VAJA 3: IZRAVNAVA MREŽE GNSS-VEKTORJEV PO MNK

DEL 2: POGOJNA IZRAVNAVA

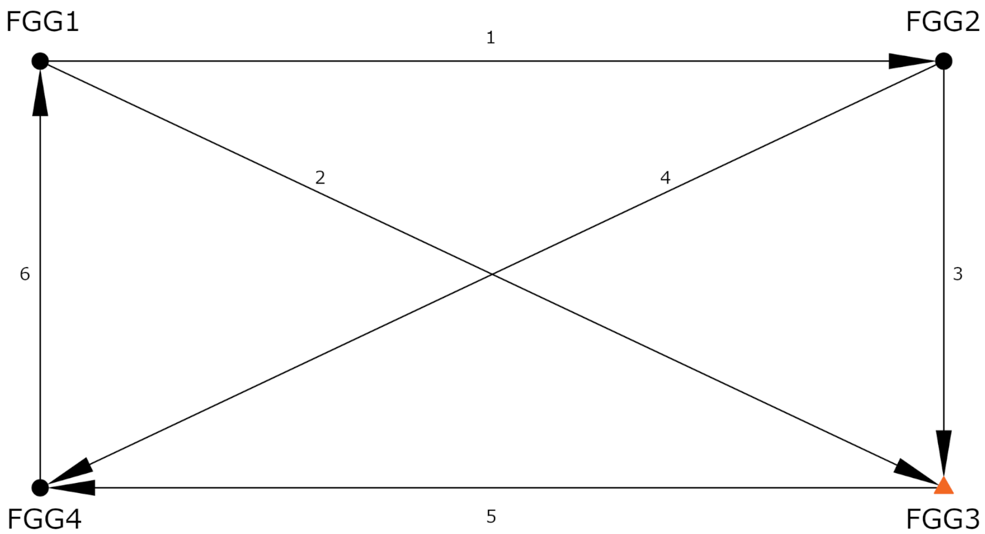
2021/2022

1 UVOD

Rezultat obdelave GNSS-opazovanj so bazni vektorji. Če imamo v GNSS-mreži nadštevilno število baznih vektorjev, koordinate novih točk določimo z izravnavo po MNK. Pri tretji vaji bomo izravnali štirikotnik, ki ga sestavlja šest baznih vektorjev (1).

Dano točko predstavlja steber FGG3 = (4293738,1031 m, 1110067,7315 m, 4569047,5476 m).

Nove točke so stebri FGG1, FGG2 in FGG4.



Slika 1: Skica geodetske GNSS-mreže na strehi FGG. Steber FGG3 je dana točka, ostali trije stebri so nove točke.

Opazovanja v geodetski mreži predstavlja 6 baznih vektorjev, ki smo jih dobili z obdelavo 2. serije statične izmere na strehi FGG v programu Leica Infinity:

- vektor 1: FGG1–FGG2 = $(\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1)$
- vektor 2: FGG1–FGG3 = $(\Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta Z_2)$
- vektor 3: FGG2–FGG3 = $(\Delta X_3, \Delta Y_3, \Delta Z_3)$
- vektor 4: FGG2–FGG4 = $(\Delta X_4, \Delta Y_4, \Delta Z_4)$
- vektor 5: FGG3–FGG4 = $(\Delta X_5, \Delta Y_5, \Delta Z_5)$
- vektor 6: FGG4–FGG1 = $(\Delta X_6, \Delta Y_6, \Delta Z_6)$

2 NALOGA

Baznih vektorjev imamo več, kot jih potrebujemo za enolično določitev koordinat novih točk, torej moramo koordinate novih točk določiti z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Dano geodetsko mrežo izravnajte po pogojni izravnavi po metodi najmanjših kvadratov. Rezultat izravnave so ocenjene vrednosti koordinat s pripadajočimi natančnostmi, natančnosti popravkov opazovanj in natančnosti izravnanih opazovanj. Naredite tudi globalni test in iskanje grobih pogreškov s Tau-testom.

