazovanj, in sicer bazne vektorje $\mathbf{r}_i = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$, $i = 1, ..., n$. Pogojne enačbe zapišemo za pogoje, da morajo biti odstopanja pri zapiranju r figur enaka nič:

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta\hat{X}_k = 0 \tag{2a}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta\hat{Y}_k = 0 \tag{2b}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta\hat{Z}_k = 0 \tag{2c}$$

kjer bazni vektorji $\mathbf{r}_j = (\Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j)$, $j = 1, ..., k$, predstavljajo podmnožico vseh baznih vektorjev in tvorijo zaključeno figuro.

Pri pogojni izravnavi vse pogojne zapišemo linearizirano v matrični obliki kot:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{f} \tag{3}$$

kjer je:

$\mathbf{v}$	...	vektor popravkov opazovanj, velikosti $n \times 1$, $(\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v})$;
$\mathbf{A}$	...	matrika koeficientov pogojnih enačb, izračunana z merjenimi vrednostmi opazovanj, velikosti $r \times n$;
$\mathbf{f}$	...	vektor odstopanj oziroma prostih členov pogojnih enačb, velikosti $n \times 1$.

Parametri izravnave za našo geodetsko mrežo so:

- število opazovanj: $n = 6 \times 3 = 18$
- minimalno število potrebnih opazovanj: $n_0 = 9$
- število nadštevilnih opazovanj: $r = n - n_0 = 9$

Nastavimo $r = 9$ pogojnih enačb za tri zaključene figure in jih lineariziramo, npr.:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &\equiv v_{\Delta X_1} + v_{\Delta X_4} + v_{\Delta X_6} = -(\Delta X_1 + \Delta X_4 + \Delta X_6) && \text{(4a)}\\
F_2 &\equiv v_{\Delta Y_1} + v_{\Delta Y_4} + v_{\Delta Y_6} = -(\Delta Y_1 + \Delta Y_4 + \Delta Y_6) && \text{(4b)}\\
F_3 &\equiv v_{\Delta Z_1} + v_{\Delta Z_4} + v_{\Delta Z_6} = -(\Delta Z_1 + \Delta Z_4 + \Delta Z_6) && \text{(4c)}
\end{aligned}\right\} 1-4-6$$

$$\left.\begin{aligned}
F_4 &\equiv v_{\Delta X_1} + v_{\Delta X_3} - v_{\Delta X_2} = -(\Delta X_1 + \Delta X_3 - \Delta X_2) && \text{(5a)}\\
F_5 &\equiv v_{\Delta Y_1} + v_{\Delta Y_3} - v_{\Delta Y_2} = -(\Delta Y_1 + \Delta Y_3 - \Delta Y_2) && \text{(5b)}\\
F_6 &\equiv v_{\Delta Z_1} + v_{\Delta Z_3} - v_{\Delta Z_2} = -(\Delta Z_1 + \Delta Z_3 - \Delta Z_2) && \text{(5c)}
\end{aligned}\right\} 1-3-2$$

$$\left.\begin{aligned}
F_7 &\equiv v_{\Delta X_2} + v_{\Delta X_5} + v_{\Delta X_6} = -(\Delta X_2 + \Delta X_5 + \Delta X_6) && \text{(6a)}\\
F_8 &\equiv v_{\Delta Y_2} + v_{\Delta Y_5} + v_{\Delta Y_6} = -(\Delta Y_2 + \Delta Y_5 + \Delta Y_6) && \text{(6b)}\\
F_9 &\equiv v_{\Delta Z_2} + v_{\Delta Z_5} + v_{\Delta Z_6} = -(\Delta Z_2 + \Delta Z_5 + \Delta Z_6) && \text{(6c)}
\end{aligned}\right\} 2-5-6$$

