VAJA 3: IZRAVNAVA MREŽE GNSS-VEKTORJEV PO MNK

DEL 1: POSREDNA IZRAVNAVA

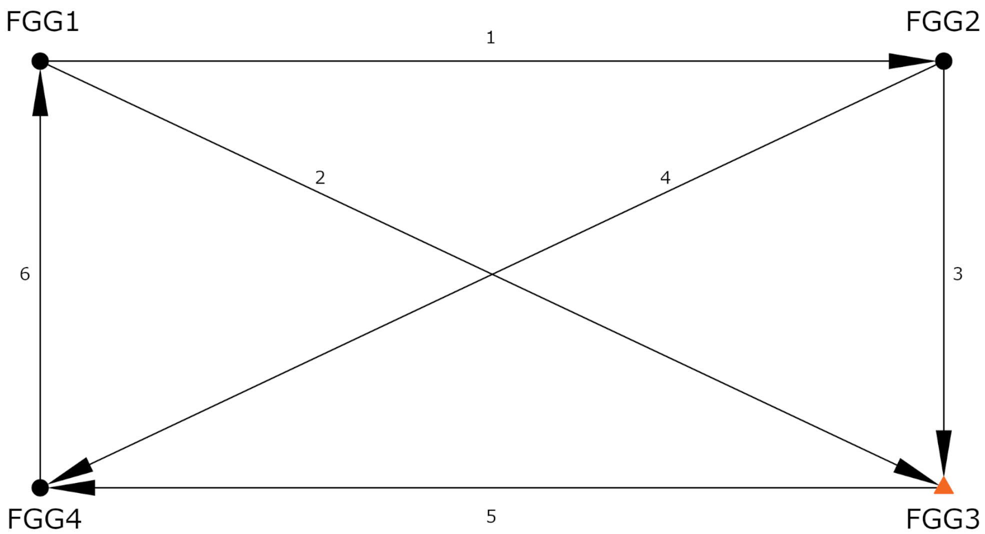
2021/2022

1 UVOD

Rezultat obdelave GNSS-opazovanj so bazni vektorji. Če imamo v GNSS-mreži nadštevilno število baznih vektorjev, koordinate novih točk določimo z izravnavo po MNK. Pri tretji vaji bomo izravnali štirikotnik, ki ga sestavlja šest baznih vektorjev (1).

Dano točko predstavlja steber FGG3 = (4293738,1031 m, 1110067,7315 m, 4569047,5476 m).

Nove točke so stebri FGG1, FGG2 in FGG4.



Slika 1: Skica geodetske GNSS-mreže na strehi FGG. Steber FGG3 je dana točka, ostali trije stebri so nove točke.

Opazovanja v geodetski mreži predstavlja 6 baznih vektorjev, ki smo jih dobili z obdelavo 2. serije statične izmere na strehi FGG v programu Leica Infinity:

- vektor 1: FGG1–FGG2 = $(\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1)$
- vektor 2: FGG1–FGG3 = $(\Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta Z_2)$
- vektor 3: FGG2–FGG3 = $(\Delta X_3, \Delta Y_3, \Delta Z_3)$
- vektor 4: FGG2–FGG4 = $(\Delta X_4, \Delta Y_4, \Delta Z_4)$
- vektor 5: FGG3–FGG4 = $(\Delta X_5, \Delta Y_5, \Delta Z_5)$
- vektor 6: FGG4–FGG1 = $(\Delta X_6, \Delta Y_6, \Delta Z_6)$

2 NALOGA

Baznih vektorjev imamo več, kot jih potrebujemo za enolično določitev koordinat novih točk, torej moramo koordinate novih točk določiti z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Dano geodetsko mrežo izravnajte po posredni izravnavi po metodi najmanjših kvadratov. Rezultat izravnave so ocenjene vrednosti koordinat s pripadajočimi natančnostmi, natančnosti popravkov opazovanj in natančnosti izravnanih opazovanj. Naredite tudi globalni test in iskanje grobih pogreškov s Tau-testom.