3 POGOJNA IZRAVNAVA PO MNK

Na osnovi n opazovanj, kjer za enolično rešitev problema potrebujemo n_0 opazovanj ($n_0 < n$), lahko sestavimo r pogojnih enačb ($r = n - n_0$). Pogojne enačbe vsebujejo samo (izravnana) opazovanja in konstante:

$$F_i \equiv g_i(\hat{l}_1, \hat{l}_2, ..., \hat{l}_n, k_1, k_2, ..., k_p) = 0 \tag{1}$$

kjer so:

- $\hat{l}_i$ ... izravnana opazovanja ($\hat{l}_i = l_i + v_i$), $i = 1, ..., n$;
- k_i ... konstante. $i = 1, ..., p$.

V našem primeru imamo zgolj en tip opazovanj, in sicer bazne vektorje $\mathbf{r}_i = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$, $i = 1, ..., n$. Pogojne enačbe zapišemo za pogoje, da morajo biti odstopanja pri zapiranju r figur enaka nič:

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta \hat{X}_k = 0 \tag{2a}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta \hat{Y}_k = 0 \tag{2b}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta \hat{Z}_k = 0 \tag{2c}$$

kjer bazni vektorji $\mathbf{r}_j = (\Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j)$, $j = 1, ..., k$, predstavljajo podmnožico vseh baznih vektorjev in tvorijo zaključeno figuro.
Pri pogojni izravnavi vse pogojne zapišemo linearizirano v matrični obliki kot:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{f} \tag{3}$$

kjer je:

- $\mathbf{v}$ ... vektor popravkov opazovanj, velikosti $n \times 1$, ($\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$);
- $\mathbf{A}$ ... matrika koeficientov pogojnih enačb, izračunana z merjenimi vrednostmi opazovanj, velikosti $r \times n$;
- $\mathbf{f}$ ... vektor odstopanj oziroma prostih členov pogojnih enačb, velikosti $n \times 1$.

Parametri izravnave za našo geodetsko mrežo so:

- število opazovanj: $n = 6 \times 3 = 18$
- minimalno število potrebnih opazovanj: $n_0 = 9$
- število nadštevilnih opazovanj: $r = n - n_0 = 9$

Nastavimo $r = 9$ pogojnih enačb za tri zaključene figure:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{\Delta X_1} + v_{\Delta X_4} + v_{\Delta X_6} = -(\Delta X_1 + \Delta X_4 + \Delta X_6) && (4a)\\ F_2 &\equiv v_{\Delta Y_1} + v_{\Delta Y_4} + v_{\Delta Y_6} = -(\Delta Y_1 + \Delta Y_4 + \Delta Y_6) && (4b)\\ F_3 &\equiv v_{\Delta Z_1} + v_{\Delta Z_4} + v_{\Delta Z_6} = -(\Delta Z_1 + \Delta Z_4 + \Delta Z_6) && (4c)\end{aligned}\right\} 1-4-6$$

$$\left.\begin{aligned} F_4 &\equiv v_{\Delta X_1} + v_{\Delta X_3} - v_{\Delta X_2} = -(\Delta X_1 + \Delta X_3 - \Delta X_2) && (5a)\\ F_5 &\equiv v_{\Delta Y_1} + v_{\Delta Y_3} - v_{\Delta Y_2} = -(\Delta Y_1 + \Delta Y_3 - \Delta Y_2) && (5b)\\ F_6 &\equiv v_{\Delta Z_1} + v_{\Delta Z_3} - v_{\Delta Z_2} = -(\Delta Z_1 + \Delta Z_3 - \Delta Z_2) && (5c)\end{aligned}\right\} 1-3-2$$

$$\left.\begin{aligned} F_7 &\equiv v_{\Delta X_2} + v_{\Delta X_5} + v_{\Delta X_6} = -(\Delta X_2 + \Delta X_5 + \Delta X_6) && (6a)\\ F_8 &\equiv v_{\Delta Y_2} + v_{\Delta Y_5} + v_{\Delta Y_6} = -(\Delta Y_2 + \Delta Y_5 + \Delta Y_6) && (6b)\\ F_9 &\equiv v_{\Delta Z_2} + v_{\Delta Z_5} + v_{\Delta Z_6} = -(\Delta Z_2 + \Delta Z_5 + \Delta Z_6) && (6c)\end{aligned}\right\} 2-5-6$$