Matrika $\mathbf{A}$ vsebuje odvode pogojnih enačb po opazovanjih:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_6} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_6} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_6} \\
\frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_6} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_6} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_6} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial F_9}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Y_1} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Z_1} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Y_2} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Z_2} & \cdots & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta X_6} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Y_6} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Z_6}
\end{bmatrix}_{(9\times 18)} \tag{7}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ je oblike:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\left(\Delta X_1 + \Delta X_4 + \Delta X_6\right) \\ -\left(\Delta Y_1 + \Delta Y_4 + \Delta Y_6\right) \\ -\left(\Delta Z_1 + \Delta Z_4 + \Delta Z_6\right) \\ \vdots \\ -\left(\Delta X_2 + \Delta X_5 + \Delta X_6\right) \\ -\left(\Delta Y_2 + \Delta Y_5 + \Delta Y_6\right) \\ -\left(\Delta Z_2 + \Delta Z_5 + \Delta Z_6\right) \end{bmatrix}_{(9\times 1)} \tag{8}$$

Stohastični model nastavimo na podlagi natančnosti komponent baznih vektorjev. Za i-ti bazni vektor sestavimo kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_i$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\Delta X_i} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\Delta Y_i} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\Delta Z_i} \end{bmatrix}_{(3\times 3)} \tag{9}$$

pri čemer smo predpostavili, da komponente baznega vektorja med seboj niso korelirane.

Ob predpostavki, da tudi bazni vektorji med seboj niso korelirano, je skupna kovariančna matrika opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ blok-diagonalna matrika dimenzije $n \times n$:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Sigma}_6 \end{bmatrix}_{(18\times 18)} \tag{10}$$

Referenčno varianco a-priori σ_0^2 izračunamo kot povprečje diagonalnih elementov kovariančne matrike opazovanj $\mathbf{\Sigma}$:

$$\sigma_0^2 = \frac{sled(\mathbf{\Sigma})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ii}^2 \tag{11}$$

Matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ izračunamo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} \tag{12}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \tag{13}$$

Rešitev **funkcionalnega modela** pogojne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{Q_e} = \mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{A}^\mathsf{T} \tag{14a}$$
$$\mathbf{P_e} = \mathbf{Q_e}^{-1} \tag{14b}$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{P_e}\,\mathbf{f} \tag{14c}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{k} \tag{14d}$$
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \tag{14e}$$

Koordinate novih točk dobimo na podlagi koordinat dane točke (FGG3) in izravnanih vrednosti baznih vektorjev.

Sledi še rešitev **stohastičnega modela** pogojne izravnave po MNK:

i) Izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{n - n_0} \tag{15}$$

ii) Izračun matrik kofaktorjev popravkov opazovanj $\mathbf{Q_{vv}}$ in izravnanih opazovanj $\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}}$:

$$\mathbf{Q_{vv}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{P_e}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} \tag{16a}$$
$$\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q_{vv}} \tag{16b}$$

ter pripadajočih kovariančnih matrik (v mreži, ki jo sestavljajo samo GNSS bazni vektorji, lahko za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori):

$$\mathbf{\Sigma_{vv}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{vv}} \tag{17a}$$
$$\mathbf{\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}} \tag{17b}$$

Oceno natančnosti koordinat *i*-te nove točke dobimo na podlagi zakona o prenosu varianc in kovarianc:

$$\mathbf{\Sigma_{yy}} = \mathbf{J}\,\mathbf{\Sigma_{xx}}\,\mathbf{J}^\mathsf{T} \tag{18}$$

kjer je:

$\mathbf{\Sigma_{xx}}$	...	kovariančna matrika ustreznih izravnanih opazovanj,
$\mathbf{\Sigma_{yy}}$	...	kovariančna matrika koordinat nove točke,
$\mathbf{J}$	...	jakobijeva matrika funkcij, ki povezujejo opazovanja in koordinate nove točke.

5 ISKANJE GROBIH POGREŠKOV

Glej dokument `GvG-V03_D1-navodila.pdf`.