3 POSREDNA IZRAVNAVA PO MNK

Pri posredni izravnavi nastavimo za vsako opazovanje eno enačbo popravkov. Vsaka enačba popravkov vsebuje samo eno opazovanje in poljubno število neznank in konstant. Sestavimo torej n enačb popravkov, kjer je n število opazovanj. Skupno število neznank je $u = n_0$. Splošna oblika enačb popravkov je (če so naše neznanke trirazsežne kartezične koordinate):

$$F_i \equiv \hat{l}_i - f(\hat{X}_1, \hat{Y}_1, \hat{Z}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_2, \hat{Z}_2, ..., X_{nt}, Y_{nt}, Z_{nt}, k_1, k_2, k_3, ..., k_p) = 0 \tag{1}$$

kjer so:

$\hat{l}_i$ ... izravnano opazovanje ($\hat{l}_i = l_i + v_i$), $i = 1, ..., n$;
$(\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i)$ ... neznanke – koordinate nt neznanih točk, $i = 1, ..., nt$;
k_i ... konstante, $i = 1, ..., p$.

V našem primeru imamo zgolj en tip opazovanj, in sicer bazne vektorje $\mathbf{r}_i = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i)$, $i = 1, ..., n$. Za poljuben bazni vektor iz začetne točke P proti končni točki T lahko nastavimo 3 enačbe popravkov oblike:

$$\Delta\hat{X}_i - (\hat{X}_T - \hat{X}_P) = 0 \tag{2a}$$

$$\Delta\hat{Y}_i - (\hat{Y}_T - \hat{Y}_P) = 0 \tag{2b}$$

$$\Delta\hat{Z}_i - (\hat{Z}_T - \hat{Z}_P) = 0 \tag{2c}$$

Pri posredni izravnavi vse enačbe popravkov zapišemo linearizirano v matrični obliki kot:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\,\mathbf{\Delta} = \mathbf{f} \tag{3}$$

kjer je:

$\mathbf{v}$ ... vektor popravkov opazovanj, velikosti $n \times 1$, $(\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v})$;
$\mathbf{B}$ ... matrika koeficientov enačb popravkov, izračunana s približnimi vrednostmi neznank, velikosti $n \times u$ oziroma $n \times n_0$;
$\mathbf{\Delta}$ ... vektor neznank oziroma popravkov približnih vrednosti neznank $(\hat{\Delta} = \Delta_0 + \Delta)$, velikosti $u \times 1$ oziroma $n_0 \times 1$, v našem primeru velja $u = 3 \cdot nt$;
$\mathbf{f}$ ... vektor odstopanj oziroma prostih členov enačb popravkov, velikosti $n \times 1$.

Parametri izravnave za našo geodetsko mrežo so:

- število opazovanj: $n = 6 \times 3 = 18$
- število neznank: $u = 3 \times 3 = 9$ $(u = n_0)$
- število nadštevilnih opazovanj: $r = n - n_0 = 9$

Nastavimo $n = 18$ enačb popravkov opazovanj (bodite pozorni na enačbe, kjer nastopa dana točka FGG3):

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv v_{\Delta X_1} + \Delta X_{FGG1} - \Delta X_{FGG2} &&= -\left(\Delta X_1 + X^0_{FGG1} - X^0_{FGG2}\right)\\
F_2 &\equiv v_{\Delta Y_1} + \Delta Y_{FGG1} - \Delta Y_{FGG2} &&= -\left(\Delta Y_1 + Y^0_{FGG1} - Y^0_{FGG2}\right)\\
F_3 &\equiv v_{\Delta Z_1} + \Delta Z_{FGG1} - \Delta Z_{FGG2} &&= -\left(\Delta Z_1 + Z^0_{FGG1} - Z^0_{FGG2}\right)\\
F_4 &\equiv v_{\Delta X_1} + \Delta X_{FGG1} &&= -\left(\Delta X_1 + X^0_{FGG1} - X_{FGG3}\right)\\
F_5 &\equiv v_{\Delta Y_1} + \Delta Y_{FGG1} &&= -\left(\Delta Y_1 + Y^0_{FGG1} - Y_{FGG3}\right)\\
F_6 &\equiv v_{\Delta Z_1} + \Delta Z_{FGG1} &&= -\left(\Delta Z_1 + Z^0_{FGG1} - Z_{FGG3}\right)\\
& &&\vdots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Matrika $\mathbf{B}$ vsebuje odvode enačb popravkov po neznankah:

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_{FGG1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_{FGG1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_{FGG1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta X_{FGG4}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Y_{FGG4}} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta Z_{FGG4}}\\
\frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_{FGG1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_{FGG1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_{FGG1}} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta X_{FGG4}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Y_{FGG4}} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta Z_{FGG4}}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{\partial F_{18}}{\partial \Delta X_{FGG1}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \Delta Y_{FGG1}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \Delta Z_{FGG1}} & \cdots & \frac{\partial F_{18}}{\partial \Delta X_{FGG4}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \Delta Y_{FGG4}} & \frac{\partial F_{18}}{\partial \Delta Z_{FGG4}}
\end{bmatrix}_{(18\times 9)}
\tag{5}
$$

Vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ in vektor odstopanj $\mathbf{f}$ sta:

$$
\mathbf{v} = \begin{bmatrix}
\Delta X_{FGG1}\\ \Delta Y_{FGG1}\\ \Delta Z_{FGG1}\\ \Delta X_{FGG2}\\ \Delta Y_{FGG2}\\ \Delta Z_{FGG2}\\ \Delta X_{FGG4}\\ \Delta Y_{FGG4}\\ \Delta Z_{FGG4}
\end{bmatrix}_{(9\times 1)}
\qquad
\mathbf{f} = \begin{bmatrix}
-\left(\Delta X_1 + X^0_{FGG1} - X^0_{FGG2}\right)\\
-\left(\Delta Y_1 + Y^0_{FGG1} - Y^0_{FGG2}\right)\\
-\left(\Delta Z_1 + Z^0_{FGG1} - Z^0_{FGG2}\right)\\
\vdots\\
-\left(\Delta X_6 + X^0_{FGG4} - X^0_{FGG1}\right)\\
-\left(\Delta Y_6 + Y^0_{FGG4} - Y^0_{FGG1}\right)\\
-\left(\Delta Z_6 + Z^0_{FGG4} - Z^0_{FGG1}\right)
\end{bmatrix}_{(18\times 1)}
\tag{6}
$$

Stohastični model nastavimo na podlagi danih natančnosti komponent baznih vektorjev iz poročil obdelave v programu Leica Infinity. Za i-ti bazni vektor sestavimo kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_i$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_i = M_{0i}^2 \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{21}^i & Q_{31}^i \\ Q_{21}^i & Q_{22}^i & Q_{23}^i \\ Q_{31}^i & Q_{23}^i & Q_{33}^i \end{bmatrix}_{(3\times3)} \tag{7}$$

Skupna kovariančna matrika opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ je blok-diagonalna matrika dimenzije $n \times n$:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Sigma}_6 \end{bmatrix}_{(18\times18)} \tag{8}$$

Referenčno varianco a-priori σ_0^2 izračunamo kot povprečje diagonalnih elementov kovariančne matrike opazovanj $\mathbf{\Sigma}$:

$$\sigma_0^2 = \frac{sled(\mathbf{\Sigma})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ii}^2 \tag{9}$$

Matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ izračunamo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} \tag{10}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \tag{11}$$

Rešitev **funkcionalnega modela** posredne izravnave po MNK dobimo po enačbah:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{B} \tag{12a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{f} \tag{12b}$$

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{t} \tag{12c}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\,\mathbf{\Delta} \tag{12d}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \tag{12e}$$

Koordinate novih točk (vektor $\hat{\mathbf{\Delta}}$) dobimo kot vsoto približnih vrednosti neznank (vektor $\mathbf{\Delta}_0$) in popravkov približnih vrednosti neznank (vektor $\mathbf{\Delta}$):

$$\hat{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{\Delta}_0 + \mathbf{\Delta} \tag{13}$$