Matrika $\mathbf{A}$ vsebuje odvode pogojnih enačb po opazovanjih:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_6} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_6} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_6} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_6} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_9}{\partial \Delta X_1} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Y_1} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Z_1} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta X_2} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Y_2} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Z_2} & \cdots & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta X_6} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Y_6} & \frac{\partial F_9}{\partial \Delta Z_6} \end{bmatrix}_{(9\times18)} \tag{7}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ je oblike:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(\Delta X_1 + \Delta X_4 + \Delta X_6) \\ -(\Delta Y_1 + \Delta Y_4 + \Delta Y_6) \\ -(\Delta Z_1 + \Delta Z_4 + \Delta Z_6) \\ \vdots \\ -(\Delta X_2 + \Delta X_5 + \Delta X_6) \\ -(\Delta Y_2 + \Delta Y_5 + \Delta Y_6) \\ -(\Delta Z_2 + \Delta Z_5 + \Delta Z_6) \end{bmatrix}_{(9\times1)} \tag{8}$$

Stohastični model nastavimo na podlagi danih natančnosti komponent baznih vektorjev iz poročil obdelave v programu Leica Infinity. Za i-ti bazni vektor sestavimo kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_i$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_i = M_{0i}^2 \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{21}^i & Q_{31}^i \\ Q_{21}^i & Q_{22}^i & Q_{23}^i \\ Q_{31}^i & Q_{23}^i & Q_{33}^i \end{bmatrix}_{(3\times3)} \tag{9}$$

Skupna kovariančna matrika opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ je blok-diagonalna matrika dimenzije $n \times n$:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Sigma}_6 \end{bmatrix}_{(18\times18)} \tag{10}$$

Referenčno varianco a-priori σ_0^2 izračunamo kot povprečje diagonalnih elementov kovariančne matrike opazovanj $\mathbf{\Sigma}$:

$$\sigma_0^2 = \frac{sled(\mathbf{\Sigma})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ii}^2 \tag{11}$$

Matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ izračunamo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} \tag{12}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \tag{13}$$

Rešitev **funkcionalnega modela** pogojne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{Q_e} = \mathbf{A}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{A}^\mathsf{T} \tag{14a}$$

$$\mathbf{P_e} = \mathbf{Q_e}^{-1} \tag{14b}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{P_e}\,\mathbf{f} \tag{14c}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{k} \tag{14d}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \tag{14e}$$

Koordinate novih točk dobimo na podlagi koordinat dane točke (FGG3) in izravnanih vrednosti baznih vektorjev.

Sledi še rešitev **stohastičnega modela** pogojne izravnave po MNK:

i) Izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{n - n_0} \tag{15}$$

ii) Izračun matrik kofaktorjev popravkov opazovanj $\mathbf{Q_{vv}}$ in izravnanih opazovanj $\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}}$:

$$\mathbf{Q_{vv}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{A}^\mathsf{T}\,\mathbf{P_e}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Q} \tag{16a}$$

$$\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q_{vv}} \tag{16b}$$

ter pripadajočih kovariančnih matrik (v mreži, ki jo sestavljajo samo GNSS bazni vektorji, lahko za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori):

$$\mathbf{\Sigma_{vv}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{vv}} \tag{17a}$$

$$\mathbf{\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}} \tag{17b}$$

4 ISKANJE GROBIH POGREŠKOV

Glej dokument `GvG_V03_1-navodila.pdf`.