Sledi še rešitev **stohastičnega modela** posredne izravnave po MNK:

i) Izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{n - n_0} \tag{14}$$

ii) Izračun matrike kofaktorev neznank $\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}$, matrike kofaktorjev popravkov opazovanj $\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}}$ in matrike kofaktorjev izravnanih opazovanj $\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}}$:

$$\mathbf{Q_{\Delta\Delta}} = \mathbf{N}^{-1} \tag{15a}$$

$$\mathbf{Q_{vv}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B}\,\mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{B}^T \tag{15b}$$

$$\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q_{vv}} \tag{15c}$$

ter pripadajočih kovariančnih matrik (v mreži, ki jo sestavljajo samo GNSS bazni vektorji, lahko za izračun kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori):

$$\mathbf{\Sigma_{\Delta\Delta}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{\Delta\Delta}} \tag{16a}$$

$$\mathbf{\Sigma_{vv}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{vv}} \tag{16b}$$

$$\mathbf{\Sigma_{\hat{l}\hat{l}}} = \hat{\sigma}_0^2\,\mathbf{Q_{\hat{l}\hat{l}}} \tag{16c}$$

4 ISKANJE GROBIH POGREŠKOV

4.1 Globalni test modela

Z globalnim testom modela preverjamo skladnost referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ z referenčno varianco a-priori σ_0^2 in na podlagi skladnosti sklepamo ali o prisotnosti grobih pogreškov ali o pravilno nastavljenih utežeh opazovanj (ki so neposredno povezane z natančnostjo opazovanj in referenčno varianco a-priori σ_0^2). Postavimo ničelno in alternativni domnevi:

$\mathcal{H}_0$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 sta skladni.

$\mathcal{H}_{1-1}$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 nista skladni – nepravilne uteži opazovanj.

$\mathcal{H}_{1-2}$: Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčna varianca a-priori σ_0^2 nista skladni – prisotnost grobih pogreškov v opazovanjih.

Testno statistiko Y izračunamo kot:

$$Y = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \tag{17}$$

Testna statistika Y se porazdeljuje po χ^2-porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami. Ničelne hipoteze $\mathcal{H}_0$ ne moremo zavrniti, če ob dani stopnji zaupanja α velja:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2}(r)}{r} < Y < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(r)}{r} \tag{18}$$

Če pa statistika pade v kritično območje, lahko zavrnemo ničelno hipotezo in sprejmemo eno izmed alternativnih hipotez. V primeru GNSS-mreže so vhodne natančnosti baznih vektorjev pogosto določene preveč optimistično, kar je opisano z alternativno domnevo $\mathcal{H}_{1-2}$. Ker pa ne moremo biti sigurni, katero alternativno domnevo lahko sprejmemo, nadaljujemo z iskanjem grobih pogreškov z uporabo Tau-testa.

4.2 Tau-test

S Tau-testom statistično testiramo vsako opazovanje posebej in ugotavljamo, ali je določeno opazovanje grobo pogrešeno. V primeru GNSS-mreže so opazovanja posamezne komponente baznih vektorjev.

Postavimo ničelno in alternativno domnevo:

$\mathcal{H}_0$: i-to opazovanje ne vsebuje grobega pogreška.

$\mathcal{H}_1$: i-to opazovanje vsebuje grobi pogreše.

Testno statistiko τ_i izračunamo kot:

$$\tau_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_{v_i}} = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \tag{19}$$

kjer je $\hat{\sigma}_0$ a-posteriori referenčni standardni odklon in $q_{v_i v_i}$ diagonalni element matrike kofaktorjev popravkov opazovanj, ki pripada obravnavnemu opazovanju. Testna statistka τ_i se porazdeljuje po τ-porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami.

Ob dani stopnji zaupanja α lahko zavrnemo ničelno hipotezo $\mathcal{H}_0$, če velja:

$$\tau_i > \tau_{1-\alpha/2} \tag{20}$$

Kritično vrednost $\tau_{1-\alpha/2}$ izračunamo kot:

$$\tau_{1-\alpha/2}(r) = \frac{\sqrt{r}\, t_{1-\alpha/2}\,(r-1)}{\sqrt{r-1+t^2_{1-\alpha/2}(r-1)}} \tag{21}$$

kjer je s t označena študentova t-porazdelitev.